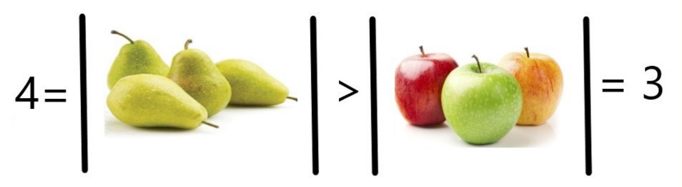
Съвместно заседание
на Общия семинар на секция
“Анализ, геометрия и топология”
и на Семинара на секция “Алгебра и логика”
9 април 2019

Градуирани алгебри, алгебрични функции, планарни дървета и елиптични интеграли

Веселин Дренски
ИМИ – БАН, София
e-mail: drensky@math.bas.bg

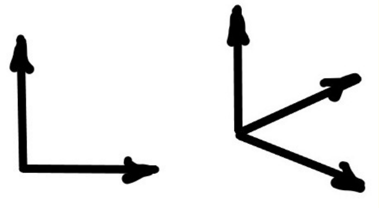
Как да мерим безкрайните обекти в алгебрата?

Когато имаме две крайни множества, естественият начин да ги сравняваме е чрез броя на елементите им.



Линейни пространства

За да мерим линейни пространства, използваме тяхната размерност:



$$2 = \dim(\mathbb{R}^2) < \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

Какво да правим с безкрайномерните линейни пространства?

Защо полиномите на три променливи са повече от полиномите на две променливи?

Първи подход

Нека K е произволно поле и $K[X_d]$ е алгебрата на полиномите на d променливи. Ще мерим алгебрата по това каква е размерността на линейното пространство на полиномите от степен $\leq n$:

$$g(K[X_d], n) = \binom{n+d}{d} = \frac{(n+d)(n+d-1)\cdots(n+1)}{d!}$$

$$= \frac{n^d}{d!} + \mathcal{O}(n^{d-1}).$$

Функцията

$$g = g_V : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

се нарича функция на ръста на алгебрата $K[X_d]$ относно пораждащото линейно пространство $V = KX_d$.

Недостатък

Функцията на ръста зависи от системата пораждащи. Алгебрата $K[X_d]$ се поражда и от едночлените от първа и втора степен, т.е. от линейното пространство $W = V + V^2$. Тогава

$$g_W(K[X_d], n) = \binom{2n+d}{d} = \frac{2^d n^d}{d!} + \mathcal{O}(n^{d-1}).$$

Какво е общото между двете пораждащи функции?

$$\lim_{n\to\infty} \log_n(g_V(K[X_d], n)) = \lim_{n\to\infty} \log_n(g_W(K[X_d], n)) = d.$$

Размерност на Гелфанд-Кирилов

Нека R е алгебра, породена от крайномерното линейно пространство V с базис $\{r_1, \ldots, r_d\}$ и нека

$$V_n = V^0 + V^1 + \cdots + V^n = \mathrm{span}\{r_{i_1} \cdots r_{i_m} \mid 0 \leq m \leq n\}.$$

Функцията на ръста на R относно V е

$$g_V(R, n) = \dim(V_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогава размерността на Гелфанд-Кирилов е горната граница (ако съществува)

$$\mathrm{GKdim}(R) = \limsup_{n \to \infty} \log_n(g_V(R, n)).$$

Свойства

- R – комутативна $\Rightarrow \mathrm{GKdim}(R)$ е цяло число, равно на степента на трансцендентност на алгебрата R (класика).
- R – асоциативна $\Rightarrow \mathrm{GKdim}(R) \in \{0,1\} \cup [2,\infty]$ и всяко от тези числа се реализира като размерност на Гелфанд-Кирилов:
  $\mathrm{GKdim}(R) \notin (1,2)$ – Bergman Gap Theorem
  $\mathrm{GKdim}(R) \in [2,\infty)$ се реализира:
  W. Borho, H. Kraft, Über die Gelfand-Kirillov Dimension, Math. Ann. 220 (1976), 1-24.

