

Отчетна сесия
на секция “Алгебра и логика”
20 декември 2019 г.

Симетрични полиноми
в свободни метабелеви алгебри на Ли

Веселин Дренски
ИМИ – БАН, София
Съвместни резултати
с Шехмус Фъндък и Назар Шахин Йогюшлю
(Şehmus Findık, Nazar Şahin Öğüşlü)

Благодарности

Този проект е частично финансиран
от Договор КП-06 Н 32/1 от 07.12.2019
“Групи и пръстени – теория и приложения”
с Националния фонд “Научни изследвания”.

Симетричните полиноми

Нека K е поле (по-нататък ще искаме да е с характеристика 0), а $K[X_n] = K[x_1, \dots, x_n]$ е алгебрата на полиномите на n променливи. Полиномът $f(x_1, \dots, x_n)$ е симетричен, ако

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

за всяка субституция σ от симетричната група S_n от степен n .

Основна теорема за симетричните полиноми

Алгебрата $K[X_n]^{S_n}$ на симетричните полиноми се поражда от елементарните симетрични полиноми

$$e_p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} x_{i_1} \cdots x_{i_p}, \quad p = 1, \dots, n,$$

които са алгебрически независими.

Симетрични полиноми на групи от променливи

Нека са дадени няколко групи от n променливи $X_n, \dots, Y_n$ и нека симетричната група S_n действа едновременно на всяка от групите. Разглеждаме алгебрата $K[X_n, \dots, Y_n]^{S_n}$ от полисиметричните полиноми $f(X_n, \dots, Y_n)$ със свойството

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \dots, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}) = f(X_1, \dots, Y_n), \sigma \in S_n.$$

Въпрос

Кои са пораждащите на алгебрата $K[X_n, \dots, Y_n]^{S_n}$? Какви са съотношенията между пораждащите?

Това са типични проблеми от класическата теория на инвариантите

Описанието на пораждащите $f_1, \dots, f_m$ на алгебрата $K[X_n, \dots, Y_n]^{S_n}$ се нарича *Първа основна теорема на алгебрата на инвариантите* $K[X_n, \dots, Y_n]^{S_n}$ на групата S_n .

Тогава описанието на ядрото на хомоморфизма

$$K[z_1, \dots, z_m] \rightarrow K[X_n, \dots, Y_n]^{S_n},$$

зададен чрез $z_i \rightarrow f_i$, $i = 1, \dots, m$, се нарича *Втора основна теорема на алгебрата на инвариантите* $K[X_n, \dots, Y_n]^{S_n}$ на групата S_n .

Пораждащи на алгебрата $K[X_n, \dots, Y_n]^{S_n}$

Алгебрата $K[X_n, \dots, Y_n]^{S_n}$ на k групи от променливи се поражда от *поляризацияите* на елементарните симетрични функции

$$e_{p_1, \dots, p_k}(X_n, \dots, Y_n) = \sum x_{i_1} \cdots x_{i_{p_1}} \cdots y_{j_1} \cdots y_{j_{p_k}},$$

$p = p_1 + \cdots + p_k \leq n$, а сумирането се води по всички p -орки $(i_1, \dots, i_{p_1}, \dots, j_1, \dots, j_{p_k})$ от две по две различни числа и такива, че $1 \leq i_1 < \cdots < i_{p_1} \leq n$, $\dots$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_{p+k} \leq n$.

Литература

- ▶ L. Schläfli, Über die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischer Gleichungen, Vienna Academy Denkschriften 4 (1852).
- ▶ P.A. MacMahon, Combinatory Analysis, Vol II, Cambridge Univ. Press, 1916. Reprinted in one volume: New York, Chelsea, 1960.
- ▶ H. Weyl, The Classical Groups, Their Invariants and Representations, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946, New Edition, 1997.

Фактът, че алгебрата на полисиметричните полиноми се поражда от полиноми от степен $\leq n$ е използван съществено от Еми Нютер в нейното доказателство, че алгебрата на инвариантите $K[X_n]^G$ на произволна крайна група G се поражда от инварианти от степен $\leq |G|$.

