

ВЪРХУ НЯКОИ ПРЕДСТАВЯНИЯ С ИНТЕГРАЛИ НА РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

от Никола Обрешков

В една класична работа академикът С. Н. Бернштин доказва следната теорема: Необходимо и достатъчно условие, щото функцията $f(x)$ да се представя за $x \geq 0$ с интеграла

$$(1) \quad f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} d\omega(t),$$

където $\omega(x)$ е монотонно растяща и ограничена за $x \geq 0$ функция, се състои в това, че $f(x)$ да бъде неограничено пъти диференцируема за $x > 0$, $f(0) = f(+0)$, и за тези стойности на x да имаме

$$(2) \quad (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0, \quad n \geq 0, 1, 2, 3, \dots$$

Категориите от функциите $f(x)$, притежаващи свойството (2), са били подробно изследвани от Бернштин. Между другото нека споменем и резултата на Бернштин за случай, когато $\omega(x)$ не се предполага ограничена. Тогава условията (2) остават, но за $x = 0$ не се предполага непрекъснатата.

Интегралът в (1) представлява Лаплас-Стилтесова трансформация на функцията $\omega(x)$. Класичната трансформация на Лаплас е

$$(3) \quad F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt,$$

където $\varphi(x)$ е интегрируема функция във всеки краен интервал. Добре е известно, че от сходимостта на интеграла (3) за $x = x_0$ следва сходимостта му за всяко x за което $R(x) > R(x_0)$ и то равномерно във всяка крайна област от полуравнината $R(x) \geq R(x_0) + \varepsilon, \varepsilon > 0$ и произволно. При някои ограничителни предположения за функцията $F(x)$ се доказва формулата за обръщане

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xs} F(s) ds.$$

Като ограничаваме разглежданията само в реална област, общото решение на интегралното уравнение (3) при предположение, че интегралът (3) е сходящ за някое $x = x_0$ (т. е. съществува абсциса на сходимост $\sigma_0, \sigma_0 < \infty$), се дава с оператора на Пост-Уедер. Именно за всяко $x > 0$ имаме

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n f^{(n)} \left(\frac{n}{x} \right) \left(\frac{n}{x} \right)^{n+1} = \varphi(x).$$

В една работа¹ разгледах аналогичен въпрос на този на Бернштайн, като намерих условията за представяне на функции $f(x)$ с интеграла

$$(6) \quad f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) d\omega(t),$$

където $\Phi(x)$ е дадена с интеграла

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}} t^{\delta-1} dt$$

и $\omega(x)$ е монотонно растяща и ограничена функция за $x \geq 0$. Условията са следните: функцията $f(x)$ трябва да бъде неограничено пъти диференцируема за $x > 0$, да клони към определена граница при $x \rightarrow \infty$ и функциите $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, дефинирани с релациите

$$(7) \quad f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = x f_{n-1}''(x) + (1-\delta) f_{n-1}'(x), \quad n \geq 1, \quad 0 < \delta < 1,$$

да бъдат неотрицателни за $x > 0$, $f(0) = f(+0)$.

В тази работа разглеждам интегралното уравнение

$$(8) \quad F(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) \varphi(t) dt,$$

в което $\varphi(t)$ е интегрируема функция във всеки краен интервал $(0, x)$, $x > 0$. Ако интегралът в дясно е сходящ за едно $x = x_0$, то той е сходящ за всяко $x > x_0$. Намирам съответния оператор за решение на уравнението, като установявам граничното равенство

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{2\pi n^{\delta-1} x^{n+1}} F_n \left(\frac{n^2}{x} \right) = \varphi(x),$$

където $F_0(x) = F(x)$, $F_n(x) = x F_{n-1}''(x) + (1-\delta) F_{n-1}'(x)$, $n \geq 1$, за всяка точка x на непрекъснатост на функцията $\varphi(x)$ и въобще за почти всички x (т. е. с изключение на едно множество с мярка нула). Също доказвам теореми за тоталната вариация на $\omega(x)$, при малкото ограничително условие за функцията $\omega(x)$ в уравнението (8). Именно предполага се, че $\omega(x)$ е с ограничена вариация във всеки краен интервал и интегралът (6) е сходящ за някое $x = x_0$.

