

Крайни прости групи и приносите на проф. Чакърян

Веселин Дренски

1 март 2013

Дефиниция

Крайната група G е *проста*, ако няма собствени нормални делители.

Ако G е произволна крайна група, тя има редица от подгрупи

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{k-1} \triangleright G_k = \langle 1 \rangle,$$

такава, че всяка подогрупа G_{i+1} е нормална подгрупа в G_i и фактор групата G_i/G_{i+1} е проста. От тази гледна точка, крайните прости групи са градивните блокове, от които се състои всяка крайна група.

Важни стъпки в теорията на крайните прости групи

Теорията на крайните прости групи е неотделима част от общата теория на групите. Много от нейните постижения са свързани с най-важните моменти в развитието на общата теория. С малки изключения, по-долу ще отбележим само факти, които засягат чистата теория на простите групи.

- ▶ 1832 – Галоа въвежда нормалните подгрупи и намира простите групи A_n ($n \geq 5$) и $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ ($p \geq 5$);
- ▶ 1854 – Кели дефинира абстрактното понятие “група”;
- ▶ 1861 – Матьо открива първите две “спорадични” прости групи M_{11} , M_{12} и анонсира съществуването на групата M_{24} ;
1873 – той намира M_{22} , M_{23} и M_{24} ;
- ▶ 1870 – Жордан изброява някои от простите групи – алтернативните и проективните специални линейни групи и обръща внимание на важността на простите групи;

- ▶ 1892 – Хьолдер доказва, че редът на всяка неабелева крайна проста група е произведение на поне четири прости множителя и поставя въпроса за класификацията на крайните (неабелеви) прости групи;
- ▶ 1893 – Коул класифицира простите групи от ред ≤ 660 ;
- ▶ 1899 – Бърнсайд класифицира простите групи със свойството, че централизаторът на всеки елемент от ред 2 е нетривиална елементарна абелева 2-група;
- ▶ 1904 – Бърнсайд използва теория на характерите, за да докаже, че редът на всяка крайна проста група се дели на поне три прости числа;
- ▶ 1911 – Бърнсайд изказва хипотезата, че всяка крайна проста група е от четен ред.

Връзка с крайномерните комплексни прости алгебри на Ли и техните групи на Ли

Съгласно теорията на Ли, вместо да се изучават непрекъснатите групи от трансформации, е по-добре да се линеаризира проблемът и да се изучават техните алгебри на Ли.

- ▶ 1887 – Килинг класифицира крайномерните комплексни прости алгебри на Ли. Те се групират в четири безкайни серии, на които отговарят сериите от класически групи. Освен това има пет “изключителни” алгебри на Ли;
- ▶ 1894 – Картан доказва съществуването на петте изключителни алгебри;
- ▶ 1901-1905 – Диксън дефинира аналози на класическите групи над произволно крайно поле и на някои от изключителните групи на Ли.

- ▶ 1946-1947 – Динкин (тогава на 22 години) упрости класификацията на крайномерните прости алгебри на Ли и намира красива връзка с теория на графите – т.н. диаграми на Динкин;
- ▶ 1955 – Шевале намира целочислено представяне на крайномерните прости алгебри на Ли, което позволява намирането на крайни аналози на всички прости групи на Ли;
- ▶ 1959 – Щайнберг модифицира конструкцията на Шевале, за да впише в схемата и други крайни аналози на познатите класически групи, които не се получават по метода на Шевале. Всички тези групи са от “лив тип”. Той открива и нови прости групи от лив тип.

Кои са крайномерните комплексни прости алгебри на Ли?

