

Отстраняване на оператор за предпочитание и съпътстващ
квантор от втори ред по партиите в ATL^* със
стратегически контексти

Dimitar P. Guelev

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria

gelevdp@math.bas.bg

План на доклада

Предварителни сведения:

Темпорална логика и безкрайни игри на няколко играча върху CGM с наредба на целите

Целта: формулиране и установяване на теоретико-игрови свойства

Пример: Еквилибриум на Неш (всъщност, Ръсел Кроу)

Още сведения: Логика с разколняващо се време и квантор по състоянията QCTL*

Двуместна релация на предпочитание и отстраняването ѝ

Съпътстващият квантор по крайните разбивания на m -вото от партии и отстраняването му

Още сведения: Alternating Time Temporal Logic със стратегически контексти

Отново към целта: Свеждането на формулировката на равновесие по Неш към формула в QCTL*.

Темпоралната логика с явни означения за времето

Предикатен език с едноместни символи $P_1, \dots, P_Z$ над $\langle \omega, < \rangle$:

$$\varphi ::= \perp \mid P(x) \mid \varphi \Rightarrow \varphi \mid \exists x \varphi$$

$$\langle \omega, < \rangle, P_1^M, \dots, P_Z^M, t_1, \dots, t_n \models \varphi(t_1, \dots, t_n)$$

Ако фиксираме само $t \in \omega$ във $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ и допуснем още носители в $\langle \omega, \dots, <, \dots \rangle$ за стойностите на $x_1, \dots, x_n$, получаваме ТЛ с една темпорална размерност като теория в език на предикатно смятане от първи или втори ред.

Линейната темпорална логика LTL

Езикът на LTL е модален; времето участва неявно:

$$AP \hat{=} \{p_1, \dots, p_Z\}, \quad B ::= \perp \mid p \mid B \Rightarrow B \mid \bigcirc B \mid (B \cup B)$$

$\sigma : \omega \rightarrow \mathcal{P}(AP)$ отговаря на $P_1^M, \dots, P_Z^M : \omega \rightarrow \{0, 1\}$

Релацията на истинност: $\sigma \models B$

$\sigma^0 \sigma^1 \dots \models_{\text{LTL}} p$, ако $p \in \sigma^0$ - $\{p\}x \dots$

$\sigma^0 \sigma^1 \dots \models_{\text{LTL}} \bigcirc F$ ако $\sigma^1 \dots \models_{\text{LTL}} F$ - за $\bigcirc p$: $x\{p\}x \dots$

$\sigma^0 \sigma^1 \dots \models_{\text{LTL}} (FUG)$, ако $\exists t((\sigma^t \dots \models_{\text{LTL}} G) \wedge (\bigwedge_{s=0}^{t-1} \sigma^s \dots \models_{\text{LTL}} F))$
- за $(p \cup q)$: $\{p\} \dots \{p\}(\{q, p?\})x \dots$

Линейната темпорална логика LTL: Примери и производни оператори

$$B ::= \perp \mid p \mid B \Rightarrow B \mid \bigcirc B \mid (B \cup B)$$

$\perp, \neg, \vee, \dots$ - както обикновено

$$p \wedge \bigcirc \neg p - \{p\}\{\neg p\}x \dots,$$

$$p \Leftrightarrow \bigcirc \bigcirc p - \underline{\{p\}x\{p\}x \dots} \text{ или } \underline{\{\neg p\}x\{\neg p\}x \dots},$$

$$(p \cup (\neg p \wedge \bigcirc p)) - \underline{\{p\} \dots \{p\}\{\neg p\}\{p\}x \dots}$$

$$\diamond F \triangleq (\top \cup F) - \diamond p: \underline{x \dots x\{p\}x \dots}$$

$$\square F \triangleq \neg \diamond \neg F - \square p: \underline{\{p\}\{p\} \dots}$$

$$\square(q \Rightarrow \bigcirc a), \square(q \Rightarrow \diamond a), \square(q \Rightarrow \bigcirc \diamond a)$$

LTL и т. л. в предикатните означения

Изразителна пълнота: Нека $P_z^M(t) \leftrightarrow p_z \in \sigma(t)$ и φ е затворена формула. Тогава съществува, B_φ в LTL т., че:

$$\omega, <, P_1^M, \dots, P_Z^M \models_{FO} \varphi \leftrightarrow \sigma \models_{LTL} B_\varphi.$$