Нека отбележа, че с несложни разисквания се вижда, че функцията $\Phi(x)$ се изразява просто с Ханкеловата функция за имагинерен аргумент. Именно имаме

$$(10) \quad \Phi(x) = 2(\sqrt{x})^\delta K_\delta(2\sqrt{x}).$$

¹ Н. Обрешков. Върху някои свойства на реалните функции, дефинирани върху реалната полуос. Годишник на Соф. университет. Т. XLVII, 1950/51—1951/52, стр. 109—134.

В теорията на Беселевите функции се разглежда аналогичната трансформация на тази на Фурие

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} s J_n(sx) f(s) ds, \quad f(x) = \int_0^{\infty} t J_n(xt) \varphi(t) dt.$$

На основание на релацията (10) уравненията (6) и (8) стават

$$(11) \quad f(x) = 2 \int_0^{\infty} (\sqrt{xt})^{\delta} K_{\delta}(2\sqrt{xt}) d\omega(t),$$

$$(12) \quad F(x) = 2 \int_0^{\infty} (\sqrt{xt})^{\delta} K_{\delta}(2\sqrt{xt}) \varphi(t) dt,$$

и могат да се разглеждат на аналогична трансформация на тази на Лаплас за Беселовите функции. Доколкото ми е известно, формулата (10) и трансформациите (11) и (12) са нови.

Получените тук и преди резултати от мене могат да се понататък пренесат за други функции, удовлетворяващи на линейни диференциални уравнения при подходящи оператори. Това ще бъде направено в друга работа. Уравнението от втори ред

$$xy''(x) + (1 - 2m)y'(x) - \frac{x}{4}y(x) = 0$$

се удовлетворява от функцията

$$y(x) = x^{m-\frac{1}{2}} \omega_{0,m}(x),$$

където $\omega_{0,m}(x)$ е функцията на Уитеккер. За представяне с подобни интеграли с помощта на функцията $y(x)$ могат да се установят аналогични теореми. Подобни теореми се получават и за редици, но това ще бъде обект на друга работа, както въобще изследвания за други възможни такива представяния, както и въпроса за обръщане на формулите (11) и (12) в комплексна област. Формулата за обръщане (5) е отначало посочена от Пост и след това подробно изследвана от Уедер.¹

Върху една функция, дефинирана с интеграл

Да означим със $\Phi(x)$ функцията, дефинирана за $x > 0$ с интеграла

$$(1) \quad \Phi(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{v}-v} v^{\delta-1} dv, \quad \delta > 0,$$

където $\delta > 0$. Ще намерим едно линейно диференциално уравнение от втори ред, което удовлетворява функцията $\Phi(x)$. При $x > 0$ имаме очевидно

¹ D. V. Widder. Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral. Trans. Amer. Math. Society. 33, 1931, 851—892.

$$(2) \quad \Phi'(x) = - \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{v}} v^{\delta-2} dv, \quad \Phi''(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{v}} v^{\delta-3} dv.$$

С интегриране по части получаваме

$$\begin{aligned} x\Phi''(x) &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{v}} v^{\delta-1} dv = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{v}} v^{\delta-1} dv - (\delta-1) \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{v}} v^{\delta-2} dv = \\ &= \Phi(x) + (\delta-1)\Phi'(x). \end{aligned}$$

Следователно $\Phi(x)$ удовлетворява на уравнението

$$(3) \quad xy'' - (\delta-1)y' - y = 0.$$

Ще сведем сега интеграла $\Phi(x)$ към друг от форма на интеграла на Лаплас. Да поставим ($x > 0$)

$$\frac{x}{v} + v = 2t.$$

С прости пресмятания получаваме

$$\Phi(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t^2-x}} [(t+\sqrt{t^2-x})^{\delta} + (t-\sqrt{t^2-x})^{\delta}] dt.$$

Като поставим $t = \sqrt{x}u$, получаваме

$$\Phi(x) = x^{\frac{\delta}{2}} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}u}}{\sqrt{u^2-1}} [(u+\sqrt{u^2-1})^{\delta} + (u-\sqrt{u^2-1})^{\delta}] du.$$

