

Числата Harshad

Първа тема за 6. и 7. клас

През 1955 година индийският математик Капрекар публикува статия за числата, които се делят на сбора от своите цифри. Възхитен от свойствата им, Капрекар нарича тези числа Harshad, което в превод от санскритски означава "огромна радост". По-малките от 100 Harshad-числа са:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30,
36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90.

Числото 48, например, е 4 пъти по-голямо от сбора от цифрите си, а числото 21 е 7 пъти по-голямо от сбора от цифрите си. Ще наричаме числата, които са k пъти по-големи от сбора на цифрите си, k -кратни. Например, $84 = 7 \cdot (8+4)$ е 7-кратно число.

Изследването на k -кратните числа започваме с признака за делимост на 9, тъй като той е пряко свързан със сбора от цифрите на числата. Според този признак, едно число се дели на 9 когато сборът от цифрите му се дели на 9. Нещо повече, *остатъкът при деление на едно число на 9 е равен на остатъка при деление на сбора от цифрите на това число на 9.*

Ще докажем това свойство за четирицифрени числа. Тъй като две числа дават равни остатъци при деление на 9 когато тяхната разлика се дели на 9, достатъчно е да докажем, че разликата на четирицифреното число $\overline{abcd}$ и сбора от цифрите му $a + b + c + d$ се дели на 9. Разликата е равна на:

$$\begin{aligned}\overline{abcd} - (a + b + c + d) &= 1000.a + 100.b + 10.c + d - (a + b + c + d) \\ &= 999.a + 99.b + 9.c\end{aligned}$$

и очевидно се дели на 9. По същия начин се доказва това свойство и за числа с произволен брой цифри.

Задача 1. (5 точки) Докажете, че ако n е k -кратно число и $k - 1$ не се дели на 3, то n се дели на 9. Какво може да се твърди за n , ако $k - 1$ се дели на 3 и не се дели на 9?

Решение: Нека числото n със сбор от цифрите си $S(n)$, е k -кратно. Записваме равенството $n = k \cdot S(n)$ във вида

$$(1) \quad n - S(n) = (k - 1) \cdot S(n).$$

Разликата $n - S(n)$ се дели на 9 за всяко n . Ако $k - 1$ не се дели на 3, от (1) следва, че $S(n)$ се дели на 9, а следователно и n се дели на 9.

Ако $k - 1$ се дели на 3, но не се дели на 9, от (1) следва, че $S(n)$ се дели на 3, следователно и n се дели на 3.

Задача 2. (10 точки) Числото 912 е k -кратно, завършва на 12 и сборът от цифрите му е 12.

а) Кое е най-малкото k -кратно число със сбор на цифрите 13, завършващо на 13?

б) Има ли k -кратно число със сбор на цифрите 11, завършващо на 11?

Решение: а) Нека търсеното число е $\overline{A13}$. Тъй като сборът от цифрите на $\overline{A13}$ е 13, то сборът от цифрите на A е 9. Тогава A се дели на 9.

Тъй като търсим k -кратно число, то $\overline{A13} = k.13$. Оттук получаваме $A.100 + 13 = k.13$, т.е. $A.100 = 13.(k - 1)$. Следователно A се дели на 13.

Най-малкото число A , кратно на 9 и 13, е $9.13 = 117$. Числото 11713 е 901-кратно и удовлетворява условието на задачата.

б) Тъй като търсеното число е k -кратно, то се дели на сбора от цифрите си, т.е. на 11. Едно число се дели на 11, когато сборът от цифрите на четни позиции се различава от сбора от цифрите на нечетни позиции с кратно на 11 число. Тъй като сборът от всички цифри на числото е 11, то или сборът от цифрите на четни позиции е 11, а сборът от цифрите на нечетни позиции е 0, или обратно. Но тъй като числото завършва на 11, нито един от тези сборове не може да е 0. Противоречие.