Съответствието може да се изрази по-силно, ако се допуснат и оператори, които отвеждат към миналото:

Известното $\sigma^0 \sigma^1 \dots \models_{LTL} p$, ако $p \in \sigma^0$

и $\sigma^0 \sigma^1 \dots \models_{LTL} \bigcirc F$ ако $\sigma^1 \dots \models_{LTL} F$

може да се запише и като

$\sigma, k \models_{LTL} p$, ако $p \in \sigma^k$ и $\sigma, k \models_{LTL} \bigcirc F$ ако $\sigma, k+1 \models_{LTL} F$

Тогава имаме и $\sigma, k \models_{LTL} \ominus F$ ако $k > 0$ и $\sigma, k-1 \models_{LTL} F$.

Изр. пълнота, вече за ф-ли с 1 св. променлива, добива вида:

$$\omega, <, P_1^M, \dots, P_Z^M, x \mapsto k \models_{FO} \varphi(x) \leftrightarrow \sigma, k \models_{LTL} B_\varphi.$$

Префиксна нормална форма в LTL

LTL е удобна за индуктивен извод:

Префиксна нормална форма: $F \Leftrightarrow \bigvee_k F_k \wedge \bigcirc F'_k$,

където F_k не съдържат модалности ($\bigcirc$, $(.U.)$), а $h(F'_k) \leq h(F)$.

Нека $d(B)$ изразява дълбочината на влягане на $\bigcirc$ и $(.U.)$ в B .

От $d(F'_k) \leq d(F)$ лесно следва, че затварянето на $\{F\}$ относно 'опашките' F'_k , които се появяват при образуване на ПНФ е логически крайно.

LTL върху модели на Крипке

$K \triangleq \langle W, w_I, R, V \rangle$ за $AP \triangleq \{p_1, \dots, p_Z\}$

W - пространство на състоянията (възм. светове),

$w_I \in W$ - **начално** състояние; понякога се взема $\emptyset \neq W_I \subseteq W$

$R \subseteq W \times W$, $\forall w \exists w' R(w, w')$ - тотална релация

$V \subseteq W \times AP$; $V(w) \triangleq \{p \in AP : V(w, p)\}$

Безкрайните R -редици $w^0 w^1, \dots$ се наричат също paths, runs, fullpaths, behaviours, ...:

$R_K^{\text{inf}}(w^0 \dots w^k) \triangleq$ безкр. R -редици, продължения на $w^0 \dots w^k$

Редиците $\underline{w} \in R_K^{\text{inf}}(w_I)$ се наричат **начални**.

За $\underline{w} \triangleq \underline{w}^0 \underline{w}^1 \dots \in R_K^{\text{inf}}(\underline{w}^0)$,

$K, \underline{w} \models B$ означава, че $V(\underline{w}^0)V(\underline{w}^1) \dots \models_{LTL} B$

За дадено w се разглежда въпросът, дали $K, \underline{w} \models A$ за всички

$\underline{w} \in R_K^{\text{inf}}(w)$, Това се записва като $K, w \models A$.

Целта: извод на теоретико-игрови свойства

Σ - множеството от всички играчи, $i \in \Sigma$

G_i - LTL-формула, задаваща м-во от партии (от интерес за играч i);

$\langle\langle \Gamma \rangle\rangle F$ - играчите от $\Gamma \subseteq \Sigma$ са в положение (имат стратегия, с която) да наложат темпоралното св-во F ;

$\underline{c}$ - произволно м-во от партии; $\forall i \underline{c}$ - за м-вата $\underline{c}$ от партии, затв. отн. неразличимост по предпочитание от i ;

$G_i <_{\exists \forall, i} \underline{c}$ сред G_i -партиите има по-лоша за i от всички $\underline{c}$ -партии;

$[i] \neg \bigcirc \neg \underline{c}$ - играчите от $\{i\} \subseteq \Sigma$ не могат да избегнат $\bigcirc \neg \underline{c}$, дори ако другите играчи, от $\Gamma \setminus \{i\}$, си прилагат 'вече избраните' стратегии.

$$\langle\langle \Gamma \rangle\rangle \bigwedge_{i \in \Gamma} (\bigcirc G_i \wedge \forall i \underline{c} (G_i <_{\exists \forall, i} \underline{c} \Rightarrow [i] \bigcirc \neg \underline{c}))$$

Осмислянето на $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle$ и $[i]$ е възможно при **разклоняващо се време**.