E. Noether, Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen, Math. Ann. 77 (1916), 89-92. Reprinted in “Gesammelte Abhandlungen. Collected Papers”, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 181-184, 1983.

Определящи съотношения

Класически изследвания:

- ▶ Fr. Junker, Die Relationen, welche zwischen den elementaren symmetrischen Functionen bestehen, Math. Ann. 38 (1891), 91-114.
- ▶ Fr. Junker, Ueber symmetrische Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen, Math. Ann. 43 (1893), 225-270.
- ▶ Fr. Junker, Die symmetrischen Functionen und die Relationen zwischen den Elementarfunctionen derselben, Math. Ann. 45 (1894), 1-84.

Съвременно изложение с окончателни резултати:

M. Domokos, Vector invariants of a class of pseudo-reflection groups and multisymmetric syzygies, J. Lie Theory 19 (2009), No. 3, 507-525.

Некомутативни обобщения

Заместваме $K[X_n]$ с друга алгебра.

Първи кандидат – свободната асоциативна алгебра $K\langle X_n \rangle$ (алгебрата на полиномите на n некомутиращи променливи).

Теорема на Маргарет Волф

Алгебрата $K\langle X_n \rangle^{S_n}$ на симетричните полиноми на некомутиращи променливи е безкрайно породена свободна асоциативна алгебра.

M.C. Wolf, Symmetric functions of non-commutative elements, Duke Math. J. 2 (1936), No. 4, 626-637.

За обзор и по-нови резултати виж:

N. Bergeron, C. Reutenauer, M. Rosas, M. Zabrocki, Invariants and coinvariants of the symmetric groups in noncommuting variables, *Canad. J. Math.* 60 (2008), No. 2, 266-296.

I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions, *Adv. Math.* 112 (1995), No. 2, 218-348.

Теория на инвариантите в $K\langle X_n \rangle$:

Теорема на Дикс-Форманек и Харченко

За крайната група G алгебрата $K\langle X_n \rangle^G$ на G -инвариантите в $K\langle X_n \rangle$ е крайно породена тогава и само тогава, когато G е циклична група, която действа върху линейното пространство KX_n с базис X_n чрез скалярно умножение.

W. Dicks, E. Formanek, Poincaré series and a problem of S. Montgomery, Lin. Multilin. Algebra 12 (1982), 21-30.

V.K. Kharchenko, Algebra of invariants of free algebras (Russian), Algebra i Logika 17 (1978), 478-487. Translation: Algebra and Logic 17 (1978), 316-321.

Теорема на Корюкин

Симетричната група S_d действа върху хомогенната компонента от степен d на $K\langle X_n \rangle$ чрез пермутиране върху на местата на променливите:

$$\left(\sum \alpha_i x_{i_1} \cdots x_{i_d} \right) \sigma = \sum \alpha_i x_{i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_{\sigma(d)}}, \quad \sigma \in S_d.$$

С това допълнително действие алгебрата $K\langle X_n \rangle^G$ е крайно породена за всяка редуктивна група G .

A.N. Koryukin, Noncommutative invariants of bialgebras (Russian), Algebra i Logika 33 (1994), No. 6, 654-680. Translation: Algebra Logic 33 (1994), No. 6, 366-380.

Теория на инвариантите за свободната алгебра на Ли: Теорема на Роджър Брайънт

За произволна нетривиална крайна подгрупа G на $GL_n(K)$ действаща върху свободната алгебра на Ли L_n , алгебрата на инвариантите L_n^G не е крайно породена.

R.M. Bryant, On the fixed points of a finite group acting on a free Lie algebra, J. London Math. Soc. (2) 43 (1991), No. 2, 215-224.