- ▶ Серията A_n ($n \geq 1$). Това е алгебрата на Ли $sl_{n+1}(\mathbb{C})$ от матриците от ред $n + 1$ с нулева следа. Съответната група на Ли е групата от матрици $SL_{n+1}(\mathbb{C})$ с детерминанта 1. Групата $SL_{n+1}(\mathbb{F}_q)$ не е проста, защото има нетривиален център. След факторизация по центъра се получава проективната специална линейна група $PSL_{n+1}(\mathbb{F}_q)$;
- ▶ Серията B_n ($n \geq 2$). Това е алгебрата на Ли $so_{2n+1}(\mathbb{C})$ от антисиметричните матрици от нечетен ред. Условието $n \geq 2$ се налага, за да не се брои два пъти една и съща алгебра, защото $so_3(\mathbb{C}) \cong sl_2(\mathbb{C})$. Съответната група на Ли е групата от ортогонални матрици $SO_{2n+1}(\mathbb{C})$ с детерминанта 1;

- ▶ Серията C_n ($n \geq 3$). Това е алгебрата на Ли $sp_{2n}(\mathbb{C})$ от матриците T от ред $2n$, за които матрицата $T \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ е антисиметрична (E_n е единичната матрица от n -ти ред). Съответната група на Ли е симплектичната група $SP_{2n}(\mathbb{C})$. Условието $n \geq 3$ се поставя, защото $C_1 \cong A_1$ и $C_2 \cong B_2$;
- ▶ Серията D_n ($n \geq 4$). Това е алгебрата на Ли $so_{2n}(\mathbb{C})$ от антисиметричните матрици от четен ред. Условието $n \geq 4$ се налага, защото D_1 е абелева и не е интересна, $D_2 \cong A_1 \oplus A_1$ не е проста, а $D_3 \cong A_3$;
- ▶ Петте изключителни алгебри са G_2 ($\dim G_2 = 14$), F_4 ($\dim F_4 = 52$), E_6, E_7, E_8 ($\dim E_6 = 78$, $\dim E_7 = 133$, $\dim E_8 = 248$).

В горната схема не влиза унитарната група, която се получава по следния начин. Групата $SL_n(\mathbb{C})$ има автоморфизъм от ред 2, който на всяка матрица T съпоставя $(T^{-1})^t$ (транспонираната матрица на обратната на T). Полето на комплексните числа също има автоморфизъм от ред 2 – комплексното спрягане. Унитарната група се характеризира с условието, че нейните елементи са инвариантни под действието на композицията на тези два автоморфизма (т.е. $T = (\overline{T}^{-1})^t$).

Конструкцията на Щайнберг е аналогична. Например, ако $G = PSL_{n+1}(\mathbb{F}_{q^2})$ и α е автоморфизъм от ред 2 на $\mathbb{F}_{q^2}$, то аналогът на унитарната група се състои от матриците $T \in G$, за които $(\alpha(T)^{-1})^t = T$. Така се получава групата ${}^2A_n(\mathbb{F}_{q^2})$ ($n > 1$). Аналогично се получават и ортогоналните групи ${}^2D_n(\mathbb{F}_{q^2})$ ($n > 3$). По същия начин Щайнберг конструира и някои нови крайни прости групи, като ${}^3D_4(\mathbb{F}_{q^3})$ и ${}^2E_6(\mathbb{F}_{q^2})$ (последната е открита независимо от Титс).

- ▶ 1960 – Сузуки намира серията ${}^2B_2(\mathbb{F}_{2^{2n+1}})$ ($n > 1$);
- ▶ 1961 – Ри намира сериите ${}^2F_4(\mathbb{F}_{2^{2n+1}})$ ($n \geq 1$) и ${}^2G_2(\mathbb{F}_{3^{2n+1}})$ ($n \geq 1$);
- ▶ 1964 – Титс доказва, че комутаторът на ${}^2F_4(\mathbb{F}_2)$ е проста група.

Списък на сериите от крайни прости групи:

- ▶ Z_p – цикличните групи от прост ред;
- ▶ A_n – алтернативните групи;
- ▶ $A_n(q), B_n(q), C_n(q), D_n(q), E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q), G_2(q)$ – групите на Шевале;
- ▶ ${}^2A_n(q^2), {}^2D_n(q^2), {}^2E_6(q^2), {}^3D_4(q^3), {}^2B_2(2^{2n+1}), {}^2F_4(2^{2n+1}), {}^2G_2(3^{2n+1}), {}^2F_4(2)'$ – групи на Щайнберг, Сузуки, Ри, Титс.

