Lineare Differentialgleichungen mit festen Koeffizienten

Wir fangen mit folgender Definition an:

Definition: Linear abhängige (unabhängige) Funktionen. *Seien $u_i(x), i = 1, \cdots, n$ Funktionen, vorgegeben auf einer Punktmenge $\mathcal{M}$. Sie sind linear unabhängig auf $\mathcal{M}$, wenn frr jedes $x \in \mathcal{M}$ die Gleichung*

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i u_i(x) = 0 \qquad (1)$$

genau dann möglich ist, wenn

$$\alpha_i = 0, i = 1, \cdots, n.$$

Sonst (d.h., es existieren Zahlen α_i mit

$$\sum |\alpha_i| > 0)$$

liegt lineare Abhängigkeit vor.

Satz 1: *Seien die Funktionen $u_i(x), i = 1, \cdots, n$ auf dem Intervall $[1, b]$ vorgegeben, wobei $u_i \in C^{n-1}[a, b], i = 1, \cdots, n$. Sie sind auf $[a, b]$ linear unabhängig genau dann, wenn es mindestens einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ gibt, so daß die Wronsky-Determinate $W[u_1, u_n] := \left(u_i^{k-1}\right)_{k,i=1,\ldots,n}$ in diesem Punkt keine Null ist.*

Beweis: Tatsächlich, sei $x \in [a, b]$ vorerst beliebig festgesetzt. Wir differenzierem $n - 1$ mal die Gleichung (1). Das Ergebnis ist

$$\sum \alpha_i u_i^{(k)}(x) = 0, k = 0, \cdots, n - 1.$$

Nun bemerken wir, daß die bestimmende Matrix die Wronsky-Matrix ist, also liegt folgendes System vor:

$$\left(u_i^{(k-1)}(x)\right) (\alpha_i)_{i=1}^{n} = 0$$

($(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ ist der Spaltenvektor über die Koeffizienten $\alpha_i, i = 1, ...m.$)

Wie wir aus den Vorlesungen in linearer Algebra bereits wissen, hat letzteres System eine eindeutige Lösung genau dann, wenn $W[u_1, \cdots, u_n] = 0$. Die eindeutige Lösung ist nämlich die trivielle, die Nulllösung. So, wenn es mindesten einen Punkt x auf dem Intervall $[a, b]$ gibt mit dieser Einenschaft, so sind wir fertig. Damit ist der Satz bewiesen. **Q.E.D.**

Definition: Differentialgleichung mit festen reellwertigen Koeffizienten, - jede Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = f(x), \tag{2}$$

wobei reellwertige Koeffizienten sind.

Wir schreiben die damit assoziierte homogene Gleichung auf:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = 0, \tag{3}$$

Ohne Beweis führen wir folgenden grundlegenden Satz an:

Satz 2: *Sei die homogene Differentialgleichung vorgegeben. Dann ist die Lösungsmenge ein $n-$ dimensionaler Raum.*

Korollar: Ist $y_i, i = 1, ..., n$ eine Basis in diesem Raum, (d.h. linear unabhängige Funktionen), so lässt sich jede Lösung als lineare Kombination darstellen.

Definition: Seien $y_i, i = 1, ...n$ linear unabhängige Lösungen von (3). Die Funktion

$$y := \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \tag{4}$$

heißt *allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.*

Satz 3: *Sei y die allgemeine Lösung von (3), und sei $\eta(x)$ - eine partikuläre Lösung von (2). Ist Y die allgemeine Lösung von (2), so gilt*

$$Y(x) = y(x) + \eta(x).$$

Beweis: Wir setzen

$$D[y] := \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x).$$

Mit dieser Bezeichnung ist

$$D[y] = 0, D[\eta] = f(x). \tag{5}$$

Sei

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} C_i y_i(x)$$

die allgemeine Lösung von (3),y_i - linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (3). Nun ist

$$D[y(x) + \eta(x)] = D[\sum_{k=0}^{n} C_i y_i + \eta(x)] =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_i D[y_i] + D[\eta] = f(x).$$

Somit ist der Satz bewiesen. **Q.E.D.**

Methoden zur Lösung homogener Differentialgleichungen mit festen Koefizienten

Wir schreiben das damit assoziierte Charakterischische Polynom $P(\lambda)$ auf:

$$P(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda)^k. \tag{6}$$

Seien $\lambda_i, i = 1, \cdots, n$ seine Nullstellen (zusammengerechnet mit ihren Vielfältigkeiten).