Разглеждайки редицата на Harshad-числата до 100, забелязваме, че числата от вида $9.k$ при $k \leq 10$ са k -кратни. Например, числото $2.9=18$ е 2-кратно, $3.9=27$ е 3-кратно и т.н. Това не е случайно. От признака за делимост на 9 следва, че сборът от цифрите на $9.k$ се дели на 9. Но при $k \leq 10$ числото $9.k$ не надхвърля 90 и следователно сборът от цифрите му е най-много 17. Така получаваме, че сборът от цифрите на $9.k$ при $k \leq 10$ е точно 9, което означава, че числото $9.k$ е k -кратно.

Забележка. Числата от вида $9.k$ не са единствените k -кратни числа за всяко $k \leq 10$. Например, освен $9.7=63$ има още три 7-кратни числа:

21, 42 и 84.

Задача 3. (35 точки) Намерете всички k -кратни числа при k равно на:

а) 11; б) 12; в) 13; г) 14; д) 15; е) 16; ж) 19.

Решение: а) Нека трицифреното¹ число $\overline{abc}$ е 11-кратно. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{abc} &= 11.(a + b + c), \quad \text{оттук} \quad 100.a + 10.b + c = 11.a + 11.b + 11.c, \\ &\text{следователно} \quad 89.a = b + 10.c \quad \text{и получаваме} \quad 89.a = \overline{cb}.\end{aligned}$$

Тъй като $\overline{cb} \leq 99$, то цифрата a може да бъде само 1 и тогава $\overline{cb} = 89$, т.е. $c = 8$ и $b = 9$. Търсеното число е 198.

б) Ще използваме резултата от задача 1. Тъй като $12 - 1 = 11$ не се дели на 3, то търсеното число се дели на 9. Това означава, че сборът от цифрите му се дели на 9 и тъй като това число е трицифрено, този сбор е 9, 18 или 27. Остава да проверим кои от числата $9.12 = 108$, $18.12 = 216$ и $27.12 = 327$ са 12-кратни. Отговорът е 108.

Почти всяка от задачите за намиране на k -кратни числа при дадено k може да се реши както с диофантово уравнение (така направихме в а)), така и с подхода, скициран в б)).

в) Нека трицифреното число $\overline{abc}$ е 13-кратно. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{abc} &= 13.(a + b + c), \quad \text{оттук} \quad 100.a + 10.b + c = 13.a + 13.b + 13.c, \\ &\text{следователно} \quad 87.a = 3.b + 12.c \quad \text{и получаваме} \quad 29.a = b + 4.c.\end{aligned}$$

Тъй като $b + 4.c \leq 9 + 4.9 = 45$, то $a = 1$ и тогава

$$29 = b + 4.c.$$

Събираемостта b не надхвърля 9, следователно $4.c$ е поне $29 - 9 = 20$, т.е. $c \geq 5$. От друга страна, $4.c \leq 29$, следователно $c \leq 7$. При $c = 5$ получаваме $b = 9$; при $c = 6$ получаваме $b = 5$, при $c = 7$ получаваме $b = 1$. Търсените числа са 117, 156 и 195.

г) Нека трицифреното число $\overline{abc}$ е 14-кратно. Имаме

¹От задача 6 следва, че всички търсени в задачата числа са трицифрени.

$$\overline{abc} = 14.(a + b + c), \quad \text{оттук} \quad 100.a + 10.b + c = 14.a + 14.b + 14.c,$$

$$\text{следователно} \quad 86.a = 4.b + 13.c.$$

Тъй като $4.b + 13.c \leq 4.9 + 13.9 = 153$, то $a = 1$ и тогава

$$86 = 4.b + 13.c.$$

Оттук следва, че c се дели на 2, но не се дели на 4, т.е. $c = 2$ или 6. Тъй като събираемото $4.b$ не надхвърля $4.9 = 36$, то $13.c$ е поне $86 - 36 = 50$, т.е. $c \geq 4$. Следователно $c = 6$ и получаваме $b = 2$. Търсеното число е 126.