$\bigcirc G_i$, $\bigcirc \neg \underline{c}$ - защото началното състояние е свършен факт

Разклоняващо се време в моделите на Крипке: CTL*

Разклоняващото се време е за моделиране на хипотетични развития на събитията след **предистория**.

Computation Tree Logic CTL* служи за изследване на такива хипотези:

$A ::= \perp \mid p \mid A \Rightarrow A \mid \exists B$ – формули над състояния

$B ::= \perp \mid A \mid B \Rightarrow B \mid \bigcirc B \mid (B \cup B)$ – ф. над редици (като в LTL)

$K \hat{=} \langle W, w_I, R, V \rangle$

Форми на $\models$:

$K, w \models A$ за $w \in W$ и формулите над състояния A

$K, w \models \exists A$, ако $K, \underline{v} \models A$ за някоя редица $\underline{v} \in R_K^{\text{inf}}(w)$.

$K, \underline{v} \models B$ за $\underline{v} \in R_K^{\text{inf}}(\underline{v}^0)$ и формулите над редици B е като в LTL,

но вместо за $p \in AP$, се определя и за произволни A :

$K, \underline{v} \models A$ по $\underline{v}$, ако $K, \underline{v}^0 \models A$, в началното състояние $\underline{v}^0$ на $\underline{v}$.

QCTL*: CTL* с квантор по множества от състояния

$$A ::= \perp \mid p \mid A \Rightarrow A \mid \exists A \mid \exists pA \quad B ::= \perp \mid A \mid B \Rightarrow B \mid \bigcirc B \mid (B \cup B)$$

Използваме QCTL* над $K \triangleq \langle W, w_I, R, V \rangle$, в които $\langle W, w_I, R \rangle$ е дърво с корен w_I .

Всеки модел K има съответен дървовиден $K^T \triangleq \langle W^T, w_I^T, R^T, V^T \rangle$, еквивалентен на K за CTL* (без Q).

$W^T \triangleq R_K^{\text{fin}}(w_I) \triangleq$ крайните начални R -редици (наричани и **истории**).
 $w_I^T \triangleq \dots, R^T \triangleq \dots, V^T \triangleq \dots$

K^T вместо K става съществен при определяне истинността на $\exists pB$.

$K, w \models \exists pA$, iff $(K^T)_p^X, w^T \models A$ за някое $X \subseteq W^T$,

където, $K_p^X \triangleq \langle \dots, V_p^X \rangle$, а V_p^X е V , но с p изпълнено за $w \in X$.

$\text{QCTL}_{<}^*$: QCTL^* с релация на предпочитание

$< \subseteq (R_K^{\text{inf}}(w_I))^2$ между цели (безкрайни) партии, която задава **началните** предпочитания.

Нека $K \hat{=} \langle W, w_I, R, <, V \rangle \cong K^T$, т. е. (вече) е дървовиден.

$\underline{h}_w$ - историята до $w \in W$ от w_I , която е единствена при $K^T \cong K$.

$R_K^{-, \text{inf}}(\underline{v}) \hat{=} \underline{v}^{-1} R_K^{\text{inf}}(\underline{v})$ е като $R_K^{\text{inf}}(\underline{v})$, но с 'изтрити' префиксите $\underline{v}$, защото се употребява, когато $\underline{v}$ е свършен факт.

С всяко $w \in W$ свързваме производното предпочитание

$<_{\underline{h}_w} \subseteq (R_K^{-, \text{inf}}(\underline{h}_w))^2$, което 'сравнява от $\underline{h}_w$ нататък':

$$\underline{v}' <_{\underline{h}_w} \underline{v}'' \hat{=} \underline{h}_w \cdot \underline{v}' < \underline{h}_w \cdot \underline{v}''.$$

Тази дефиниция означава, че предпочитанията **не се изменят**, но се **осъвременяват**.

Отново приемаме $K^T \cong K$.