Градуирани алгебри

Алгебрата на полиномите $K[X_d]$ е градуирана, т.е. всеки полином е сума от хомогенни полиноми.
Линейното пространство W е градуирано, ако е директна сума от вида

$$W = W^{(0)} \oplus W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \cdots .$$

Когато хомогенните компоненти $W^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, са крайномерни, информацията за техните размерности се носи от формалния степенен ред

$$H(W, z) = \sum_{n \geq 0} \dim(W^{(n)}) z^n,$$

наречен ред на Хилберт (или ред на Поанкаре) на W.

Алгебрата R е градуирана, ако

$$R = R^{(0)} \oplus R^{(1)} \oplus R^{(2)} \oplus \cdots ,$$

и

$$R^{(m)} R^{(n)} \subseteq R^{(m+n)}, \quad m, n \geq 0.$$

Обикновено се предполага, че $R^{(0)} = K$ или $R^{(0)} = 0$.

Свойства на редовете на Хилберт за комутативни алгебри

Нека R е крайно породена градуирана комутативна алгебра. Тогава:

- Редът на Хилберт $H(R,z)$ е рационална функция със знаменател, който е произведение от биноми $1-z^m$ (Теорема на Хилберт-Сер).
- Ако

$$H(R,z) = p(z)\prod \frac{1}{(1-z^{m_i})^{a_i}}, \quad a_i \geq 1, \quad p(z)\in \mathbb{Q}[z],$$

  то размерността на Гелфанд-Кирилов $\mathrm{GKdim}(R)$ е равна на кратността на 1 като полюс на $H(R,z)$:

$$\text{Ако } p(1)\neq 0, \text{ то } \mathrm{GKdim}(R) = \sum a_i.$$

Редове на Хилберт на асоциативни (некомутативни) алгебри

$R = K\langle X_d\rangle$ – свободната асоциативна алгебра от ранг d (алгебрата на полиномите на d некомутиращи променливи)

$$H(K\langle X_d\rangle, z) = \frac{1}{1-dz} \text{ (рационална функция);}$$

$$g(K\langle X_d\rangle, n) = 1 + d + d^2 + \cdots + d^n = \frac{1-d^{n+1}}{1-d}$$

(функцията на ръста расте експоненциално).

Проблем

Какъв може да бъде редът на Хилберт на една крайно породена градуирана асоциативна алгебра?

Възможности:

- Рационална функция;
- Алгебрична функция (примери??)
- Трансцендентна функция (примери??)

Ръст на коефициентите

Как могат да растат коефициентите на реда на Хилберт?

- Полиномно или експоненциално;
- Могат ли да растат междинно (по-бързо от полиномно и по-бавно от експоненциално)?

Известно е, че коефициентите на алгебричните функции растат полиномно или експоненциално. Следователно, функциите с междинен ръст на коефициентите са трансцендентни.

Алгебри с междинен ръст - пример на Марта Смит

Съществува две-породена безкрайномерна градуирана алгебра на Ли L, чийто ред на Хилберт е

$$H(L,z) = z + \frac{1}{1-z}.$$

Редът на Хилберт на нейната универсална обвиваща $U(L)$ е с междинен ръст на коефициентите:

$$H(U(L),z) = \frac{1}{1-z}\prod_{n\geq 1}\frac{1}{1-z^n}.$$

M. K. Smith, Universal enveloping algebras with subexponential but not polynomially bounded growth, Proc. Amer. Math. Soc. 60(1) (1976), 22–24.

Последващи изследвания

Лихтман обобщава резултата на Марта Смит за редица други алгебри на Ли.
A. I. Lichtman, Growth in enveloping algebras, Israel J. Math. 47(4) (1984), 296–304.

Подробна скала за ръста на функциите

Петроградски развива теория на функциите с междинен ръст, които се реализират като редове на Хилберт в известните примери на алгебри с междинен ръст.
V. M. Petrogradsky, Intermediate growth in Lie algebras and their enveloping algebras, J. Algebra 179(2) (1996) 459–482.
V. M. Petrogradsky, Growth of finitely generated polynilpotent Lie algebras and groups, generalized partitions, and functions analytic in the unit circle, Internat. J. Algebra Comput. 9(2) (1999) 179–212.