д) Нека трицифреното число $\overline{abc}$ е 15-кратно. Имаме

$$\overline{abc} = 15.(a + b + c), \quad \text{оттук} \quad 100.a + 10.b + c = 15.a + 15.b + 15.c,$$

$$\text{следователно} \quad 85.a = 5.b + 14.c.$$

От последното равенство следва, че c се дели на 5, следователно цифрата c е 0 или 5. При $c = 0$ получаваме $85.a = 5.b$, което е невъзможно. При $c = 5$ имаме $85.a = 5.b + 70$, или

$$17.a = b + 14.$$

Тъй като $b + 14$ не надхвърля $9 + 14 = 23$, то $a = 1$ и тогава $b = 3$. Търсеното число е 135.

е) Нека трицифреното число $\overline{abc}$ е 16-кратно. Имаме

$$\overline{abc} = 16.(a + b + c), \quad \text{оттук} \quad 100.a + 10.b + c = 16.a + 16.b + 16.c,$$

$$\text{следователно} \quad 84.a = 6.b + 15.c \quad \text{и получаваме} \quad 28.a = 2.b + 5.c.$$

От последното равенство следва, че c е четна цифра. Тъй като $2.b + 5.c$ не надхвърля $2.9 + 5.9 = 63$, то цифрата a е 1 или 2.

При $a = 1$ получаваме

$$28 = 2.b + 5.c.$$

Събираемото $2.b$ не надхвърля $2.9 = 18$, следователно $5.c$ е поне $28 - 18 = 10$, т.е. $c \geq 2$. От друга страна, $5.c \leq 28$, следователно

$c \leq 5$. Следователно $c = 2$ или 4 . При $c = 2$ имаме $b = 9$, при $c = 4$ имаме $b = 4$.

При $a = 2$ получаваме

$$56 = 2.b + 5.c.$$

Събираемостта $2.b$ не надхвърля $2.9 = 18$, следователно $5.c$ е поне $56 - 18 = 38$, т.е. $c \geq 8$. Следователно $c = 8$ и оттук $b = 8$.

Търсените числа са 144, 192 и 288.

ж) Нека трицифреното число $\overline{abc}$ е 19-кратно. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{abc} &= 19.(a + b + c), \quad \text{оттук} \quad 100.a + 10.b + c = 19.a + 19.b + 19.c, \\ \text{следователно} \quad 81.a &= 9.b + 18.c \quad \text{и получаваме} \quad 9.a = b + 2.c.\end{aligned}$$

Тъй като $b + 2.c$ не надхвърля $9 + 2.9 = 27$, то цифрата a е 1, 2 или 3.

Очевидно $a = 3$ се получава само при $b = c = 9$.

За $a = 2$ получаваме $18 = b + 2.c$. Оттук b е четна цифра. При $b = 0$ имаме $c = 9$, при $b = 2$ имаме $c = 8$, при $b = 4$ имаме $c = 7$, при $b = 6$ имаме $c = 6$, при $b = 8$ имаме $c = 5$.

За $a = 1$ получаваме $9 = b + 2.c$. Оттук b е нечетна цифра. При $b = 1$ имаме $c = 4$; при $b = 3$ имаме $c = 3$; при $b = 5$ имаме $c = 2$; при $b = 7$ имаме $c = 1$; при $b = 9$ имаме $c = 0$.

Търсените числа са 399, 209, 228, 247, 266, 285, 114, 133, 152, 171 и 190.

Задача 4. (5 точки) Обяснете защо при $12 \leq k \leq 20$ числата от вида $9.k$ са k -кратни.

