Семинар на секция “Алгебра и логика”
29 март 2019

Диференцирания на Вайценбьок и хипотеза на Новицки

Веселин Дренски

Ще работим над поле K с характеристика 0. Нека

$$K[Z_d] = K[z_1, \dots, z_d]$$

е алгебрата на полиномите на d променливи.

Диференцирания

Линейният оператор δ на една алгебра R е *диференциране*, ако удовлетворява правилото на Лайбниц

$$\delta(r_1 r_2) = \delta(r_1) r_2 + r_1 \delta(r_2), \quad r_1, r_2 \in R.$$

Ядрото $\ker(\delta)$ на диференцирането δ на алгебрата R се нарича *алгебра от константите на* δ и се означава с R^δ.

Диференцирането δ на R е *локално нилпотентно*, ако за всеки елемент $r \in R$ съществува естествено число $n = n(r)$ такова, че $\delta^n(r) = 0$. Тогава експонентата на δ

$$\exp(\delta) = 1 + \frac{\delta}{1!} + \frac{\delta^2}{2!} + \cdots$$

задава автоморфизъм $\exp(\delta) : R \to R$ на алгебрата R (т.е. изоморфизъм $R \to R$), който е добре дефиниран, защото $\delta^n(r) = 0$ за произволно $r \in R$ и достатъчно голямо $n > 0$, т.е. безкрайният ред се превръща в крайна сума.

Всеки линеен оператор δ на линейното пространство KZ_d се продължава до диференциране на полиномната алгебра $K[Z_d]$. Когато δ е нилпотентен линеен оператор на KZ_d, диференцирането се нарича *диференциране на Вайценбьок*.

Теорема на Вайценбьок, 1932

R. Weitzenböck, Über die Invarianten von linearen Gruppen, Acta Math. 58 (1932), 231-293.
Алгебрата на константите $K[Z_d]^\delta$ на произволно диференциране на Вайценбьок е крайно породена.

Проблеми на Хилберт

На Световния конгрес на математиците в Париж през 1900 г. Хилберт изнася доклад, в който формулира редица от проблеми, които оказват решаващо влияние върху цялата математика на XX век. (В публикувания текст на доклада D. Hilbert, Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900, Göttinger Nachrichten (1900), 253-297. Archiv der Mathematik und Physik 1 (1901), 44-63, 213-237. English translation: Mathematical Problems, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437-479. Reprinted: Bull. Amer. Math. Soc. 37 (2000), 407-436.
са включени 23 проблема, от които 10 са представени на самия доклад.)

Четиринадесети проблем на Хилберт

Нека $K(Z_d)$ е полето от рационални функции на d променливи. Нека F е подполе на $K(Z_d)$, което съдържа полето K. Вярно ли е, че алгебрата $F \cap K[Z_d]$ е крайно породена?

Четиринадесетият проблем е мотивиран от теорията на инвариантите

Нерешен проблем (към 1900 г.)

Ако G е произволна подгрупа на $GL_d(K)$, вярно ли е, че алгебрата на инвариантите $K[Z_d]^G$ е крайно породена? С други думи, съществуват ли краен брой G-инварианти $f_1(Z_d),\dots,f_m(Z_d)$ такива, че всеки G-инвариант се изразява чрез тях с помощта на операциите събиране, умножение на полиноми и умножение с константи от полето K?

Това е един от основните проблеми на теорията на инвариантите през XIX век, който за конкретни класове от групи не е загубил своето значение и днес.

Крайна породеност на алгебрите на инвариантите за класове от групи

Гордан доказва през 1868 г., че алгебрата на инвариантите на подгрупа G на $GL_d(K)$, изоморфна на групата $SL_2(K)$ на матриците от втори ред с детерминанта единица, е крайно породена.
P. Gordan, Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist, J. Reine Angew. Math. 69 (1868), 323-354.

През 1890 г. Хилберт обобщава този резултат за подгрупи, изоморфни на класическите групи $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, ортогоналната група $O_n(K)$ и симплектичната група $Sp_n(K)$. D. Hilbert, Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann. 36 (1890), 473-534.
В действителност, методите на Хилберт работят за всички т.н. редуктивни групи.

Както е известно, много от неконструктивните доказателства на Хилберт са приети скептично от съвременниците му. Известно е, че Гордан (наричан "царят на теорията на инвариантите"), казва по повод едно от доказателствата на Хилберт
"Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie." (Това не е математика, това е теология.)

През 1916 г. Еми Ньотер доказва крайната породеност на алгебрите на инвариантите на крайните групи.
E. Noether, Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen, Math. Ann. 77 (1916), 89-92; reprinted in “Gesammelte Abhandlungen. Collected Papers”, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1983, 181-184.