Крайно представими алгебри с междинен ръст

Всяка d-породена асоциативна алгебра R е хомоморфен образ на свободната асоциативна алгебра $K\langle X_d\rangle$, т.е. съществува идеал I на $K\langle X_d\rangle$ такъв, че R е фактор алгебра на $K\langle X_d\rangle$:

$$R \cong K\langle X_d\rangle / I.$$

Алгебрата е крайно представима, ако идеалът I е крайно породен.

Алгебрите от примерите на Марта Смит, Лихтман и Петроградски не са крайно представими.

Пример на Уфнаровски

В. А. Уфнаровский, О рядах Пуанкаре градуированных алгебр, Матем. заметки 27 (1) (1980), 21–32.

Нека $W_1 = \mathrm{Der}(K[x])$ е алгебрата на Ли на операторите на диференциране на алгебрата на полиномите на една променлива над поле K с характеристика 0. Тази алгебра има базис, който е градуиран

$$\left\{\delta_{p-1} = x^p \frac{d}{dx} \mid p \geq 0\right\}, \quad \deg\left(x^p \frac{d}{dx}\right) = p - 1,$$

и умножение

$$[\delta_{p-1}, \delta_{q-1}] = \delta_{p-1}\delta_{q-1} - \delta_{q-1}\delta_{p-1} = \left[x^p \frac{d}{dx}, x^q \frac{d}{dx}\right]$$

$$= (q-p)x^{p+q-1}\frac{d}{dx} = (q-p)\delta_{p+q-2}.$$

Нека L е подалгебрата на Ли W_1, породена от δ_1 и δ_2. Тя има базис

$$\{\delta_p \mid p = 1, 2, \ldots\},$$

а диференциранията δ_p могат да се дефинират индуктивно чрез

$$\delta_{p+1} = \frac{1}{p-1}[\delta_1, \delta_p], \quad p = 2, 3, \ldots.$$

Оказва се, че в тези означения алгебрата L има определящи съотношения

$$[\delta_2, \delta_3] = \delta_5 \text{ и } [\delta_2, \delta_5] = 3\delta_7.$$

Универсалната обвиваща алгебра $U(L)$ на L е асоциативната алгебра с базис

$$\{f_1^{n_1}\cdots f_p^{n_p} \mid n_i \geq 0\},$$

породена от $f_1 = x$ и $f_2 = y$, за която

$$f_{p+1} = \frac{1}{p-1}(f_1 f_p - f_p f_1), \quad p = 2, 3, \dots .$$

Алгебрата $U(L)$ е фактор алгебра на свободната алгебра $K\langle x, y\rangle$ по модул идеала, породен от

$$(f_2 f_3 - f_3 f_2) - f_5 \text{ и } (f_2 f_5 - f_5 f_2) - 3f_7.$$

Ако приемем, че $\deg f_p = p$, то редът на Хилберт на $U(L)$ е

$$H(U(L), z) = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-z^n} = \sum_{n\geq 0} \mathcal{P}_n z^n.$$

Числото $\mathcal{P}_n$ е равно на броя на разбиванията на числото n

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad , \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = n, \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0.$$

Съгласно известната формула на Харди-Рамануджан от 1918 г. (доказана независимо от Успенски през 1920 г.)

$$\mathcal{P}_n \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right)$$

и $\mathcal{P}_n$ има междинен ръст.

G. H. Hardy, S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. Lond. Math. Soc. (2) (1918) 17, 75-115.

Я. В. Успенский, Асимптотические выражения числовых функций, встречающихся в задачах о разбиении чисел на слагаемые, Изв. Росс. Акад. Наукъ. VI сер. 14 (1920), 199–218.