$A ::= \perp \mid p \mid A \Rightarrow A \mid \exists A \mid \exists pA \mid B < B \quad B ::= \perp \mid A \mid B \Rightarrow B \mid \bigcirc B \mid (B \cup B)$

Формите на $\models$ са: $K, w, <_{\underline{h}_w} \models A$ и $K, \underline{w}, <_{\underline{h}_{w^0}} \models B$,

QCTL_<* има формули от вида $B_1 < B_2$, ' B_2 е по-добре от B_1 ':

$K, w, < \models B_1 < B_2$ ако $\underline{w}_1 < \underline{w}_2$ за всеки две $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in R_K^{-, \text{inf}}(w)$
т., че $K, \underline{w}_k, <_{\underline{w}_k^0} \models B_k, k = 1, 2$.

Някои алгебрични свойства на $<$ могат да се аксиоматизират:

Транзитивност: $B_1 < B_2 \wedge \exists \bigcirc B_2 \wedge B_2 < B_3 \Rightarrow B_1 < B_3$

Антирефлексивност: $B_1 < B_2 \Rightarrow \forall \bigcirc \neg(B_1 \wedge B_2)$.

Но

(1) в литературата се срещат различни релации на предпочитание и

(2) отстраняването на $<$ при нашите предположения не зависи от

тези именно свойства на предпочитанията.

Други двучленни релации на предпочитание

$$\|B\|_{K,w,\prec} \hat{=} \{\underline{w} \in R_K^{-,\text{inf}}(w) : K, \underline{w}, \prec_{\underline{w}^0} \models B\}.$$

Нека $Q_1, Q_2 \in \{\exists, \forall\}$:

$$K, w, \prec \models B_1 <_{Q_1 Q_2} B_2, \text{ ако}$$

$$(Q_1 \underline{w}_1 \in \|B_1\|_{K,w,\prec})(Q_2 \underline{w}_2 \in \|B_2\|_{K,w,\prec})(\underline{w}_1 \prec \underline{w}_2)$$

$$K, w, \prec \models B_1 >_{Q_1 Q_2} B_2, \text{ ако}$$

$$(Q_1 \underline{w}_1 \in \|B_1\|_{K,w,\prec})(Q_2 \underline{w}_2 \in \|B_2\|_{K,w,\prec})(\underline{w}_2 \prec \underline{w}_1)$$

Работим с $< = <_{\forall\forall}$, но използваме и $<_{\exists\forall}$

$$\langle\langle \Sigma \rangle\rangle \bigwedge_{i \in \Sigma} (\bigcirc G_i \wedge \forall i \underline{c} (G_i <_{\exists\forall, i} \underline{c} \Rightarrow [i] \bigcirc \neg \underline{c}))$$

$G_i <_{\exists\forall, i} \underline{c}$ означава, че съществува G_i -партия, “по-лоша” за i от всички $\underline{c}$ -партии. Избягването на такава партия е подобрението, което i не трябва да може да постигне според деф. на Неш.

Крайни наредби от ‘цели’

При дадена $\prec$, релацията на $\prec$ -неразличимост е

$$\underline{w_1} \sim_{\prec} \underline{w_2} \hat{=} \forall \underline{v} (\underline{v} \prec \underline{w_1} \leftrightarrow \underline{v} \prec \underline{w_2} \wedge \underline{w_1} \prec \underline{v} \leftrightarrow \underline{w_2} \prec \underline{v})$$

Приемаме, че $\sim_{\prec}$ е с **краен индекс**, и класовете на еквивалентност са определени в LTL:

$$R_K^{-,\text{inf}}(w_I)/\sim_{<_{w_I}} = \{ \|(B_I)_m\|_{K,w_I,<} : m = 1, \dots, |R_K^{-,\text{inf}}(w_I)/\sim_{<_{w_I}}| \},$$

където $(B_I)_m$ са ф-ли на LTL, свързани с неразличимостта отн. $<_{w_I}$.

На $(B_I)_m$ се гледа като на взаимноизключващи се “цели”.

В литературата: При дадени краен брой (независими) ‘примитивни’ $G_1, \dots, G_M$ цели, на които максималните елементарни конюнкции са класове на неразличимост, има смисъл:

Лексикографска наредба: $G_k > G_{k+1} \wedge \dots \wedge G_M$

Наредба по бр. на постигнатите цели:

$$\bigwedge_{k \in K'} G_k > \bigwedge_{k \in K''} G_k \leftrightarrow |K'| > |K''|$$

...