Доказателството е достъпно за студенти с познания от стандартния курс по алгебра.
https://store.fmi.uni-sofia.bg/fmi/algebra/drensky/Emmy_Noether.pdf

Забележка

(1) В своята статия Вайценбьок дава доказателство на теоремата (за която днес знаем, че не е вярна), че алгебрата на инвариантите $K[Z_d]^G$ на произволна линейна група G е крайно породена. Грешката в доказателството на Вайценбьок е открита от Херман Вайл. Това, което е вярно в статията, е доказателството за крайната породеност на диференциранията на Вайценбьок.

(2) Теоремата на Вайценбьок е еквивалентна на теорема от класическата теория на инвариантите. Алгебрата на константите $K[Z_d]^\delta$ съвпада с алгебрата на инвариантите за подходящо действие на адитивната група $(K,+)$. Теоремата има няколко съвременни доказателства, почиващи на теория на инвариантите.

Въпреки, че алгебрата на константите на едно диференциране на Вайценбьок съвпада с алгебрата на инвариантите на адитивната група на основното поле, много често теорията на диференцирiranията на Вайценбьок се е развивала паралелно, а много резултати са получени без използването на класическата теория на инвариантите.

Работата с диффренцирането на Вайценбьок вместо със съответната линейна група линеаризира проблема за изучене на алгебрите на инвариантите и я прави по-лека, включително от изчислителна гледна точка. Тази идея стана особено популярна с развитието на изчислителната техника и разработката на нови методи за пресмятания с абстрактни алгебраични обекти.

Отговорът на 14-ти проблем на Хилберт е отрицателен и той е даден през 1958 г. от японския математик Нагата. Единият от контрапримерите на Нагата, представен на Международния конгрес на математиците през 1958 г., дава отрицателен отговор и на проблема за крайната породеност на алгебрата на инвариантите.

M. Nagata, On the 14-th problem of Hilbert, Amer. J. Math. 81 (1959), 766-772.

M. Nagata, On the fourteenth problem of Hilbert, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960, 459-462.

Теорема на Нагата

Съществува действие на групата $G = (K, +)^{13}$, която е директна сума на 13 копия на адитивната група $(K, +)$ на полето K върху алгебрата $K[Z_{32}]$ на полиномите на 32 променливи, при което алгебрата $K[Z_{32}]^G$ на инвариантите на G не е крайно породена.

Преформулиране на теоремата на Нагата

Теорема

Съществуват 13 диференцирания на Вайценбьок $\delta_1, \dots, \delta_{13}$ на алгебрата $K[Z_{32}]$ на полиномите на 32 променливи такива, че сечението на алгебрите от константи $\bigcap_{i=1}^{13} K[Z_{32}]^{\delta_i}$ не е крайно породена алгебра.

Диференцирането на Вайценбьок δ действа като линеен оператор върху линейното пространство KZ_d. С точност до смяна на базиса δ се определя от своята жорданова матрица

$$J(\delta) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix},$$

която се състои от жорданови клетки с нулев диагонал

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Следователно, за всяка размерност d има само краен брой съществено различни диференцирания на Вайценбьок.

Хипотеза на Новицки

Нека всички жорданови клетки на диференцирането на Вайценбьок δ на полиномната алгебра $K[Z_{2d}]$ са от втори ред. По-удобно е да работим в $K[X_d, Y_d]$ и да дефинираме δ чрез

$$\delta(x_i) = 0, \quad \delta(y_i) = x_i, \quad i = 1, \ldots, d.$$

През 1994 г. Новицки изказва следната хипотеза.
A. Nowicki, Polynomial Derivations and Their Rings of Constants, Uniwersytet Mikolaja Kopernika, Torun, 1994.
http://www-users.mat.uni.torun.pl/∼anow/polder.html.

Алгебрата $K[X_d, Y_d]^\delta$ се поражда от X_d и от детерминантите

$$u_{jk} = \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{vmatrix} = x_j y_k - x_k y_j, \quad 1 \leq j < k \leq d.$$

Девет доказателства

(1) Дисертация на **Хури** (с базиси на Грьобнер)
J. Khoury, Locally Nilpotent Derivations and Their Rings of Constants, Ph.D. Thesis, Univ. Ottawa, 2004.
J. Khoury, A Groebner basis approach to solve a conjecture of Nowicki, J. Symbolic Comput. 43 (2008), 908-922.
(2, 3) Непубликувани доказателства на **Дерксен** и **Панюшев** (теория на инвариантите).
(4) **Бедратюк** (теория на инвариантите)
L. Bedratyuk, A note about the Nowicki conjecture on Weitzenböck derivations, Serdica Math. J. 35 (2009), 311-316.