Така ще имаме

$$(4) \quad \Phi(x) = x^{\frac{\delta}{2}} e^{-2\sqrt{x}} g(2\sqrt{x}),$$

където $g(x)$ се дава с интеграла на Лаплас

$$(5) \quad g(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xv}}{\sqrt{2v+v^2}} [(1+v+\sqrt{2v+v^2})^{\delta} + (1+v-\sqrt{2v+v^2})^{\delta}] dv.$$

Лесно е сега да намерим асимптотична формула за $\Phi(x)$ при $x \rightarrow \infty$. За тази цел ще се основем на едно познато свойство на Лапласовите интеграла. Именно, нека $f(x)$ е дефинирана функция с интеграла на Лаплас

$$(6) \quad f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt,$$

който предполагаем сходящ за всяко $x > 0$. Тогава, ако за $t \rightarrow 0$ имаме

$$(7) \quad \varphi(t) \sim \frac{At^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}, \quad \delta > 0,$$

то за $x \rightarrow \infty$ имаме

$$(8) \quad f(x) \sim \frac{A}{x^\delta}.$$

За функцията (5) имаме (при $\nu \rightarrow 0$)

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-x\nu} h(\nu) d\nu, \quad h(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\nu + \nu^2}} [(1 + \nu + \sqrt{2\nu + \nu^2})^\delta + (1 + \nu - \sqrt{2\nu + \nu^2})^\delta] \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\nu}}.$$

Следователно по (8) при $x \rightarrow \infty$ ще имаме

$$g(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}}.$$

Тогава от (4), получаваме важната за по-нататъшните развития формула

$$(9) \quad \Phi(x) \sim \sqrt{\pi} x^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow \infty.$$

При $x \rightarrow 0$ очевидно имаме

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = \Phi(0) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\delta-1} dt = \Gamma(\delta).$$

Да получим сега асимптотична формула за производната $\Phi'(x)$. Понеже

$$g'(x) = - \int_0^\infty e^{-x\nu} \nu h(\nu) d\nu, \quad \nu h(\nu) \sim \sqrt{2\nu}, \quad \nu \rightarrow 0,$$

то от (8) получаваме при $x \rightarrow \infty$

$$g'(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{-\frac{3}{2}}$$

и от формулата

$$\Phi'(x) = \frac{\delta}{2} x^{\frac{\delta}{2}-1} e^{-2\sqrt{x}} g(2\sqrt{x}) - x^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}} g'(2\sqrt{x}) + x^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}} g'(2\sqrt{x})$$

следва, че ще имаме

$$\Phi'(x) \sim -\sqrt{\pi} x^{\frac{\delta}{2}-\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{x}} \quad x \rightarrow \infty.$$

Да изследваме сега функцията $\Phi'(x)$ при $x \rightarrow 0$. Очевидно при $\delta > 1$ имаме

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = \Phi'(0) = - \int_0^\infty e^{-\nu} \nu^{\delta-2} d\nu = -\Gamma(\delta-1).$$

Случаят $0 < \delta < 1$, който ще ни трябва в бъдеще, е малко по-комплициран за разглеждане. Нека пишем

$$\Phi'(x) = - \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}-t} t^{\delta-2} dt - \int_1^\infty e^{-\frac{x}{t}-t} t^{\delta-2} dt = -\alpha(x) - \beta(x).$$

Очевидно при $x \rightarrow 0$ имаме $\beta(x) = O(1)$. За $\alpha(x)$ получаваме

$$\alpha(x) = \int_0^1 e^{\frac{x}{t}} t^{\delta-2} dt + \int_0^1 e^{-\frac{x}{t}} (e^{-t} - 1) t^{\delta-2} dt = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$$

Но за $x > 0$ имаме

$$|\alpha_2(x)| < \int_0^1 (1 - e^{-t}) t^{\delta-2} dt < K.$$

Интегралът $\alpha_1(x)$ със субституцията $\frac{x}{t} = v$ става

$$\alpha_1(x) = x^{\delta-1} \int_x^\infty e^{-v} v^{-\delta} dv \sim x^{\delta-1} \Gamma(1-\delta), \quad x \rightarrow 0.$$

Така получаваме, че при $x \rightarrow 0$ за $\Phi'(x)$ имаме формулата

$$(11) \quad \Phi'(x) \sim -\Gamma(1-\delta)x^{\delta-1}.$$

Разбира се асимптотичните формули за $x \rightarrow 0$ могат да се получат също така от Лапласовото представяне, като вземем под внимание, че от предположението за $t \rightarrow \infty$ следва верността на (8) за $x \rightarrow 0$. Освен това съществуват асимптотични формули за Лапласовия интеграл с повече членове в развитието.