Отстраняването на $<$

Поради съществуването на префиксните нормални форми на B_I :

$$B_I \Leftrightarrow \bigvee_k (B_I)_k \wedge \bigcirc (B_I)'_k$$

$|R_K^{-,\text{inf}}(\underline{h})/\sim_{<\underline{h}}| \leq |R_K^{-,\text{inf}}(w_I)/\sim_{<w_I}|$ и $R_K^{-,\text{inf}}(\underline{h})/\sim_{<\underline{h}}$ също се състои
LTL-определими класове за вс. $w \in W$ и съотв. $\underline{h} \hat{=} \underline{h}_w \in R_K^{\text{fin}}(w_I)$.

С употребата на кр. система от 'цели' B_m , $m = 1, \dots, |R_K^{-,\text{inf}}(w_I)/\sim_{<}|$,

(1) $<_{Q_1 Q_2}$ са изразими чрез $< = <_{\forall \forall}$ за всички $Q_1, Q_2 \in \{\exists, \forall\}$

(2) $<$ е отстранимо във формулите на $\text{QCTL}^*_{<}$ до получаване на
формули на QCTL^* , защото $F' < F''$ може да се определи по
множеството от двойки $\langle m', m'' \rangle$ т., че $B_{m'} < B_{m''}$, $\exists \bigcirc (F' \wedge B_{m'})$ и
 $\exists \bigcirc (F'' \wedge B_{m''})$ са верни.

Съпътстващият квантор по множества от партии

Специализана употреба на променливи за множества от партии $\underline{p}$:

$K \hat{=} \langle W, w_I, R, <, V \rangle$, но с разширено V :

$$V \subseteq \underbrace{W \times AP_{state}}_{\text{както и дотук}} \cup AP_{path} \times \bigcup \{R^{-,inf}(w) : w \in W\}:$$

$K, w, \prec \models \exists \underline{p} A$, ако $K_{\underline{p}}^{\cup X}, \prec, w \models A$ за някое $X \subseteq R_K^{-,inf}(w)/\sim_{\prec}$

Т.е., $\underline{p}$ пробягва подмножества на $R_K^{-,inf}(w)$, затворени относно $\sim_{\prec}$.

За крайни $R_K^{-,inf}(w)/\sim_{\prec}$, $\cup X$ са краен брой подмножества.

Очевидно $\exists \underline{p}$ означава параметризирана дисюнкция, с $\underline{p}$ пробягващо дисюнкциите на $(B_I)_m$, когато $w = w_I$ и $\prec = <_{w_I}$.

За произволно w $\exists \underline{p}$ също означава параметризирана дисюнкция, в която $B_1, \dots, B_L$ са съответните производни цели.

Разклоняване във времето според избора на играчи:

Concurrent Game Models, aka арени

Вече въведените модели на Крипке имат вида $K \triangleq \langle W, w_I, R, V \rangle$

$\Sigma \triangleq \{1, \dots, N\}$ - м-во играчи

$M \triangleq \langle W, w_I, \langle Act_i : i \in \Sigma \rangle, o, R, V \rangle$

За $\Gamma \subseteq \Sigma$, $Act_\Gamma \triangleq \prod_{i \in \Gamma} Act_i$ - м-вото от (частичните) ходове на Γ

$o : W \times Act_\Sigma \rightarrow W$

$o(w, a)$ - състоянието след w при глобален, т.е., на всичките $i \in \Sigma$, ход $a \triangleq \langle a_1, \dots, a_N \rangle$.

С $R(w', w'') \triangleq (\exists a \in Act_\Sigma)(w'' = o(w', a))$ от CGM M получаваме съответния модел на Крипке, в който играчите са абстрахирани.

Партии и стратегии в CGMs

$$M \triangleq \langle W, w_I, \langle Act_i : i \in \Sigma \rangle, o, R, V \rangle$$

За $R(w', w'') \triangleq (\exists a \in Act_\Sigma)(w'' = o(w', a))$ R -редици са **партиите** в M .