Zu untersuchen sind drei Fälle:

a) Seien die Nullstellen λ_i paarweise verschiedene reelle Zahlen. Offenbar sind sie dann alle einfache Nullstellen. Nun setzen wir

$$y_i(x) := e^{\lambda_i x}, \, i = 1, \cdots, n.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß

$$D[u_i] = 0, \, i = 1, ...n. \tag{7}$$

Tatsächlich, da

$$u_i(x)^{(k)} = \lambda_i^k e^{\lambda_i x},$$

gilt

$$D[u_i] = e^{\lambda_i x} P(\lambda_i) = 0.$$

Letzteres bedeutet, daß die Funktionen $u_i, i = 1, \cdots, n$ Lösungen der homogenen Gleichung sind. Weiter läßt sich leicht prüfen, daß $u_i, i = 1, \cdots, n$ linear unabhängig sind. Tatsächlich, die Berechnung der Determinante $\{u_i^{(k)}\}$ ergibt:

$$\{u_i\}^{(k)}\} = e^{x \sum \lambda_i} \{\lambda_i^k\}_{i=1,\cdots,n,k=0,\cdots,n-1} =$$

$$e^{x\sum\lambda_i}\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Wegen der Bedingungen des Satzes ist das rechtsstehende Produkt keine Null. Die Anwendung des Satzes 1 führt zu der Behauptung. Daraus folgt weiter, daß die allgemeine Lösung im Fall a) lineare Kombination der Funktionen $y_i(x)$ ist. Wir sagen, daß jede Nullstelle λ_i die linear unabhängige Funktion $u_i(x) := e^{\lambda_i x}$ erzeugt.
b) Seien die Nullstellen λ_i alle reelle Zahlen mit der Vielfältigkeit je κ_i. Wir merken an, dass

$$\sum \kappa_i = n.$$

Wir überlassen dem Leser nachzuprüfen, daß jede Zahl λ_i κ_i linear unabhängigen Funktionen erzeugt, nämlich: $x^k e^{\lambda_i x}, k = 0, \kappa_i - 1$.
c) Sei die Nullstelle λ_i komplexwertig, d.h., $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$. Wie wir bereits wissen, ist die komplex konjugierte Zahl $\bar{\lambda}_i = \alpha_i - i\beta_i$ auch eine Nullstelle, und zwar derselben Vielfältigkeit. Sei die Vielfältigkeit gleich κ. Dann erzeugen beide Nullstellen die linear unabhängigen Funktionen $x^k e^{\alpha_i x}\cos\beta x$, $x^i e^{\alpha_i x}\sin\beta x$, $i,\ k = 0, \cdots, \kappa - 1$. Den Beweis überlassen wir dem Leser.

Methoden zur Lösung nichthomogener Differentialgleichungen mit festen Koefizienten - Anzatz vom Typ der rechten Seite

Nun gehen wit auf die Lösungsmethoden von (2) ein. Bei weitem ist (2) nicht für beliebge stetige Funktionen f (die rechte Seite) lösbar. In ganz bestimmten Fällen, wo die rechte Seite von spezieller Form ist, lässt sich die Lösung direkt aufschreiben. Die bislang erarbeitete Lösungsmethode stützt sich auf *Ansatz vom Typ der rechten Seite*. Damit wollen wir uns befassen.

Sei, wie zuvor, die Differentialgleichung

$$D[y] = f(x)$$

Vorgegeben, wobei

$$D[y] = \sum_{i=0}^{n} a_i y(i).$$

Wir suchen nach einer partikulären Lösung η, d.h.$D[\eta] = f(x)$. Das charakteristische Polynom P ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{P}(\lambda) := \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i.$$

a)

$$f(x) = \exp\lambda x Q(x),$$

wobei λ reellwertig ist und Q Polynom mit Grad m ist ($\deg Q = m$. Zu unterscheiden sind zwei Fälle:
a1) Die Zahl λ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Gesucht wird dann η in der Form

$$\eta(x) = \exp\lambda x q(x),\ q - \text{Polynom, deg q} = m.$$

a2) Die Zahl λ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms P. Ist κ die Vielfältigkeit, so