Примери на алгебрични редове на Хилберт

Нека R_1 е подалгебрата на свободната асоциативна алгебра $K\langle X_2\rangle$, състояща се от полиномите $f(x_1, x_2)$, за които

$$f(x_1, x_1 + x_2) = f(x_1, x_2),$$

а R_2 е подалгебрата на R_1 от всички $f(x_1, x_2)$, за които

$$f(x_1 + x_2, x_2) = f(x_1, x_2).$$

Тогава:

$$H(R_2, z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2}.$$

G. Almkvist, W. Dicks, E. Formanek, Hilbert series of fixed free algebras and noncommutative classical invariant theory, J. Algebra 93 (1985), 189-214.

$$H(R_1, z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{z(2z - 1 + \sqrt{1 - 4z^2})}.$$

V. Drensky, C.K. Gupta, Constants of Weitzenböck derivations and invariants of unipotent transformations acting on relatively free algebras, J. Algebra 292 (2005), 393-428.

Връзка с некомутативна теория на инвариантите

Алгебрата R_2 е алгебра от инварианти: $R_2 = K\langle X_2\rangle^{SL_2(K)}$ е алгебрата на инвариантите в $K\langle X_2\rangle$ на специалната линейна група $SL_2(K)$, действаща канонично върху двумерното линейно пространство KX_2.

Алгебрата R_1 също е алгебра от инварианти: $R_1 = K\langle X_2\rangle^{UT_2(K)}$, където

$$UT_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in K \right\}.$$

Забележка

Алгебрите R_1 и R_2 не са крайно породени, но са свободни асоциативни алгебри.

D.R. Lane, Free Algebras of Rank Two and Their Automorphisms, Ph.D. Thesis, Bedford College, London, 1976.

В.К. Харченко, Об алгебрах инвариантов свободных алгебр, Алгебра и логика 17 (1978), 478-487.

Пораждащи множества на алгебрите R_1 и R_2

Алгебрата R_2 има пораждащо множество, което се строи индуктивно.

(1) Започваме с $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.

(2) Ако $w_1, \dots, w_m$ са вече построени елементи от пораждащото множество, добавяме към системата от пораждащи елемента

$$x_1 w_1 \cdots w_m x_2 - x_2 w_1 \cdots w_m x_1$$

и продължаваме нататък.

Алгебрата R_1 се поражда от системата пораждащи на R_2 и елемента x_1.

Друг тип примери

W. Borho, H. Kraft, Über die Gelfand-Kirillov Dimension, Math. Ann. 220 (1976), 1-24.
V. Drensky, Free Algebras and PI-Algebras, Springer-Verlag, Singapore, 2000, §9.4.
Нека $J \subset \mathbb{N}_0$ и нека R е алгебра, породена от x, y, с базис

$$\{x^m, x^m y x^n, x^m y x^j y x^n \mid m, n \geq 0, j \in J\}$$

и такава, че всички останали едночлени са равни на нула.

Редът на Хилберт на R е

$$H(R,z) = \frac{1}{1-z} + \frac{2z}{(1-z)^2} + \frac{z^2}{(1-z)^2}h(z), \quad h(z) = \sum_{j\in J} z^j.$$

- За подходящи избори на множеството J функцията $h(z)$ става трансцендентна, а следователно същото е вярно и за реда на Хилберт $H(R,z)$.
- За произволно реално число $\alpha \in [2,3]$ съществува множество J, за което $\mathrm{GKdim}(R) = \alpha$.

Обобщение на конструкцията

Теорема. Нека
$$f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Z}[[z]]$$
е формален степенен ред с неотрицателни цели коефициенти, за който съществува естествено число d такова, че $a_n \leq d^n$. Тогава съществува $(d+1)$-породена градуирана алгебра R, за която
$$H(R,z)=\frac{1}{1-dz}+\frac{z}{(1-dz)^2}+\frac{z^2 f(z)}{(1-z)^{dp}(1-dz)^q},$$
$p,q\geq 0$, $p+q\leq 2$.

Теорема. Ако в означенията на предишната теорема съществува естествено число d, за което $a_n \leq \binom{n+d-1}{d-1}$, то съществува $(d+1)$-породена градуирана алгебра R, за която

$$H(R,z) = \frac{1}{(1-z)^d} + \frac{z}{(1-z)^{2d}} + \frac{z^2 f(z)}{(1-z)^{dp}}, \quad 0 \leq p \leq 2.$$

Въпрос (Роберто Ла Скала)

Как да строим градуирани алгебри с ред на Хилберт, който е алгебрична функция, която не е рационална?

