Lipschitz Klasse

Definition: Sei die skalare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ vorgegeben. f heisst $\alpha-$ *Lipschitz Funktion,* $\alpha > 0$ (wir schreiben $f \in \mathcal{L}_\alpha[a, b]$,) wenn es eine positive Konstante gibt, derart, daß

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \tag{1}$$

für jedes Paar (x, y) aus $[a, b]$.

Satz 1: $\mathcal{L}_\alpha[a, b] \subset C[a, b]$.
Beweis: Sei $f \in \mathcal{L}_\alpha[a, b]$ und ε eine feste, aber beliebig ausgewählte positive Zahl. Nun wählen wir eine weitere positive Zahl δ so, daß

$$\delta < (\frac{\varepsilon}{M})^{\frac{1}{\alpha}}$$

ist. Des weiteren seien die Punkte x, y derart, daß

$$|x - y| \leq \delta. \tag{2}$$

Aus (1) folgt dann, daß für alle Paare x, y, die (2) erfüllen, die Abschätzung

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

richtig ist.

Somit ist der Satz bewiesen. **Q.E.D.**

Satz 2: *Sei $f \in \mathcal{L}_\alpha[a, b]$, wobei $\alpha > 1$ ist. Dann ist die Funktion f auf $[a, b]$ einer Konstante gleich.*
Beweis: Sei $f \in \mathcal{L}_\alpha[a, b]$ und $\alpha = 1 + \beta$. Dank der Bedingungen des Satzes ist

$$\beta > 0. \tag{3}$$

Sei $x \in [a, b]$ und sei $\{x_n\}$ eine unendliche Folge, die aus $[a, b]$ gegen x konvergiert. Aus der Definition der Lipschitz Klasse folgt, daß

$$|\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}| \leq |x_n - x|^\beta.$$

Da die Zahl β positiv ist (siehe (3)), konvergiert die linke Seite gegen Null. Letzteres bedeutet, daß die Funktion f überall auf $[a, b]$ differenzierbar ist, wobei $f' \equiv 0$ auf dem Intervall. Daraus folgt die Behauptung. **Q.E.D.**

Definition: Sei $F(x, y)$ skalare Funktion, definiert für $x \in A, y \in B$. F ist eine $\alpha-$Lipschitz Funktion bezüglich y, wenn für alle $x \in A$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2 y)| \leq M|y_1 - y_2|^\alpha$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition: Sei F eine skalare Funktion mit $n+2$ Variablen. Die Gleichung

$$F(x, y, y', \cdots, y^n) = f(x) \tag{4}$$

bezüglich einer Funktion $y(x)$, die derart sein soll, daß (4) erfüllt ist, heißt *einfache Differentialgleichung n-ter Ordnung.*

Beispiel :Löse die Differentialgleichung

$$y"(x) = \sin x. \tag{5}$$

Lösung: Offenbar ist die Funktion $y(x) = -\sin x$ eine Lösung. Doch eine Lösung ist auch jede Funktion

$$y(x) = -\sin x + C_1 x + C_2, \tag{6}$$

wobei C_1, C_2 beliebige Konstanten sind. Setzt man Anfangsbedingungen ein, z.B, gesucht sei eine Lösung y von (5), derart, daß $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$, so ist die konkrete Lösung

$$y(x) = -\sin x + x + 1. \tag{7}$$

Die Lösung (6) heißt *allgemein*, während (7) - *partikulär.*

Wir merken an, daß nicht jede Gleichung stetig differenzierbare Lösung besitzt. Sei, zum Beispile,

$$y' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Satz 3, Satz von Picard-Lindelöf: *Gegeben seien $x_0 \in J := [a+h, a-h], u \in B \subset R^2$. Sei die Funktion $f(u)$ aus der Lipschitz-Klasse mit $\alpha = 1$. Dann besitzt die Anfanfswertaufgabe*

$$y'(x) = f(x, y), x \in J, y(x_0) = y_0$$

genau eine stetig differenzierbare Lösung auf $I \subset J$.

Für Differeitialgleichungen höherer Ordnung gilt folgender Satz:

Satz 4: *Ist $f(x)$ in (4) eine stetig differenzierbare Funktion, so besitzt das Anfangswertproblem*

$$y(x_0) = y_0, y^k(x_0) = y_k, k = 1, \cdots n-1$$

eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung. Im allgemeinen hängt die Lösung von n Parametern ab. L

Literaturverzeichnis;

1. Höhere Mathematik, Frank Hettlich, Andreas Kirsch, Universitä Karlsruhe,