$R_M^{\text{inf}}(\underline{v}) \triangleq$ безкр. **партии**, с начало $\underline{v}$, $R_M^{\text{inf}}(-, \underline{v}) \triangleq \dots$, $R_M^{\text{fin}}(\underline{v}) \triangleq \dots$

$s : \underline{v}^{-1} R_M^{\text{fin}}(\underline{v}) \rightarrow Act_i$ - стратегия за $i \in \Sigma$ от $\underline{v} \in R_M^{\text{fin}}(w_I)$ нататък:

$\rho \triangleq \langle s_i : i \in \Gamma \rangle$ - (частичен) набор от стратегии за $\Gamma \subseteq \Sigma$, за една и съща предистория $\underline{v}$. ρ е и **функция** с $\text{dom } \rho = \Gamma$.

Налагане (със ‘застъпване’, superimposing) на набори от стратегии:

$$\rho' \circ \rho \triangleq \rho' \cup \rho|_{\text{dom } \rho \setminus \text{dom } \rho'}$$

$\text{out}(\underline{v}, \rho) \subseteq R_M^{\text{inf}}(\underline{v})$ - безкрайните продължения на $\underline{v}$, в които играчите от $\text{dom } \rho$ прилагат набора от стратегии ρ .

$\underline{v}^{-1} \rho \triangleq \lambda \underline{v}'. \rho(\underline{v} \cdot \underline{v}')$ - като ρ , но само за “след $\underline{v}$ ”.

Alternating-time Temporal Logic със стратегически контексти

$$A ::= \perp \mid \rho \mid A \Rightarrow A \mid \langle \cdot \Gamma \cdot \rangle B \mid \cdot \rangle \Gamma \langle \cdot A$$

$$B ::= A \mid B \Rightarrow B \mid \bigcirc B \mid (B \cup B)$$

ρ - набор от стратегии.

Формите на $\models$ за видовете формули:

$$M, \underbrace{\rho}_{\text{стратегически контекст}}, w \models A$$

$$M, \rho, \underline{v} \dots \models B$$

ATL_{sc}^* : Семантика на формулите за състояния A

$$A ::= \perp \mid p \mid A \Rightarrow A \mid \langle \Gamma \cdot \rangle B \mid \cdot \Gamma \langle \cdot A$$

$$B ::= A \mid B \Rightarrow B \mid \bigcirc B \mid (B \cup B)$$

Форма на $\models$: $M, \rho, w \models A$

$$M, \rho, w \not\models \perp$$

$$M, \rho, w \models p, \quad \text{ако} \quad V(w, p)$$

$$M, \rho, w \models A_1 \Rightarrow A_2, \quad \text{ако} \quad M, \rho, w \models A_2 \text{ or } M, \rho, w \not\models A_1$$

$$M, \rho, w \models \langle \Gamma \cdot \rangle B, \quad \text{ако} \quad \text{съществува набор } \rho' \text{ за } \Gamma \text{ от } w,$$

$$\text{т., че } M, \rho' \circ \rho, \underline{w} \models B$$

$$\text{за всички } \underline{w} \in \text{out}(w, \rho' \circ \rho)$$

$$M, \rho, w \models \cdot \Gamma \langle \cdot A, \quad \text{ако} \quad M, \rho|_{\Sigma \setminus \Gamma}, w \models A \text{ т.е., "изтриване"}$$

на стратегиите за Γ от контекста

$$[\Gamma]B \hat{=} \neg \langle \Gamma \cdot \rangle B - \Gamma \text{ не може да избегне } B$$

Известното от CTL^* $\exists B \hat{=} [\emptyset]B$ - празната коалиция $\emptyset$ не може да избегне B

Исторически по-ранната ATL^* , без контексти: $\langle\langle \Gamma \rangle\rangle B \hat{=} \cdot \Sigma \langle \cdot \langle \Gamma \cdot \rangle B$