Очевидно интегралите (5) са сходящи във всеки ъгъл

$$-\theta \leq \arg x \leq \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Следователно интегралът (1) е сходящ във всеки ъгъл

$$(12) \quad -\theta_1 \leq \arg x \leq \theta_1, \quad \theta < \theta_1 < \pi,$$

и представлява в него една холоморфна функция на x . Освен това асимптотичните формули (9) ще са валидни във всеки ъгъл (12). Впрочем при по-нататъшните ни разглеждания ние ще използваме само реални стойности на x .

Със смяната на зависимата променлива $z(t) = t^{-\delta} y\left(\frac{t^2}{4}\right)$ уравнението (3) става

$$(13) \quad z''(t) + \frac{1}{t} z'(t) - \left(1 + \frac{\delta^2}{t^2}\right) z(t) = 0.$$

Това уравнение се удовлетворява от функцията на Ханкел за имагинерен аргумент

$$(14) \quad K_{\delta}(t) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2} \pi i} H_{\delta}^{(1)}(it) = \frac{1}{2} \pi \frac{I_{-\delta}(t) - I_{\delta}(t)}{\sin \delta \pi},$$

Тази функция се дава с

$$(15) \quad K_n(t) = \frac{(-1)^{\delta}}{2} \left[\frac{\partial I_{-\delta}(t)}{\partial \delta} - \frac{\partial I_{\delta}(t)}{\partial \delta} \right]_{\delta=n}$$

при n цяло число.

От друга страна при $x \rightarrow \infty$ функцията $K_{\delta}(x)$ удовлетворява на асимптотичното равенство

$$K_{\delta}(x) \sim e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Но от асимптотичната формула за $\Phi(x)$ за $x = \infty$ и от интегралното представяне на тази функция се вижда, че функциите $K_{\delta}(x)$ и $x^{-\delta} \Phi\left(\frac{x^2}{4}\right)$ имат за $x=0$ и за $x=\infty$ подобни асимптотични представяния. Понеже и двете удовлетворяват на едно и също диференциално уравнение (13), то те са равни помежду си до константа, която се намира веднага, като се сравнят двете функция за $x=\infty$ или $x=0$ и получаваме

$$K_{\delta}(x) = 2^{\delta-1} x^{-\delta} \Phi\left(\frac{x^2}{4}\right).$$

Оттук имаме

$$\Phi(x) = 2(\sqrt{x})^{\delta} K_{\delta}(2\sqrt{x}).$$

Така получихме за Ханкеловата функция $K_{\delta}(x)$ новата формула

$$K_{\delta}(x) = 2^{\delta-1} x^{-\delta} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4v}} v^{\delta-1} dv.$$

Някои предложения за сходимост на интеграл

Да разгледаме интеграла

$$(1) \quad \int_A^{\infty} \varphi(t) \Phi(xt) dt,$$

в който $\varphi(x)$ е интегрируема в смисъл на Лебег функция във всеки краен интервал. Имаме следните лесно доказуеми предложения:

1. Ако интегралът (1) е сходящ за едно $x = x_0 > 0$, то той е сходящ за всяко $x > x_0$.

Да поставим

$$\int_x^{\infty} \varphi(t) \Phi(x_0 t) dt = g(x).$$

Тогава имаме

$$\varphi(x) = -\frac{g'(x)}{\Phi(x_0 x)}.$$

С интегриране по части при $x_1 > x_0$, получаваме

$$(2) \quad \int_A^B \varphi(t) \Phi(x_1 t) dt = - \int_A^B g'(t) \frac{\Phi(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} dt = -g(B) \frac{\Phi(x_1 B)}{\Phi(x_0 B)} + g(A) \frac{\Phi(x_1 A)}{\Phi(x_0 A)} + \\ + \int_A^B g(t) \frac{d}{dt} \frac{\Phi(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} dt.$$

Като използваме асимптотичните формули за $\Phi(x)$ и $\Phi'(x)$ получаваме, $t \rightarrow \infty$,

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\Phi(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} = x_1 \frac{\Phi'(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} - x_0 \frac{\Phi(x_1 t)}{\Phi(x_0 t)} \cdot \frac{\Phi'(x_0 t)}{\Phi(x_0 t)} = O\left(e^{-2\sqrt{t}(V_{x_1} - V_{x_0})}\right).$$

Понеже $g(x)$ е ограничена, то от (2) и (3) следва сходимостта на интеграла (1) за $x = x_1$.