Теория на инвариантите за относително свободни асоциативни и лиеви алгебри

Нека $\mathfrak{V}$ е многообразие от асоциативни или лиеви алгебри. То се състои от всички алгебри, които удовлетворяват дадена система от полиномни тъждества. Ако $I(\mathfrak{V})$ е идеалът на всички полиномни тъждества в $\mathfrak{V}$ ($I(\mathfrak{V}) \subset K\langle X \rangle = K\langle x_1, x_2, \dots \rangle$) за асоциативни алгебри и $I(\mathfrak{V}) \subset L_\infty$ за алгебри на Ли), то

$$F_n(\mathfrak{V}) = K\langle X_n \rangle / (K\langle X_n \rangle \cup I(\mathfrak{V}))$$

е относително свободната алгебра от ранг n в $\mathfrak{V}$ в асоциативния случай. Алгебрата $F_n(\mathfrak{V})$ се дефинира аналогично за случая на алгебри на Ли.

Счита се, че по своите структурни и комбинаторни свойства асоциативните алгебри с полиномни твърдения много приличат на комутативните алгебри и на крайномерните алгебри. Но от гледна точка на теория на инвариантите има редица съществени разлики, особено когато става въпрос за крайна породеност на алгебрата $F_n(\mathfrak{A})^G$.

За приликите и разликите в теория на инвариантите в комутативния случай и в случая на относително свободни алгебри виж:

M. Domokos, V. Drensky, Rationality of Hilbert series in noncommutative invariant theory, International J. Algebra and Computations 27 (2017), No. 7, 831-848.

Многообразия на метабелевите алгебри на Ли

Многообразието на метабелевите (разрешимите от клас 2) алгебри на Ли (стандартно означение $\mathfrak{A}^2$) се определя от тъждеството $[[y_1, y_2], [y_3, y_4]] = 0$. Това многообразие играе ключова роля в теорията на многообразиата от алгебри на Ли. Съгласно теоремата на Зелманов за нилпотентността на алгебрите на Ли, удовлетворяващи тъждество на Енгел $[[y_2, y_1], \dots, y_1] = y_2(\text{adx}_1)^d = 0$, е в сила следната дихотомия. Едно многообразие от алгебри на Ли или съдържа в себе си метабелевото многообразие или се състои от нилпотентни алгебри.

E.I. Zelmanov, On Engel Lie algebras (Russian), Sibirsk. Mat. Zh. 29 (1988), No.5, 112-117. Translation: Siberian Math. J. 29 (1988), 777-781.

Теория на инвариантите за свободните метабелеви алгебри на Ли

Нека $F_n(\mathfrak{A}^2) = L_n/L_n''$, $L_n'' = [[L_n, L_n], [L_n, L_n]]$, е n -породената свободна метабелева алгебра на Ли. Както в случая на свободните алгебри на Ли, съгласно теорема на докладчика, за произволна нетривиална крайна група G алгебрата от инвариантите $F_n(\mathfrak{A}^2)^G$ не е крайно породена. Същото е вярно и за алгебрата $F_n(\mathfrak{A})^G$ за произволно многообразие $\mathfrak{A}$, съдържащо $\mathfrak{A}^2$.

V. Drensky, Fixed algebras of residually nilpotent Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), No. 4, 1021-1028.

Все пак има някаква крайна породеност

Комутаторният идеал $F'_n(\mathfrak{A}^2)$ е десен модул на полиномната алгебра $K[X_n]$ с действие дефинирано чрез

$$wf(x_1, \dots, x_n) = w f(\operatorname{ad} x_1, \dots, \operatorname{ad} x_n), w \in F'_n(\mathfrak{A}^2), f \in K[X_n].$$

Тогава, ако G е произволна крайна група, то G -инвариантите $(F'_n(\mathfrak{A}^2))^G$ в комутаторния идеал $F'_n(\mathfrak{A}^2)$ образуват крайно породен $K[X_n]^G$ -модул.

Пример (теорема на двамата ми съавтори)

Симетричните полиноми на две променливи в 2-породената свободна метабелева алгебра на Ли $F_2(\mathfrak{A}^2)$ са от вида

$$f(X_2) = \alpha(x_1 + x_2) + \sum_{0 \leq a < b} \alpha_{ab}[x_2, x_1](x_1^a x_2^b - x_2^a x_1^b), \quad \alpha, \alpha_{ab} \in K.$$

Ş. Findık, N.Ş. Öğüşlü, Palindromes in the free metabelian Lie algebras, Internat. J. Algebra Comput. 29 (2019), No. 5, 885-891.