(5) **Курода** (комутативна алгебра)
S. Kuroda, A simple proof of Nowicki's conjecture on the kernel of an elementary derivation, Tokyo J. Math. 32 (2009), 247-251.
(6) **Дренски и Макар-Лиманов** (елементарно доказателство като за студенти)
Дава се базис на Грьобнер на идеала от определящите съотношения между пораждащите на алгебрата $K[X_d, Y_d]^\delta$ и базис на $K[X_d, Y_d]^\delta$ като линейно пространство.
V. Drensky, L. Makar-Limanov, The Conjecture of Nowicki on Weitzenböck derivations of polynomial algebras, J. Algebra and Its Applications 8 (2009), No. 1, 41-51.

Еквивалентни резултати в теория на инвариантите:

(7) **Гото, Хаясака, Курано, Накамура**

S. Goto, F. Hayasaka, K. Kurano and Y. Nakamura, Rees algebra of the second syzygy module of the residue field of a regular local ring, Contemp. Math. 390 (2005), 97-108.

(8) **Миязаки**

M. Miyazaki, Invariants of the unipotent radical of a Borel subgroup, Proceedings of the 29th Symposium on Commutative Algebra in Japan, Nagoya, Japan, November 19-22, 2007, 43-50.

(9) Още едно доказателство: **Дренски** (представяния на пълната линейна група)

V. Drensky, Another proof of the Nowicki conjecture, arXiv:1902.08758 [math.AC].

Обобщения

Превеждайки резултатите от теория на инвариантите на $SL_2(K)$ на езика на диференциранията на Вайценбьок, Бедратюк (в своята статия за хипотезата на Новицки) намира и система пораждащи за алгебрата на константите $K[X_d, Y_d, Z_d]^{\delta}$, когато всички жорданови клетки на δ са от трети ред.

Теорема

Нека δ е диференциране на Вайценбьок на $K[X_d, Y_d, Z_d]$, където

$$\delta(x_j) = 0, \delta(y_j) = x_j, \delta(z_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, d.$$

Тогава алгебрата $K[X_d, Y_d, Z_d]^\delta$ на константите на δ се поражда от полиномите X_d,

$$\begin{vmatrix} x_k & x_l \\ y_k & y_l \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k < l \leq d,$$

$$x_k z_l - y_k y_l + z_k x_l, \quad 1 \leq k < l \leq d,$$

$$\begin{vmatrix} x_p & x_q & x_r \\ y_p & y_q & y_r \\ z_p & z_q & z_r \end{vmatrix}, \quad 1 \leq p < q < r \leq d.$$

Елементарни диференцирания

Нека A е област (комутативен пръстен с единица без делители на нулата), съдържаща полето K. Диференцирането δ на A-алгебрата $A[Y_d]$ е *елементарно*, ако

$$\delta(A) = 0, \quad \delta(Y_d) \subset A.$$

Очевидно, диференциранията от хипотезата на Новицки са елементарни.

Теорема от дисертацията на Хури

Нека $A = K[X_d]$ и n_i, $i = 1, \dots, d$, са естествени числа. Тогава алгебрата на константите на елементарното диференциране δ, дефинирано чрез

$$\delta(y_i) = x_i^{n_i}, \quad i = 1, \dots, d,$$

се поражда от детерминантите

$$u_{jk} = \begin{vmatrix} x_j^{n_j} & x_k^{n_k} \\ y_j & y_k \end{vmatrix}, \quad 1 \leq j < k \leq d.$$

Теорема от статията на Курода

Нека елементарното диференциране δ удовлетворява условията:
(1) Елементите $\delta(y_i) \in A$, $i = 1, \dots, d$, са алгебрически независими над полето K.
(2) Алгебрата A е плосък $K[\delta(y_1), \dots, \delta(y_d)]$-модул.
Тогава A-алгебрата $A[Y_d]^\delta$ се поражда от детерминантите

$$u_{jk} = \begin{vmatrix} \delta(y_j) & \delta(y_k) \\ y_j & y_k \end{vmatrix}, \quad 1 \leq j < k \leq d.$$