Решение: При $12 \leq k \leq 20$ числата от вида $9.k$ между $9.12 = 108$ и $9.20 = 180$. Сборът от цифрите на число в този интервал е най-много 16 (при числото 179). От друга страна, сборът от цифрите на числото $9.k$ се дели на 9. Следователно сборът от цифрите на всяко от числата $9.12, 9.13, \dots, 9.20$ е точно 9, което означава, че те са съответно 12-кратно, 13-кратно и т.н., до 20-кратно.

Задача 5. (15 точки) а) Ако сборът от цифрите на числото N означим с $S(N)$, докажете, че $S(2.N) = 2.S(N) - 9.t$, където t е броят на преносите при умножаване на N с 2.

б) Обяснете защо при $11 \leq k \leq 55$ поне едно от числата $9.k$ и $18.k$ е k -кратно.

Решение: а) Ако всяка цифра в записа на N умножим по 2 и съберем получените произведения, ще получим $2.S(N)$. Когато някое от тези произведения е по-голямо от 9, при умножаването на N с 2 ще има пренос в съответния разред. По-точно, ако в $2.S(N)$ има събираемо $\overline{1a}$, при умножаване на N с 2 единицата от $\overline{1a}$ преминава в следващия разред. Така в сбора от цифрите на $2.N$ ще участва не $\overline{1a}$, а $1 + a$. Тъй като $\overline{1a} = 10 + a$ е с 9 повече от $1 + a$, то при t на брой преноса $2.S(N)$ ще бъде с $9.t$ по-голямо от $S(2.N)$.

б) Числата $9.k$ и $18.k$ са по-малки от $18.55 = 990$. Тъй като най-малкото число със сбор на цифрите 27 е 999, а сборът от цифрите на число от вида $9.k$ и $18.k$ се дели на 9, то при $11 \leq k \leq 55$ сборът от цифрите на всяко от числата $9.k$ и $18.k$ е 9 или 18.

Ако сборът от цифрите на $9.k$ е 9 или сборът от цифрите на $18.k$ е 18, то има k -кратно число от желания вид. Да допуснем, че сборът от цифрите на $9.k$ е 18 и сборът от цифрите на $18.k$ е 9. Тъй като $18.k$ се получава чрез удвояване на $9.k$, а удвоеният сбор от цифрите на $9.k$ е с 3.9 по-голям от сбора от цифрите на $18.k$, от а) следва, че при умножаването на $9.k$ с 2 са направени три преноса. Но $9.k \leq 9.55 = 495$, което означава, че при умножаването на $9.k$ с 2 в разряда на стотиците не може да има пренос, т.е. възможни са най-много два преноса. Противоречие.

Задача 6. (30 точки) Докажете, че:

а) Ако двуцифрено число е k -кратно, то $1 < k \leq 10$.

б) Ако трицифрено число е k -кратно, то $10 < k \leq 100$.

в) Ако четирицифрено число е k -кратно, то $57 < k \leq 1000$.

г) Ако петцифрено число е k -кратно, то $392 < k \leq 10000$.

Решение: а) При двуцифрено k -кратно число имаме $\overline{ab} = k.(a + b)$. Тъй като $a \neq 0$, то $\overline{ab} = 10.a + b > a + b$, откъдето $k > 1$. Освен това,

$$\overline{ab} = 10.a + b \leq 10.a + 10.b = 10.(a + b),$$

следователно $k \leq 10$ (като $k = 10$ точно когато $b = 0$, т.е. за числата $10, 20, \dots, 90$).

б) При трицифрено k -кратно число имаме $\overline{abc} = k.(a + b + c)$. От

$$\overline{abc} = 100.a + 10.b + c \leq 100.a + 100.b + 100.c = 100.(a + b + c)$$

следва, че $k \leq 100$.

За да се убедим, че $k > 10$, достатъчно е да докажем, че

$$(2) \quad \overline{abc} > 10.(a + b + c).$$

Преобразуваме последователно (2):

$$\begin{aligned} 100.a + 10.b + c &> 10.a + 10.b + 10.c \\ 90.a &> 9.c \\ 10.a &> c \end{aligned}$$

Последното неравенство е очевидно, тъй като $10.a \geq 10$, а $c \leq 9$. По обратен път следва верността на (2).