Следствие

$K[X_2]^{S_2}$ -модулът на симетричните полиноми в $(F_2'(\mathfrak{A}^2))^{S_2}$ се поражда от

$$f_{12}(X_2) = [x_2, x_1](x_2 - x_1).$$

Симетрични полиноми на произволен брой променливи в свободната метабелева алгебра на Ли

Работим в свободния десен $K[X_n]$ -модул $U_n K[X_n]$, породен от $U_n = \{u_1, \dots, u_n\}$. Предполагаме, че S_n действа едновременно върху множествата U_n и X_n . Влагаме десния $K[X_n]$ -модул $F'_n(\mathfrak{A}^2)$ в $U_n K[X_n]$ по правилото

$$\iota : [x_i, x_j]f(X_n) \rightarrow (u_i x_j - u_j x_i)f(X_n), f \in K[X_n].$$

Това влагане отговаря на влагането на Шмелкин на свободната метабелева алгебра $F_n(\mathfrak{A}^2)$ в абелевото сплетение на абелеви алгебри на Ли.

A.L. Shmel'kin, Wreath products of Lie algebras and their application in the theory of groups (Russian), Trudy Moskov. Mat. Obshch. 29 (1973), 247-260. Translation: Trans. Moscow Math. Soc. 29 (1973), 239-252.

Известно е, че $\sum_{i=1}^n u_i f_i(X_n) \in U_n K[X_n]$ принадлежи на образа

$\iota(F'_n(\mathfrak{A}^2))$ тогава и само тогава, когато $\sum_{i=1}^n x_i f_i(X_n) = 0$.

Действието на S_n върху $F'_n(\mathfrak{A}^2)$ се съгласува с действието върху $U_n K[X_n]$ и

$$\iota((F'_n(\mathfrak{A}^2))^{S_n}) = (U_n K[X_n])^{S_n} \cap \iota(F'_n(\mathfrak{A}^2)).$$

Теорема

Нека

$$\varepsilon_p(U_n, X_n) = e_{1,p-1}(U_n, X_n) = \sum_{i=1}^n u_i x_{j_1} \cdots x_{j_{p-1}},$$

$1 \leq j_1 < \cdots < j_{p-1} \leq n$, $i \neq j_1, \dots, j_{p-1}$. Тогава $K[X_n]^{S_n}$ -модулът $\iota((F'_n(\mathfrak{A}^2))^{S_n})$ се поражда от полиномите

$$h_{pq}(U_n, X_n) = q\varepsilon_p(U_n, X_n)e_q(X_n) - p\varepsilon_q(U_n, X_n)e_p(X_n),$$

$$1 \leq p < q \leq n.$$

Пример: $n = 2$

Пораждащият на $K[X_2]^{S_2}$ -модула $\iota((F'_2(\mathfrak{A}^2))^{S_2})$ е h_{12} . Неговият прообраз в $(F'_2(\mathfrak{A}^2))$ е:

$$f_{12}(X_2) = [x_2, x_1, x_2 - x_1].$$

Пример: $n = 3$

Пораждащите на $K[X_3]^{S_3}$ -модула $\iota((F'_3(\mathfrak{A}^2))^{S_3})$ са h_{12}, h_{13}, h_{23} .
Директни сметки дават, че прообразите на тези елементи в $(F'_3(\mathfrak{A}^2))$ са:

$$f_{12}(X_3) = [x_2, x_1, x_2 - x_1] + [x_3, x_1, x_3 - x_1] + [x_3, x_2, x_3 - x_2],$$

$$f_{13}(X_3) = [x_2, x_1, x_2 - x_1, x_3] + [x_3, x_1, x_3 - x_1, x_2] + [x_3, x_2, x_3 - x_2, x_1],$$

$$f_{23}(X_3) = [x_2, x_1, x_2 - x_1, x_1 + x_2, x_3]$$

$$+ [x_3, x_1, x_3 - x_1, x_1 + x_3, x_2] + [x_3, x_2, x_3 - x_2, x_2 + x_3, x_1].$$