ATL_{sc}^{*}: Семантика за формулите по поведения и пример

$$A ::= \perp \mid p \mid A \Rightarrow A \mid \langle \cdot \Gamma \cdot \rangle B \mid \cdot \rangle \Gamma \langle \cdot A$$

$$B ::= A \mid B \Rightarrow B \mid \bigcirc B \mid (B \cup B)$$

Форма на $\models$: $M, \rho, \underline{v} \models B$, като в LTL, но се осъвременяват к. ρ :

$$M, \rho, w^0 w^1 \dots \models A \quad \text{ако} \quad M, \rho, w^0 \models A$$

$$M, \rho, \underline{w} \models B_1 \Rightarrow B_2 \quad \text{ако} \quad M, \rho, \underline{w} \models B_2 \text{ или } M, \rho, \underline{w} \not\models B_1$$

$$M, \rho, w^0 w^1 \dots \models \bigcirc B \quad \text{ако} \quad M, (w^0)^{-1} \rho, w^1 w^2 \dots \models B$$

$$M, \rho, w^0 w^1 \dots \models (B_1 \cup B_2) \quad \text{ако} \quad \text{за някое } n < \omega,$$
$$M, (w^0 \dots w^n)^{-1} \rho, w^n w^{n+1} \dots \models B_2 \text{ и}$$
$$M, (w^0 \dots w^k)^{-1} \rho, w^k w^{k+1} \dots \models B_1,$$
$$k = 0, \dots, n - 1.$$

Пример (технически ключово свойство за идентифицирането на равновесие по Неш): $\langle \Sigma \cdot \rangle (\bigwedge_{i \in \Sigma} \langle i \cdot \rangle G_i \Rightarrow G_i)$

ATL_{sc}^{*} е еквивалентна на подм-во на Strategy Logic (SL), в която формулите за състояния A са в предикатни означения с универсум от стратегии. **Цялата SL е неаксиоматизируема.**

ATL_{sc}^* с отделни $<_i$ и $\exists_i p$ за всеки играч i

$$M \hat{=} \langle W, w_I, \langle Act_i : i \in \Sigma \rangle, o, \langle <_i : i \in \Sigma \rangle, V \rangle$$

$$M, \rho, w, \langle <_i : i \in I \rangle \models B_1 <_i B_2 \text{ ако}$$

$$\underline{w}_1 \prec_i \underline{w}_2 \text{ за всички } \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in R^{-, \text{inf}}(w)$$

$$\text{такава, че } M, (\underline{w}_k^0)^{-1} \rho, \underline{w}_k, \langle <_{i, \underline{w}_k^0} : i \in I \rangle \models B_k, \quad k = 1, 2.$$

Отделен квантор $\exists_i$ по затворените относно неразличимост според предпочитанията на i множества от партии съпътства $<_i$ за всеки играч $i \in \Sigma$:

$$M, \rho, w, \langle <_i : i \in I \rangle \models \exists_i p A \text{ ако}$$

$$M_p^{\cup X} \rho, w, \langle <_i : i \in I \rangle \models A \text{ за някое } X \subseteq R_M^{-, \text{inf}}(w) / \sim_{\prec_i}$$

Пак към целта: дословна и изчерпателна формулировка на равновесие по Неш

$$\langle\langle \Sigma \rangle\rangle \bigwedge_{i \in \Sigma} (\bigcirc G_i \wedge \forall i \subseteq (G_i <_{\exists \forall, i} \subseteq \Rightarrow [i] \bigcirc \neg \subseteq))$$

Целите G_i са достижими за **голямата**, т.е., от всички играчи, коалиция Σ с набор от стратегии (еквилибриум) такъв, че за всяко множество $\subseteq$ от партии, всичките предпочитани от i пред някоя партия в G_i , i не може да се отклони от еквилибриума така, че да се получи партия от $\subseteq$. Т.е., i не може да си подобри изгледите избягвайки дори само някоя от най-лошите партии в G_i .

Резултати

- $<_i$ с краен индекс **е отстранимо** в ATL_{sc}^* както в $QCTL_{<}^*$; подобно в SL.
- $\exists_i \underline{p}$ **е отстранимо** за $<_i$ с краен индекс в $QCTL^*$ с този квантор и за няколко $<_i$.
- Теоретико-игровите модалности $\langle \cdot \rangle B$ и $\cdot \rangle \Gamma \langle \cdot A$ **са отстранени** с помощта на квантора по множествата от състояния на $QCTL^*$.
(Моят превод е различен от един известен в литературата и изглежда има предимства.)
- Т.е., ATL_{sc}^* с предпочитания **се свежда** (с преводи) до $QCTL^*$.

Общовалидността и истинността в крайни модели (с безкрайни дървовидни еквиваленти) е известно, че е разрешима в $QCTL^*$.

Край