Обобщена хипотеза на Новицки

(Дренски, Следствие от теоремата на Курода)
V. Drensky, Generalized Nowicki conjecture, arXiv:1903.01788v1 [math.AC].
Нека $f_1(x_1), \dots, f_d(x_d)$ са неконстантни полиноми на една променлива. Тогава алгебрата от константите на диференцирането δ на алгебрата $K[X_d, Y_d]$

$$\delta(X_d) = 0, \quad \delta(y_i) = f_i(x_i), \quad i = 1, \dots, d,$$

се поражда от X_d и детерминантите

$$u_{jk} = \begin{vmatrix} f_j(x_j) & f_k(x_k) \\ y_j & y_k \end{vmatrix}, \quad 1 \leq j < k \leq d.$$

Определящи съотношения на $K[X_d, Y_d]^\delta$

(Тук и на следващия слайд – обобщение на резултат в статията на Дренски и Макар-Лиманов за хипотезата на Новицки)
Нека $U_d = \{u_{jk} \mid 1 \leq j < k \leq d\}$. Алгебрата $K[X_d, Y_d]^\delta$ има представяне

$$K[X_d, Y_d]^\delta \cong K[X_d, U_d \mid R = 0, S = 0],$$

$$R = \{r(i,j,k,l) = u_{ij}u_{kl} - u_{ik}u_{jl} + u_{il}u_{jk} \mid 1 \leq i < j < k < l \leq d\},$$

$$S = \{s(i,j,k) = f_i(x_i)u_{jk} - f_j(x_j)u_{ik} + f_k(x_k)u_{ij} \mid 1 \leq i < j < k \leq d\}.$$

Теорема

Определящите съотношения R и S образуват базис на Грьобнер относно подходяща допустима наредба на едночлените в $K[X_d, U_d]$.

Следствие

Като линейно пространство $K[X_d, Y_d]^\delta$ има базис

$$\prod_{i=1}^{d} x_i^{a_i} \prod_{1\leq j<k\leq d} u_{jk}^{b_{jk}}, \quad a_i, b_{jk} \geq 0.$$

Ако $b_{jk} > 0$, то $a_i < \deg f_i(x_i)$ за всички i в отворения интервал (j, k);
Ако $b_{jk}, b_{lm} > 0$, то отворените интервали (j, k) и (l, m) не се пресичат или се съдържат един в друг.

Естествена хипотеза

Нека δ е елементарно диференциране на $A[Y_d]$. Тогава A-алгебрата $A[Y_d]^\delta$ от константите на δ се поражда от детерминантите

$$u_{jk} = \begin{vmatrix} \delta(y_j) & \delta(y_k) \\ y_j & y_k \end{vmatrix} \quad 1 \leq j < k \leq d.$$

Контрапример – Хури

J. Khoury, A note on elementary derivations, Serdica Math. J. 30 (2004), No. 4, 549-570.
Алгебрата от константите на елементарното диференциране δ на $A[Y_4]$, $A = K[X_3]$, за което

$$\delta(y_1) = x_1^2, \delta(y_2) = x_2^2, \delta(y_3) = x_3^2, \delta(y_4) = x_2x_3$$

е крайно породена, но не се поражда от изрази, които са линейни по Y_4.

Контрапримери към 14-ти проблем на Хилберт

През 1990 г. Робъртс построява контрапример към 14-тия проблем на Хилберт, който почива на нов принцип.

P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, J. Algebra 132 (1990), 461-473.

Малко по-късно се оказва, контрапримерът на Робъртс представлява алгебрата на константите $K[Z_7]^\delta$ на нелинейно локално нилпотентно диференциране δ на $K[Z_7]$, която не е крайно породена.

A. A'Campo-Neuen, Note on a counterexample to Hilbert's fourteenth problem given by P. Roberts, Indag. Math., New Ser. 5 (1994), 253-257.

J.K. Deveney, D.R. Finston, G_a actions on $\mathbb{C}^3$ and $\mathbb{C}^7$, Commun. Algebra 22 (1994), 6295-6302.

Превод на езика на диференциранията

Нека $A = K[X_3]$, $m \geq 2$, и δ е елементарното диференциране на $A[Y_4]$

$$\delta(y_1) = x_1^{m+1}, \delta(y_2) = x_2^{m+1}, \delta(y_3) = x_3^{m+1}, \delta(y_4) = (x_1 x_2 x_3)^m.$$

Тогава алгебрата $A[Y_4]^\delta$ не е крайно породена.

Впоследствие идеята на Робъртс е доразвита в няколко статии. Най-малката размерност, за която са известни контрапримери от този тип е 5.
D. Daigle, G. Freudenburg, A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension 5, J. Algebra 221 (1999), 528-535.