Спорадични прости групи

Групите на Матьо M_n са неколkokратно-транзитивни подгрупи на S_n . Те са наречени “спорадични” от Бърнсайд през 1911 г.

- ▶ 1966 – Янко открива нова крайна проста група J_1 от ред $175560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$. Тя се характеризира със свойството, че е единствената крайна проста група, чийто 2-силови подгрупи са абелеви и има инволюция (елемент от ред 2), чийто централизатор е $Z_2 \times A_5$. По-късно Янко намира още три нови прости групи; J_4 е последната спорадична проста група (открита през 1976 г.);
- ▶ 1968-1976 – Намерени са още 17 прости групи (Конуей - 3, Фишер - 3, Хигман-Симс, МакЛолин, Хелд, Рудвалис, Сузуки, О'Нан, Харада-Нортън, Лионс, Титс, Томпсън, Бейби-мостърът, Монстърът).

Монстрът

Открит от Фишер-Грайс през 1973 г.. Любопитно е, че много от неговите свойства са известни преди той да е конструиран.

Групата е от ред

$$\begin{aligned} &2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \\ &= 808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710,757, \\ &\quad 005,754,368,000,000,000 \approx 8 \cdot 10^{53}. \end{aligned}$$

- ▶ 1982 – Грайс конструира Монстъра на ръка, като групата от автоморфизмите на 196884-мерна комутативна, неасоциативна алгебра.
- ▶ По-късно – реализация като група от матрици с елементи от поле с характеристика 0 и от ред 196883, както и от матрици от ред 196882 над полето с два елемента.

Класификация на крайните прости групи

Една от най-вълнуващите и романтични страници в съвременната математика, продължила повече от сто години, обхваща текст от над 15000 страници, публикувани в няколко стотин статии от над 100 автора.

Значение

Класификацията има приложения в много области на математиката, тъй като изучаването на структурата на крайните групи (и техните действия върху други математически обекти) понякога се свежда до въпроси за крайните прости групи. Благодарение на класификацията, тези въпроси се свеждат до проверка за сериите от прости групи и 26-те спорадични групи.

Някои стъпки в класификацията

- ▶ 1963 – Фейт и Томпсън доказват, че групите от нечетен ред са разрешими;
- ▶ 1983 – Горенстийн анонсира класификацията;
- ▶ 2004 – Оказва се, че в доказателството на класификацията на т.н. квазитънки групи има пропуски. Те са запълнени от Ашбахер и Смит (в статия от 1221 стр.) и Ашбахер анонсира окончателното завършване на класификацията;
- ▶ Ревизия и упростяване на доказателството – Горенстийн, Лионс, Соломон – 6 тома, около 5000 стр. (1994, 1996, 1998, 1999, 2002, 2005).

Приноси на проф. Чакърян

- ▶ (0) Ранни резултати (1974 –);
- ▶ (1) – Определяне на подгруповата структура и класификация на простите и максималните подгрупи на конкретни серии (или на части от серии) от прости групи;
- ▶ (2) – Определяне на факторизациите (представяне като произведение на собствени подгрупи) на серии от прости групи и на прости групи с ограничения на реда и на реда на силовите 2-подгрупи;
- ▶ (3) – Конструктивно доказване на $(2,3)$ - и $(2,3,7)$ -породеност на конкретни фамилии от прости групи.

Последните три направления стават особено актуални след обявяването на класификацията.

Сред много математици все още няма увереност, че доказателствата в класификацията са пълни. Поради това, в много от съвременните резултати, използващи крайни прости групи, изрично се указва дали се използва класификацията или не.

Например, решаването на ограничения проблем на Бърнсайд от Ефим Зелманов съществено се опира на класификацията.

Керопе Чакърян не използва класификацията.