в) При четирицифрено k -кратно число имаме $\overline{abcd} = k.(a+b+c+d)$. Тъй като

$$\overline{abcd} = 1000.a + 100.b + 10.c + d \leq 1000.(a + b + c + d),$$

то $k \leq 1000$.

За да се убедим, че $k > 57$, достатъчно е да докажем, че

$$(3) \quad \overline{abcd} > 57.(a + b + c + d).$$

Преобразуваме (3) до вида

$$943.a + 43.b > 47.c + 56.d$$

Тъй като $943.a + 43.b \geq 943.1 + 43.0 = 943$, а $47.c + 56.d \leq 47.9 + 56.9 = 927$, последното неравенство е в сила, а оттам по обратен път – и неравенството (3).

г) При петцифрено k -кратно число имаме $\overline{abcde} = k.(a+b+c+d+e)$. Тъй като

$$\overline{abcde} = 10000.a + 1000.b + 100.c + 10.d + e \leq 10000.(a + b + c + d + e),$$

то $k \leq 10000$.

За да се убедим, че $k > 392$, достатъчно е да докажем, че

$$(4) \quad \overline{abcd} > 392.(a + b + c + d).$$

Преобразуваме (4) до вида

$$9608.a + 608.b > 292.c + 382.d + 391.e.$$

Тъй като $9608.a + 608.b \geq 9608.1 + 608.0 = 9608$, а $292.c + 382.d + 391.e \leq 292.9 + 382.9 + 391.9 = 9585$, последното неравенство е в сила, а оттам по обратен път – и неравенството (4).

Задача 7. (15 точки) Намерете най-малкото k , за което съществува четирицифрено k -кратно число. Има ли и трицифрени k -кратни числа за така намереното k ?

Решение: От задача 6 в) следва, че търсеното k е по-голямо от 57.

Да допуснем, че съществува четирицифрено 58-кратно число $\overline{abcd}$. Тогава $\overline{abcd} = 58.(a + b + c + d)$, т.е.

$$1000.a + 100.b + 10.c + d = 58.a + 58.b + 58.c + 58.d,$$

откъдето

$$942.a + 42.b = 48.c + 57.d.$$

Следователно d е четна цифра и $48.c + 57.d \leq 48.9 + 57.9 = 945$. От друга страна, $942.a + 42.b \geq 942.1 + 42.0 = 942$ и равенството е невъзможно.

Да допуснем, че съществува четирицифрено 59-кратно число $\overline{abcd}$. Тогава $\overline{abcd} = 59.(a + b + c + d)$, т.е.

$$1000.a + 100.b + 10.c + d = 59.a + 59.b + 59.c + 59.d,$$

откъдето

$$941.a + 41.b = 49.c + 58.d.$$

Лявата част на равенството е $941.a + 41.b \geq 941.1 + 41.0 = 941$. Стойността на дясната част, $49.c + 58.d$, е най-много 963 при $c = 9$ и

$d = 9$ и с намаляване на коя да е от цифрите c и d , изразът намалява поне с 49. Тъй като $963 - 49 < 941$, равенството е невъзможно.

Да допуснем, че съществува четирицифрено 60-кратно число $\overline{abcd}$. Тогава $\overline{abcd} = 60.(a + b + c + d)$, т.е.

$$1000.a + 100.b + 10.c + d = 60.a + 60.b + 60.c + 60.d,$$

откъдето

$$940.a + 40.b = 50.c + 59.d.$$

Следователно цифрата d се дели на 10, т.е. $d = 0$. Но $50.c \leq 50.9 = 450$, а $940.a + 40.b \geq 940.1 + 40.0 = 940$ и равенството е невъзможно.