Следствие връзката на функцията $\Phi(x)$ с функцията $K_\delta(x)$ на Ханкел за имагинерни аргумент асимптотичните формули са в сила и за комплексни числа x , различни от отрицателно число. Тогава същите неравенства ни дават по-общото предложение.

Ако интегралът (1) е сходящ за едно x_0 , $\sqrt{x_0} = \alpha + i\beta$, то той е сходящ във всяка точка $x = \zeta + i\eta$, лежаща във вън от параболата $\zeta = \alpha^2 - \frac{\eta^2}{4\alpha^2}$.

2. Ако интегралът (1) е сходящ за едно $x = x_0 > 0$, то интегралът

$$(4) \quad \int_A^\infty \varphi(t) t^{\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{x}t} dt$$

е сходящ за всяко $x > x_0$. Обратно, ако интегралът (4) е сходящ за едно $x = x_0 > 0$, то и интегралът (1) е сходящ за всяко $x > x_0$.

Да означим, както преди с

$$\int_A^x \varphi(t) \Phi(x_0 t) dt = G(x).$$

По условие функцията $G(x)$ е ограничена за всяко $x > A$. За простота да въведем означението ($x_1 > x_0$)

$$t^k e^{-2\sqrt{x_1}t} = g(t), \quad k = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}.$$

Тогава за интеграла (4) при $B > A$ получаваме с интегриране по части

$$\int_A^B \varphi(t) t^k e^{-2\sqrt{x_1}t} dt = -G(B) \frac{g(B)}{\Phi(x_0 B)} + \int_A^B G(t) \frac{d}{dt} \frac{g(t)}{\Phi(x_0 t)} dt.$$

Но лесно се вижда, че при $x_1 > x_0$ ще имаме, $t \rightarrow \infty$,

$$\frac{d}{dt} \frac{g(t)}{\Phi(x_0 t)} = O\left(e^{-2\sqrt{t}(V_{x_1} - V_{x_0})}\right),$$

откъдето веднага следва сходимостта на интеграла (4) за $x > x_0$.

Обратната част се доказва напълно аналогично.

Решение на едно особено интегрално уравнение

Да разгледаме интегралното уравнение

$$(1) \quad f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(xt) \varphi(t) dt,$$

където $\Phi(x)$ е функцията

$$(2) \quad \Phi(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{t}} t^{\delta-1} dt.$$

Ще докажем следната теорема:

1. Нека $\varphi(x)$ е интегрируема във всеки краен интервал $(0, x)$, $x > 0$, функция и интегралът в (1) да е сходящ за някое число $x = c > 0$. Да образуваме последователно функциите $f_n(x)$, на основание на рекурентната формула

$$(3) \quad f_n(x) = x f''_{n-1}(x) + (1-\delta) f'_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad f_0(x) = f(x).$$

Тогава за всяко $a > 0$, за което

$$(4) \quad \int_a^x |\varphi(t) - \varphi(a)| dt = o(x-a), \quad x \rightarrow a,$$

ще имаме граничното равенство

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{2\pi n^{\delta-1} a^{n+1}} f_n\left(\frac{n^2}{a}\right) = \varphi(a).$$

На основание на предните ни резултати, знаем че за $x > c$ ще имаме

$$f'(x) = \int_0^{\infty} \Phi'(xt) t \varphi(t) dt, \quad f''(x) = \int_0^{\infty} \Phi''(xt) t^2 \varphi(t) dt,$$

от които равенства, използвайки диференциалното уравнение, на което удовлетворява функцията $\Phi(x)$, получаваме

$$f_1(x) = \int_0^{\infty} t \Phi(xt) \varphi(t) dt.$$

Продължавайки така получаваме изобщо, че

$$(6) \quad f_n(x) = \int_0^{\infty} t^n \Phi(xt) \varphi(t) dt.$$

Да пресметнем сега интеграла

$$A_n = \int_0^{\infty} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) dt.$$