Типични ранни резултати:

- ▶ (1) – Нека G е крайна проста група с максимална подгрупа $H \cong A_5$. Ако индексът $|G : H|$ се дели на ≤ 2 различни прости числа, то $G \cong A_6$ или $G \cong PSL_2(q)$, $q = 11, 16, 19, 29, 31, 59, 61$. Резултати в същия дух за класификацията на простите групи, които съдържат конкретна максимална подгрупа от малък ред;
- ▶ (2) – Нека G е крайна проста група от ред $2^a \cdot 3 \cdot 5 \cdot p^b$, p – просто. Тогава G е изоморфна на една от групите $PSL_2(q)$, $q = 5, 9, 11, 16, 31$, или на унитарната група $PSU_4(4)$. Аналогични резултати за прости групи от ред $2^a \cdot 3^b \cdot 5 \cdot p^c$, p – просто;

Подгруппова структура и прости и максималните подгрупи:

Типичен резултат: (Съвместен с Н. Петров) Простата група на Шевале-Диксън $G_2(4)$ има 8 класа спрегнати максимални подгрупи. От тях прости са $PSL_2(13)$ и групата на Хол-Янко (т.е. втората група на Янко) от ред 604800;

Факторизации:

Типичен резултат: (Съвместно с Ц. Генчев) Нека $G_2(q) = AB$, където A, B са собствени прости подгрупи на $G_2(q)$. Тогава

(i) $q = 4$, $A = HJ = J_2$ (групата на Хол-Янко), $B = PSU_3(16)$;

(ii) $q = 3^n$, $A = PSL_3(q)$, $B = PSU_3(q^2)$;

(iii) $q = 3^{2n+1} > 3$, $A = PSL_3(q)$, $B = {}^2G_2(q)$.

Всички тези случаи наистина се реализират.

(2,3)- и (2,3,7)-породеност на конкретни фамилии от прости групи

(2,3)-породеност. Модулярната група Γ е важен обект в теорията на числата, геометрията, алгебрата и много други области на съвременната математика. Тя се дефинира като групата на дробно-линейните трансформации на горната половина на комплексната равнина:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1.$$

Модулярната група е изоморфна на $PSL_2(\mathbb{Z})$ и се поражда от

$$S : z \mapsto -\frac{1}{z}, \quad T : z \mapsto z + 1.$$

Тя се представя като

$$\Gamma = \langle S, T \mid S^2 = (ST)^3 = 1 \rangle.$$

Теорема

(Либек-Шалев, 1996; Любек-Мале, 1999)

Всички крайни прости групи с изключение на групите $PSp_4(2^k)$, $PSp_4(3^n)$ и на групите на Сузуки ${}^2B_2(2^{2n+1})$ и краен брой други групи са хомоморфни образи на модулярната група $PSL_2(\mathbb{Z})$ (и следователно са $(2,3)$ -породени).

Теоремата не дава информация за конкретните пораждащи от ред 2 и 3, както и за това кои групи влизат в списъка на крайния брой изключения.

Хурвицови групи

Освен в теорията на групите, крайните прости групи се появяват по естествен начин в редица други области на математиката. Например, важно място в теорията на римановите повърхнини и хиперболичната геометрия заемат т.н. повърхнини на Хурвиц, които се характеризират с максимално висок ред на техните групи от автоморфизми. Съответните групи се пораждат от два елемента от ред 2 и 3, чието произведение е от ред 7. Известно е, че много от простите групи са хурвицови, но обикновено доказателствата не посочват конкретни системи от такива порождащи.

Типични резултати на Керопе Чакърян

Дават се конкретни пораждащи двойки от елементи от хурвицов тип за серии от прости групи. За отбелязване е, че оригиналните доказателства за $(2,3,7)$ -пораждането на групите се използва теория на характерите, а доказателствата на Чакърян използват съществено матричните реализации на групите.

Аналогични резултати за $(2,3)$ -породеност. Намират се $(2,3)$ -пораждащи и на нови прости групи, за които не е било известно, че са $(2,3)$ -породени.