Отговор

Можем да приложим предишните две теореми, но имаме нужда от алгебрични степенни редове, които са с неотрицателни цели коефициенти и не са рационални функции.

Предупреждение

Условието един степенен ред да е с цели неотрицателни коефициенти и да е алгебричен е много силно.

Теорема (Фату, 1904)

Ако един степенен е с цели неотрицателни коефициенти, които са ограничени полиномно, то редът е или рационален или трансцендентен.
P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. 30 (1906), 335-400.

Considérons une série de TAYLOR à coefficients entiers; je dis qu'*elle ne peut représenter une fonction algébrique que si son rayon de convergence est plus petit que l'unité, à moins qu'elle ne soit égale à une fraction rationnelle dont tous les pôles sont des racines de l'unité.*

JFM 37.0283.01

Fatou, P.
Séries trigonométriques et séries de *Taylor*. (French)
Acta Math. 30, 335-400.

Published: **(1906)**

Eine *Taylor*sche Reihe mit ganzen Koeffizienten kann nur dann eine algebraische Funktion darstellen, wenn ihr Konvergenzradius kleiner als Eins ist, wofern sie nicht gleich einem rationalen Bruche ist, dessen Pole sämtlich Wurzeln der Einheit sind. –
Weltzien, Prof. (Zehlendorf)

Следствие

Ако R е градуирана алгебра с крайна размерност на Гелфанд-Кирилов, то нейният ред на Хилберт е или рационална или трансцендентна функция.

Теорема на Берел

Крайно породените асоциативни алгебри с полиномно тъждество (PI-алгебри) имат крайна размерност на Гелфанд-Кирилов.
A. Berele, Homogeneous polynomial identities, Israel J. Math. 42 (1982), 258-272.

Следствие

Ако R е крайно породена градуирана PI-алгебра, то нейният ред на Хилберт е или рационална или трансцендентна функция.

Проблем

Как да строим алгебрични степенни редове, които не са рационални функции и са с неотрицателни цели коефициенти?

Идея

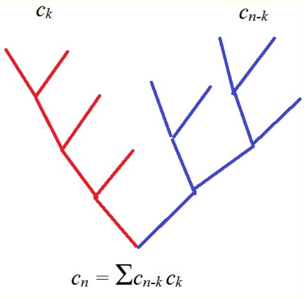
Тръгваме от редица от крайни множества от обекти A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, за която знаем (или можем да докажем), че производящата функция

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} |A_n| z^n$$

на редицата $|A_n|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, е алгебрична, но не е рационална.

Пример – числа на Каталан

n-тото число на Каталан е равно на броя на планарните бинарни дървета с корен и с n листа.



Следователно,

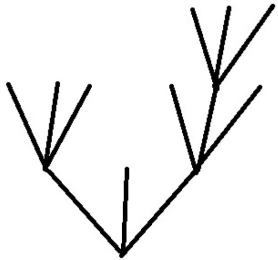
$$c(z) = \sum_{n\geq 1} c_n z^n, \quad c^2(z) = \sum_{n\geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} z^n = c(z) - z,$$

$$c^2(z) - c(z) + z = 0, \quad c(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2},$$

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Аналогичен пример – k-арни дървета, $k > 2$

Това са планарни дървета с корен, за които от всеки връх (който не е листо) излизат точно k клона.



$k = 3$

Производящата функция $f(z)$ на k-арните дървета е единственото решение на уравнението

$$f^k(z) - f(z) + z = 0,$$

за което $f(0) = 0$.