Да допуснем, че съществува четирицифрено 61-кратно число $\overline{abcd}$. Тогава $\overline{abcd} = 61.(a + b + c + d)$, т.е.

$$1000.a + 100.b + 10.c + d = 61.a + 61.b + 61.c + 61.d,$$

откъдето

$$939.a + 39.b = 51.c + 60.d.$$

Най голямата стойност на израза $51.c + 60.d$ е $51.9 + 60.9 = 999$. Като забележим, че $999 - 60 = 939$, намираме решението $a = 1, b = 0, c = 9, d = 8$, т.е. 61-кратното число 1098.

За трицифрените 61-кратни числа имаме $\overline{abc} = 61.(a + b + c)$, т.е. $100.a + 10.b + c = 61.a + 61.b + 61.c$. Оттук $39.a = 51.b + 60.c$, следователно

$$13.a = 17.b + 20.c.$$

Последното равенство може да се запише във вида

$$10.a + 3.(a + b) = 20.b + 20.c,$$

откъдето следва, че сборът $a + b$ се дели на 10 и тъй като a и b са цифри, то $a + b = 10$. Тогава $a = 10 - b$ и получаваме равенството $13.(10 - b) = 17.b + 20.c$, откъдето $130 = 30.b + 20.c$, т.е.

$$13 = 3.b + 2.c.$$

Оттук b е нечетна цифра и тъй като $3.b \leq 13$, то b е 1 или 3. При $b = 1$ намираме $a = 9$ и $c = 5$; при $b = 3$ намираме $a = 7$ и $c = 2$. Трицифрените 61-кратни числа са 732 и 915.

Задача 8. (15 точки) Докажете, че най-малкото k , за което не съществува k -кратно число, е $k = 62$.

Решение: В тази задача трябва да докажем, че:

1. за всяко $k < 62$ съществува k -кратно число;
2. не съществува 62-кратно число.

Както по-горе обяснихме, числата от вида $9.k$ при $k \leq 10$ са k -кратни. От задача 5 б) имаме, че при $11 \leq k \leq 55$ поне едно от числата $9.k$ и $18.k$ е k -кратно. По-нататък, както в задача 5 б) ще проверим дали някое от числата $9.k$ или $18.k$ не е k -кратно и за $k \geq 56$. Получаваме, че $9.56=504$ е 56-кратно; $9.57=513$ е 57-кратно; $9.58=522$ е 58-кратно; $9.59=531$ е 59-кратно; $9.60=540$ е 60-кратно и $18.61=1098$ е 61-кратно. При $k = 62$ нито едно от числата $62.9 = 558$ и $62.18 = 1116$ не е 62-кратно.

Остана да докажем, че 62-кратно число не съществува. От задача 6. следва, че ако съществува 62-кратно число, то е или трицифрено, или четирицифрено.

За четирицифрено 62-кратно число имаме $\overline{abcd} = 62.(a + b + c + d)$, т.е. $1000.a + 100.b + 10.c + d = 62.a + 62.b + 62.c + 62.d$ и оттук

$$938.a + 38.b = 52.c + 61.d.$$

Следователно d е четна цифра и $52.c + 61.d \leq 52.9 + 61.8 = 956$. Тогава $938.a + 38.b \leq 956$, което е възможно само при $a = 1$ и $b = 0$. Получихме

$$(1) \quad 938 = 52.c + 61.d.$$

Стойността на израза $52.c + 61.d$ е най-много 956 при $c = 9$ и $d = 8$. С намаляване на коя да е от цифрите c и d , стойността на израза $52.c + 61.d$ се намалява поне с 52. Тъй като $956 - 52 < 938$, равенството (1) е невъзможно.