Имаме

$$A_n = \int_0^{\infty} t^n dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{n^2 t}{\alpha v}} v^{\delta-1} dv = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\delta-1} dv \int_0^{\infty} t^n e^{-\frac{n^2 t}{\alpha v}} dt.$$

Със смяната $h = \frac{n^2 t}{\alpha v}$, получаваме

$$A_n = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{\delta-1} dv \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{n^{2n+2}} h^n e^{-h} dh = \alpha^{n+1} \Gamma(n+1) \Gamma(\delta+n+1) n^{-2n-2}.$$

Ще имаме формулата

$$(7) \quad \int_0^{\infty} t^n \Phi(gt) dt = \Gamma(n+1) \Gamma(n+\delta+1) g^{-n-1}, \quad g > 0.$$

По формулата на Стирлинг получаваме асимптотичната формула за A_n , (при $n \rightarrow \infty$)

$$A_n \sim \alpha^{n+1} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (\delta+n)^{\delta+n} e^{-\delta-n} \sqrt{2\pi(\delta+n)} \cdot n^{-2n-2},$$

откъдето ще имаме

$$(8) \quad g_n = \frac{1}{A_n} \sim \frac{e^{2n}}{2\pi \alpha^{n+1} n^{\delta-1}} = g'_n.$$

Нека n е така голямо, че $n^2/\alpha > c$. Да означим с $\varepsilon > 0$ произволно малко число. Ще докажем първо граничното равенство

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \int_0^{\frac{\alpha}{n^2}} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) \varphi(t) dt = 0,$$

Имаме

$$j_n = g_n \int_0^{\frac{\alpha}{n^2}} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) \varphi(t) dt = g_n \int_0^{\frac{\alpha}{n^2}} + g_n \int_{\frac{\alpha}{n^2}}^{\infty} = j'_n + j''_n.$$

Понеже $\Phi(x) \leq \Gamma(\delta)$, то за j'_n получаваме

$$|j'_n| < \Gamma(\delta) g_n \left(\frac{\alpha}{n^2}\right)^n \int_0^{\frac{\alpha}{n^2}} |\varphi(t)| dt = O\left(\frac{\alpha^n}{n^{2n}} \cdot \frac{e^{2n}}{\alpha^{n+1} n^{\delta-1}}\right),$$

откъдето следва веднага, че $\lim_{n \rightarrow \infty} j'_n = 0$. За интеграла j''_n имаме

$$|j_n''| < M g_n \left(\frac{n^2}{a}\right)^k \int_{\frac{a}{n^2}}^{a-\varepsilon} |\varphi(t)| t^{n+k} e^{-2n\sqrt{\frac{t}{a}}} dt, \quad k = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}.$$

За функцията

$$\psi(t) = t^{n+k} e^{-2n\sqrt{\frac{t}{a}}}$$

получаваме

$$\psi'(t) = \psi(t) \left(\frac{n+k}{t} - \frac{n}{\sqrt{ta}} \right).$$

Производната $\psi'(t)$ се анулира при

$$t = t_0 = \left(\frac{n+k}{n} \right)^2 a \sim a, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, следователно, $\psi(t)$, е растяща функция, при достатъчно големи n в интервала $(0, a-\varepsilon)$. Така получаваме неравенството

$$|j_n''| < M g_n \left(\frac{n^2}{a}\right)^k (a-\varepsilon)^{n+k} e^{-2n\sqrt{\frac{a-\varepsilon}{a}}} l, \quad l = \int_0^{a-\varepsilon} |\varphi(t)| dt.$$

Като поставим $a-\varepsilon = aq^2$, $0 < q < 1$, ще имаме

$$|j_n''| < M l \frac{e^{2n n^2 k}}{a n^{\delta-1}} q^{2n+2k} e^{-2nq},$$

откъдето получаваме

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|j_n''|} \leq q e^{1-q}.$$

Понеже $q e^{1-q} < 1$, то следва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} j_n'' = 0$, с което доказателството на (9) се привършва.