Още един пример – произволни дървета

Разгледаме дървета, за които от всеки връх (който не е листо) излизат поне два клона. Производящата функция на такива дървета удовлетворява уравнението

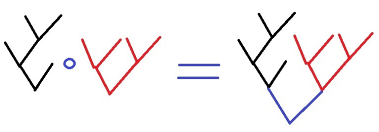
$$\frac{f^2(z)}{1-f(z)} - f(z) + z = 0,$$

$$f(z) = \frac{1+z-\sqrt{1-6z+z^2}}{4}$$

и това е пораждащата функция на супер-числата на Каталан (вж. редицата A001003 в Онлайн-енциклопендията на целочислените редици).

Превод на алгебричен език

Можем да превърнем множеството на планарните бинарни дървета в неассоциативен групоид (или неассоциативна магма):



$$\Downarrow$$

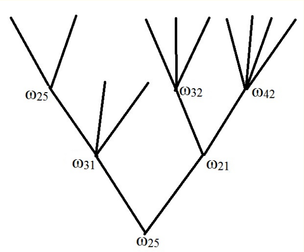
$$((x(xx))x)\circ((xx)(xx))=((x(xx))x)((xx)(xx))$$

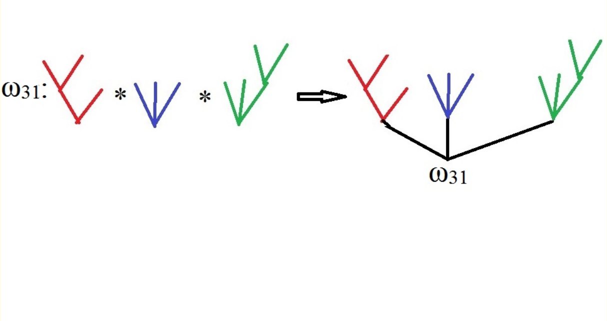
Ω-магми

За всяко $n \geq 2$ фиксираме крайно множество от n-арни операции

$$\Omega_n = \{\omega_{n1}, \dots, \omega_{np_n}\}, \quad \Omega = \bigcup_{n \geq 2} \Omega_n.$$

Както в случая на бинарни дървета, и сега можем да разглеждаме Ω-дървета, при което върховете, които не са листа, са номерирани с елементите на Ω, съобразявайки се с n-арността на операциите. След това можем да превърнем съответните множества от Ω-дървета в Ω-магма.


ω25
ω32
ω42
ω31
ω21
ω25


ω31:
*
*
ω31

Резултати на В.Д. и Чавдар Лалов, проект на Ученическия институт по математика и информатика към ИМИ

Ако $p(z) = p_2z^2 + p_3z^3 + \cdots$ е производящата функция на множеството Ω, то производящата функция на Ω-дърветата (която брои дърветата с даден брой листа) удовлетворява уравнението

$$p(f(z)) - f(z) + z = 0.$$

Следователно, ако $p(z)$ е алгебрична, при минимални ограничения за $p(z)$, функцията $f(z)$ също ще бъде алгебрична.

Теорема на Курош (1947, 1969)

Всяка подмагма на свободната Ω-магма е отново свободна.

А. Г. Курош, Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр, Матем. сб., 20(62):2 (1947), 239–262.

А. Г. Курош, Мультиоператорные кольца и алгебры, УМН, 24:1(145) (1969), 3–15; Russian Math. Surveys, 24:1 (1969), 1–13.

Теорема

Множеството на Ω-дърветата е свободна Ω-магма, а множеството от всички Ω-дървета с брой на листата, делящ се на s е подмагма. Ако $f^{(s)}(z)$ е производящата функция на това множество, то производящата функция $g^{(s)}(z)$ на свободните пораждащи удовлетворява уравнението

$$p(f^{(s)}(z)) - f^{(s)}(z) + g^{(s)}(z) = 0.$$

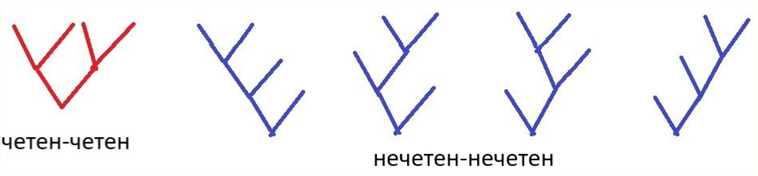
Съвместно с Чавдар Лалов, ученик в МГ "Гео Милев", Плевен, намерихме начин от алгебрична пораждаща функция $p(z)$ на множеството от операции Ω (зададена явно или чрез своето уравнение) да намерим пораждащата функция $g^{(s)}(z)$ или нейното уравнение. Отново при естествени ограничения за $p(z)$ се оказва, че $g^{(s)}(z)$ е алгебрична, но не е рационална.