За трицифрено 62-кратно число имаме $\overline{abc} = 62.(a + b + c)$, т.е. $100.a + 10.b + c = 62.a + 62.b + 62.c$ и оттук

$$(2) \quad 38.a = 52.b + 61.c.$$

Следователно c е четно и тъй като $61.c \leq 38.a \leq 38.9 = 342$, то цифрата c е 0, 2 или 4. Да отбележим, че при $c = 2$ от (2) следва, че цифрата a е нечетна, а при $c = 4$ цифрата a е четна.

От друга страна, ако запишем (2) във вида

$$39.a = 52.(b + c) + a + 9.c,$$

получаваме, че $a + 9.c$ се дели на 13. При $c = 0$ намираме $a = 0$, при $c = 2$ намираме $a = 8$, а при $c = 4$ намираме $a = 3$. Нито един от тези случаи не води до решение (виж забележката за четността на a).

Следователно 62-кратно число не съществува.

Задача 9. (10 точки) Докажете, че не съществува 63-кратно число. Съществува ли 64-кратно число?

Решение: От задача 6. следва, че ако съществува 63-кратно число, то е или трицифрено, или четирицифрено. Да допуснем, че n е 63-кратно число. Тогава $n = 63.S(n)$ и следователно n се дели на 9. Това означава, че и $S(n)$ се дели на 9. Оттук n се дели на $63.9=567$.

Единственото трицифрено число, кратно на 567, е самото 567, но то не се дели на сбора на цифрите си. Следователно n може да бъде само четирицифрено число. Тогава $\overline{abcd} = 63.(a + b + c + d)$, откъдето получаваме както по-горе

$$937.a + 37.b = 53.c + 62.d.$$

Тъй като $53.c + 62.d \leq 53.9 + 62.9 = 1035$, то $937.a \leq 1035$. Следователно $a = 1$. Четирицифрените кратни на 567 числа, имащи цифра на хилядите 1, са $567.2=1134$ и $567.3=1701$. Първото е 126-кратно, а второто е 189-кратно. Следователно 63-кратно число не съществува.

Тъй като сборът на цифрите на 64 е 10, числото $64.10=640$ е 64-кратно. (Съществуват още шест 64-кратни числа: 320, 512, 704, 832, 960 и 1088.)

Задача 10. (20 точки) Докажете, че съществуват безбройно много а) Harshad-числа.

б) Harshad-числа, в чийто запис не участва цифрата 0.

Решение: а) Всички числа от вида $100 \dots 0$ (с произволен брой нули) очевидно са Harshad-числа.

б) Ще докажем, че числата, записани с $3, 9, 27, 81, \dots$ единици са Harshad-числа.

Първото число от този вид, 111, се дели на сбора от цифрите си 3. Второто число, 11111111, също се дели на сбора от цифрите си 9.

Третото число е записано с 27 единици и може да се представи като произведение по следния начин:

$$\underbrace{11\dots1}_{27} = \underbrace{11\dots1}_9 \cdot \underbrace{100\dots0}_8 \underbrace{100\dots0}_8 1.$$

Първият множител се дели на 9, вторият – на 3, следователно произведението се дели на 27.

По-нататък разсъждаваме *индуктивно*. Нека сме доказали, че числото $11\dots1$, записно с 3^n единици, е Harshad-число. Следващото число от разглеждания вид се записва с три пъти повече единици:

$$A = \underbrace{11\dots1}_{3^n} \underbrace{11\dots1}_{3^n} \underbrace{11\dots1}_{3^n}.$$

Представяме A като произведение по следния начин:

$$A = \underbrace{11\dots1}_{3^n} \cdot \underbrace{100\dots0}_{3^n-1} \underbrace{100\dots0}_{3^n-1} 1.$$

Първият множител е Harshad-число и се дели на сбора от цифрите си 3^n , а вторият множител (по признака за делимост на 3) се дели на 3. Следователно произведението се дели на $3 \cdot 3^n$. Като забележим, че сборът от цифрите на A е точно $3 \cdot 3^n$, заключаваме, че и A е Harshad-число.

Така получихме безкрайна редица от Harshad-числа.