Теорема

Алгебрата на константите $K[Z_5]^{\delta}$ на локално нилпотентното диференциране

$$\delta = z_1^2\frac{\partial}{\partial z_3} + (z_1z_3 + z_2)\frac{\partial}{\partial z_4} + z_4\frac{\partial}{\partial z_5}$$

не е крайно породена.

Теорема на Зариски, 1954

Четиринадесетият проблем на Хилберт има положително решение за полиномите на две променливи.
O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math., II. Sér. 78 (1954), 155-168.

Следствие

Ако δ е локално нилпотентно диференциране на алгебрата $K[Z_3]$ на полиномите на три променливи, то алгебрата $K[Z_3]^\delta$ е крайно породена.

Подобрения на резултата на Нагата

Има много опити за подобряване на резултата на Нагата (на езика на диференцирания) в две посоки – намаляване на броя на променливите и на броя на диференциранията. Към момента рекордите се държат от Фройденбург (2007 г.) и Мукаи (2004 г.).

Теорема

(Фройденбург) Съществува подгрупа G на групата от горнотриъгълни матрици от единадесети ред с единици на диагонала такава, че алгебрата на инвариантите $K[Z_{11}]^G$ не е крайно породена.
G. Freudenburg, A linear counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension eleven, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 51-57.
(Мукаи) Съществуват 3 диференцирания на Вайценбьок $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ на алгебрата $K[Z_{18}]$ такива, че сечението на алгебрите от константи $K[Z_{18}]^{\delta_1} \cap K[Z_{18}]^{\delta_2} \cap K[Z_{18}]^{\delta_3}$ не е крайно породено.
S. Mukai, Geometric realization of T-shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, Algebraic Transformation Groups and Algebraic Varieties, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Encyclopaedia Math. Sci.132, 123-129.

Проблеми

(1) Кое е най-малкото d, за което съществува подгрупа G на $GL_d(K)$ такава, че алгебрата $K[Z_d]^G$ не е крайно породена?
(2) Съществуват ли две диференцирания на Вайценбьок δ_1, δ_2 на алгебрата $K[Z_d]$ такива, че сечението на алгебрите от константи $K[Z_d]^{\delta_1} \cap K[Z_d]^{\delta_2}$ не е крайно породена?
(3) Има ли безкрайно породена алгебра на константите $K[Z_4]^\delta$ на локално нилпотентно диференциране δ на алгебрата $K[Z_4]$ на полиномите на четири променливи?

Теорема на Курода, 2005

S. Kuroda, A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three, Mich. Math. J. 53 (2005), 123-132.
Нека β_{ij}, $i, j = 1, 2$, и γ са естествени числа, за които

$$\frac{\beta_{11}}{\beta_{11}+\beta_{21}}+\frac{\beta_{22}}{\beta_{22}+\beta_{12}}<\frac{1}{2}.$$

Нека $K(f_1, f_2, f_3)$ е подполето на $K(Z_3)$, породено от рационалните функции

$$f_1 = z_1^{\beta_{21}} z_2^{-\beta_{22}} - z_1^{\beta_{11}} z_2^{-\beta_{12}},$$

$$f_2 = z_3^{\gamma} - z_1^{-\beta_{11}} z_2^{\beta_{12}},$$

$$f_3 = 2z_1^{\beta_{21}-\beta_{11}} z_2^{\beta_{12}-\beta_{22}} - z_1^{-2\beta_{11}} z_2^{2\beta_{12}}.$$

Тогава алгебрата $K(f_1, f_2, f_3) \cap K[Z_3]$ не е крайно породена.

Следствие

14-ти проблем на Хилберт има отрицателно решение за всички $d \geq 3$.

Доказателство

Тъй като $K(f_1, f_2, f_3) \cap K[Z_d] = K(f_1, f_2, f_3) \cap K[Z_3]$ за $d \geq 3$, алгебрата $K(f_1, f_2, f_3) \cap K[Z_d]$ не е крайно породена за всяко $d \geq 3$.

Обзори по тематиката

G. Freudenburg, A survey of counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, Serdica Math. J. 27 (2001), 171-192. http://www.math.bas.bg/serdica/2001/2001-171-192.pdf.

A. Nowicki, The fourteenth problem of Hilbert for polynomial derivations, Banach Cent. Publ. 58 (2002), 177-188.

В. Дренски, Диференцирания в полиномни алгебри, Математика и математическо образование, 2013, Math. and Education in Math., Proc. of the 42-th Spring Conf. of the Union of Bulgar. Mathematicians, Borovets, April 2-6, 2013, 80-91. http://www.math.bas.bg/smb/2013_PK/tom_2013/pdf/080-091.pdf