$$\eta(x) = x\kappa\exp\lambda x q(x),\ q - \text{Polynom, deg q} = m.$$

b):

$$f(x) = \exp\alpha x(\cos\beta x Q_1(x) + \sin\beta x Q_2(x)),\ \deg Q_1, Q_2 = m.$$

b1)

$$\mathrm{P}(\alpha + i\beta) \neq 0.$$

Dann ist

$$\eta(x) := \exp(\alpha x)(\cos\beta x q_1(x) + \sin\beta x q_2(x)),\ \deg q_1, q_2 = m.$$

b2)

$$\mathrm{P}(\alpha + i\beta) = 0.$$

Sei κ die Vielfältigkeit. In diesem Fall ist

$$\eta(x) = x^\kappa\exp(\alpha x)(\cos\beta x q_1(x) + \sin\beta x q_2(x)).$$

Methoden für effektiveren Lösungsgang

Bei dem Lösungsgang sind folgende Formeln unentbehrlich:
1. **Differentialformel vom Leibnitz:** *Seien f, g $n-$mal differenzierbar. Dann ist das Produkt fg auch $n-$mal differenzierbar, wobei*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k}. \tag{8}$$

2. *Sei k eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$\cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2}),\ \sin(x)^{(k)} = \cos(x + (k-1)\frac{\pi}{2}).$$

Beispiel: Löse das Anfangswertproblem

$$D[y] = y^4 + y^2, \tag{9}$$

wobei $y^(0) = 1,\ y^{'}(0) = -1,\ y^{(2)}(0) = y^{(3)sas}(0) = 0.$
Lösung: Die charakteristischen Nullstellen sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$. Demnach gilr für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung die Darstellung

$$y(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos x + C_4 \sin x. \tag{10}$$

Die Gleichung (9) setzt sich aus zwei Gleichungen zusammen,

$$D[y] = D_1[y] + D_2[y],$$

wobei

$$D_1[y] = \cos x,\ D_2[y] = x^2 + 1.$$

Nun berechnen wir zwei partikuläre Lösungen η_1, und η_2.
Zu η_1: $\eta_1(x) = x(a \cos x + b \sin x)$. Die Funktion η bestimmen wir aus der Gleichung

$$D[\eta_1] = \cos x,$$

also

$$D[\eta_1] = a \sum_{k=0}^{4} C_4^k x^k \cos x^{4-k} + a \sum_{k=0}^{2} C_2^k x^k \cos x^{2-k} +$$

$$b \sum_{k=0}^{4} C_4^k x^k \sin x^{4-k} + b \sum_{k=0}^{2} C_2^k x^k \sin x^{2-k}.$$

Nun bemerken wir, dass sich letztere Formel zu folgender reduziert:

$$D[\eta_1] = a \sum_{k=0}^{1} C_4^k x^k \cos x^{4-k} + a \sum_{k=0}^{1} C_2^k x^k \cos x^{2-k} +$$

$$b \sum_{k=0}^{1} C_4^k x^k \sin x^{4-k} + b \sum_{k=0}^{1} C_2^k x^k \sin x^{2-k}.$$

Die direkte berechnung der Koeffizienten a, b, c ergibt

$$a = 0, b = -\frac{1}{2},$$

oder

$$\eta_1(x) = -x\frac{sinx}{2}. \tag{11}$$

Weiter suchen wir η_2 in der Form

$$\eta(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2.$$

Dafür bekommen wir

$$\eta_2(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2}.$$

Aus (9), (10) und (11) kommen wir abschließend zum Ergebnis

$$Y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + -x\frac{sinx}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2},$$

wo Y die allgemeine Lösung von (9) ist.

Nun müssen die Koeffizienten berechnet werden. Dazu merken wir an, daß

$$(x^k)^{(m)}|_{x=0} = k(k-1)\cdots(k-m+1)x^{m-k}|_{x=0} = \begin{cases} m!, & k = m \\ 0, & k \neq m, \end{cases}$$

$$\cos(x)^{(k)}_{x=0} = \cos k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1, & k = 0, 4 \\ -1, & k = 2, \\ 0, & k = 1, 3, \end{cases}$$

sowie

$$\sin(x)^{(k)}_{x=0} = \cos\frac{(k-1)\pi}{2} = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k = 2, 4 \\ -1, & k = 3. \end{cases}$$

.