Откъде тръгна проектът с Чавдар Лалов?

Планарни бинарни дървета с четен брой листа

Разглеждаме множеството E от всички планарни бинарни дървета с четен брой листа. Можем да идентифицираме E с множеството от думи от четна степен в свободната магма $M(x)$, породена от x. Има две възможности за броя на листата на двата клона на дървото $(u)(v) \in E$:

$$\text{(четен–четен)}$$
$$E_0 = \{(u)(v) \mid |u| \equiv |v| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\}$$
$$\text{(нечетен–нечетен)}$$
$$E_1 = \{(u)(v) \mid |u| \equiv |v| \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}.$$



Проблем. Разглеждаме планарните бинарни дървета с корен и с четен брой $2n$ на листата. Кои са повече – дърветата от тип (четен–четен) или от тип (нечетен–нечетен)?

Решение

Множеството E е подмагма на свободната магма $M(x)$ и следователно (по теоремата на Курош) е свободна. Нейното пораждащо множество се състои от (нечетни-нечетни) дървета. Ако $e(z)$ и $g(z)$ са пораждащите функции на E и на пораждащите на E, то пораждащата функция на E е

$$e(z) = \sum_{n \geq 1} c_{2n} z^{2n} = \frac{1}{2}(c(z) + c(-z)) = c(g(z)).$$

Разглеждаме $g(z)$ като неизвестно, решаваме уравнението и получаваме

$$g(z) = \frac{1}{4} c(4z^2), \quad g_{2n} = \frac{1}{4^{n-1}} c_n.$$

Прилагайки формулата на Стирлинг за $n!$ след известни пресмятания получаваме

$$\frac{g_{2n}}{c_{2n}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n-1}{n-1}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g_{2n}}{c_{2n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707105.$$

Следователно дърветата от тип (нечетен-нечетен) са много повече от дърветата от тип (четен-четен).
V. Drensky, R. Holtkamp, Planar trees, free nonassociative algebras, invariants, and elliptic integrals, Algebra and Discrete Mathematics (2008), No. 2, 1-41.

Елиптични интеграли

Разглеждаме абсолютно свободната неасоциативна алгебра $K\{X_2\}$ (в нея $uv \neq vu$ и $(uv)w \neq u(vw)$). Както в случая на свободната асоциативна алгебра $K\langle X_2\rangle$, който разгледахме по-горе, нека R_1 и R_2 са подалгебрите на $K\{X_2\}$, дефинирани чрез

$$R_1 = \{f(x_1,x_2) \in K\{X_2\} \mid f(x_1,x_1+x_2) = f(x_1,x_2)\},$$

$$R_2 = \{f(x_1,x_2) \in R_1 \mid f(x_1+x_2,x_2) = f(x_1,x_2)\}.$$

Забележка

Както в случая на свободната асоциативна алгебра, алгебрите R_1 и R_2 не са крайно породени.

Теорема

Редовете на Хилберт на алгебрите R_1 и R_2 са елиптични интеграли:

$$H(R_1,z)=\int_0^1 \cos^2(\pi u)\left(1-\sqrt{1-8z\cos(2\pi u)}\right)du,$$

$$H(R_2,z)=\int_0^1 \sin^2(2\pi u)\left(1-\sqrt{1-8z\sin(2\pi u)}\right)du$$

Доказателството използва некомутативен аналог на интегралната формула на Молин-Вайл за редовете на Хилберт от класическата теория на инвариантите.

V. Drensky, R. Holtkamp, Planar trees, free nonassociative algebras, invariants, and elliptic integrals, Algebra and Discrete Mathematics (2008), No. 2, 1-41.