Differentialgleichungen von Euler

Definition: Differentialoperator von Euler:

$$D[y](x) = \sum_0^n a_i x^i y^{(i)}(x),\ x > 0.$$

Substitution

$$x = e^t. \tag{1}$$

Somit wird

$$y(x) = v(t).$$

Berechnen wir $xy^{'}(x)$.

$$y'(x) = \frac{\partial y(x)}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{\partial y(x)}{dt} = \frac{dt}{dx}\frac{\partial v(t))}{dt} = v'(t)e^{-t}. \tag{2}$$

Somit gilt

$$xy^{'}(x) = v'(t). \tag{3}$$

Verbleiben wir jetzt bei $x^2y^{(2)}(x)$. Für $y''(x)$ gilt

$$y''(x) = \frac{\partial y'(x)}{dx} = \frac{\partial y'(x)}{dt}\frac{dt}{dx}.$$

Wir setzen (2) und (1) ein und bekommen:

$$y''(x) = \frac{\partial v'(t)e^{-t}}{dt}e^{-t}.$$

Die direkte Berechnung ergibt

$$y''(x) = (v''(t) - v'(t))e^{-2t},$$

und somit

$$x^2y''(x) = v''(t) - v'(t)$$

(vergleiche mit (3).) Ähnlicherweise bekommen wir, dass

$$x^3y^{(3)}(x) = v^{(3)}(t) - 3v^{(2)}(t) + 2v^{'}(t).$$

Zu allgemeiner Berechnung von $x^iy^{(i)}(x)$. Sei

$$y^{(i)}(x) = e^{-it}\sum_1^i b_k v^{(k)}(t).$$

Wie zuvor sei

$$y^{(i+1)}(x) = \frac{\partial y^i}{dx} = \partial \frac{e^{-it} \sum_1^i b_k v^{(k)}(t)}{dt} \frac{dt}{dx},\ b_k \in \mathrm{Re}.$$

Das Differenzieren ergibt weiter

$$y^{(i+1)}(x) = \frac{-e^{-it} \sum_1^i b_k v^{(k)}(t) + e^{-it} \sum_1^i b_k v^{(k+1)}(t)}{e^t},$$

also ist

$$x^{i+1} y^{(i+1)}(x) = \sum_1^{i+1} \beta_k v^{(k)}(t). \tag{4}$$

Die letzte Formel zeigt, dass der Ausdruck $x^i y^{(i)}(x)$ nur feste Koeffizienten besitzt, und der Differentialoperator wird durch den Ansatz (1) zu Differentialoperator mitfesten Koeffizienten. Ersetzt man überall $x^i y^{(i)}(x)$ durch v^k, kommt man zu

$$D[v] = \sum_0^n \alpha_i v^{(i)}(t). \tag{5}$$

Beweis:Löse die Gleichung

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 10y^{(2)} + 4y^{'} - 4y = 0,\ y(1) = y'(1) = 0, y^{(2)} = 1, y^{(3)} = -2.$$

Lösung: Die Eulersubstitution $x = e^t$ führt zur Gleichung

$$v^{(4)}(t) + 3v^{(2)}(t) - 4v(t) = 0,\ v(0) = v'(0) = 0,\ v''(0) = v^{(3)}(0) = 1. \tag{6}$$

Das charakteristische Polynom P ist

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 - 4,$$

was folgende Basislösungen v_i ergibt:

$$v_1(t) = e^t,\ v_2(t) = e^{-t}, v_3(t) = e^{-2t},\ v_4(t) = e^{2t}.$$

Die allgemeine Lösung $V(t)$ ist

$$v(t) = \sum C_i v_i(t).$$

Die Konstanten C_i werden durch die Anfangswerte für $v^{(i)}(0)$ berechnet. Die allgemeine Lösung der vorgegebenen Gleichung ist demnach

$$y(u) = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3 x^{-2} + c_4 x^{-2}$$

Nun besprechen wir eine andere Lösungsweise . Sei, wie bevor., (1) vorgegeben,

$$D[y](x) = \sum_{0}^{n} a_i x^i y^{(i)}(x),\ x > 0.$$

Gesucht sei $y(x)$ in der Form $y(x) = x^\lambda$. Da

$$x^i y^{(i)}(x) = x^i (x^\lambda)^{(i)}(x) = x^i \prod_{l=0}^{i-1} (\lambda - l) x^{\lambda - i} = x^\lambda \prod_{l=0}^{i-1} (\lambda - l),$$

kommen wir zur Gleichung

$$\sum_{0}^{n} a_i x^i y^{(i)}(x) = x^\lambda \sum_{0}^{n} a_i \prod_{l=0}^{i-1} (\lambda - l).$$

Die Gleichung

$$D[y] = 0$$

wird zu

$$\sum_{0}^{n} a_i \prod_{l=0}^{i-1} (\lambda - l) = 0 \qquad (7).$$

Die Zahl λ ist schon unbekannt, sie muss berechnet werden.
Satz: *Die Nullstellen des Polynoms von (7) sind die charakteristischen Zahlen der Gleichung (5), und somit sind die Funktionen x^λ die linear unabhängigen Lösungen der homogenen Geichung.*
Beweis: Untersuchen wir dieselbe Gleichung

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 10y^{(2)} + 4y^{'} - 4y{=}0,\ y(1) = y'(1) = 0, y^{(2)} = 1, y^{(3)} = -2.$$

Die Substitution $y(x) = x^\lambda$ führt zu

$$\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4\lambda = 0.$$

Die Nullstellen λ_i sind ± 1, ± 2. Demnach sind die Lösungen

$$y(x) = x^{\lambda_i}, \lambda_i = \pm 1,\ \pm 2.$$

Literaturverzeichnis;

1. Höhere Mathematik, Frank Hettlich, Andreas Kirsch, Universitä Karlsruhe,