Ще изследваме сега интеграла

$$a_n = g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right) \varphi(t) dt = g_n \int_{a-\varepsilon}^a + g_n \int_a^{a+\varepsilon} = a_n' + a_n''.$$

Нека $\eta > 0$ е произволно малко число и $\varepsilon > 0$ е така избрано, че

$$(11) \quad \int_a^x |\varphi(t) - \varphi(a)| dt < \eta |x-a|, \quad |x-a| \leq \varepsilon.$$

Да разгледаме интеграла a_n'' . Имаме

$$a_n'' = g_n \int_a^{a+\varepsilon} t^n [\varphi(t) - \varphi(a)] \Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right) dt + g_n \varphi(a) \int_a^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right) dt = b_n' + b_n''.$$

Като означим с

$$G(x) = \int_a^x |\varphi(t) - \varphi(a)| dt$$

получаваме за b_n' неравенството

$$b_n' < M \frac{n^{2k}}{\alpha^k} g_n \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k} G(t) e^{-2n\sqrt{\frac{t}{\alpha}}} dt = M \frac{n^{2k}}{\alpha^k} g_n (\alpha + \varepsilon)^{n+k} G(\alpha + \varepsilon) e^{-2n\sqrt{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha}}} - \\ - M \frac{n^{2k}}{\alpha^k} g_n \int_a^{a+\varepsilon} G(t) t^{n+k-1} \left(n+k - n\sqrt{\frac{t}{\alpha}} \right) e^{-2n\sqrt{\frac{t}{\alpha}}} dt = \delta_n - M \frac{n^{2k}}{\alpha^k} g_n \delta_n'.$$

Като поставим в δ_n , $\alpha + \varepsilon = \alpha r^2$, $1 < r$, то, както преди лесно виждаме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\delta_n} \leq e^{1-r} r < 1$, с което се доказва, че $\lim \delta_n = 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Интегралът δ_n' представяме така

$$\delta_n' = n \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k-1} G(t) \left(1 - \sqrt{\frac{t}{\alpha}} \right) e^{-2n\sqrt{\frac{t}{\alpha}}} dt + \\ + k \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k-1} G(t) e^{-2n\sqrt{\frac{t}{\alpha}}} dt = \gamma_n' + \gamma_n'' k.$$

На основание на (11) за γ_n' ще имаме

$$|\gamma_n'| < n\eta \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k-1} (t-\alpha) \left(\sqrt{\frac{t}{\alpha}} - 1 \right) e^{-2n\sqrt{\frac{t}{\alpha}}} dt.$$

Поставяме тук $t = \alpha u^2$, $\alpha + \varepsilon = \alpha r^2$, $r > 1$, и получаваме

$$|\gamma_n'| < 2n\eta \int_1^r \alpha^{n+k+1} u^{2n+2k-1} (u^2 - 1) (u - 1) e^{-2nu} du$$

или

$$|\gamma_n'| < \alpha^{n+k+1} 2(1+r)n\eta \nu \int_1^r u^{2n} (u-1)^2 e^{-2nu} du, \quad \nu = \max(1, r^{2k-1}).$$

Да изучим интеграла

$$\tau_n = \int_1^r u^{2n} (n-1)^2 e^{-2nu} du = \int_1^r (u-1)^2 e^{-2nh(u)} du,$$

$$h(u) = u - \log u.$$

Понеже

$$h'(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad h'(1) = 0, \quad h''(u) = \frac{1}{u^2},$$

то ще имаме

$$h(u) > 1 + \frac{1}{2}(u-1)^2.$$

Следователно, ще имаме

$$\tau_n < e^{-2n} \int_1^r (u-1)^2 e^{-n(u-1)^2} du < e^{-2n} \int_1^\infty (u-1)^2 e^{-n(u-1)^2} du = \frac{e^{-2n} \sqrt{\pi}}{4n^{3/2}}.$$

Оттук получаваме

$$|\gamma_n'| < 2\alpha^{n+k+1}(1+r)\eta\nu \frac{e^{-2n\sqrt{\pi}}}{4\sqrt{n}},$$

откъдето следва неравенството

$$M \frac{n^{2k}}{\alpha^k} g_n |\gamma_n'| < M' \eta,$$

където M' е константа, независеща от n . За γ_n'' имаме

$$|\gamma_n''| < \eta \int_a^{a+\varepsilon} t^{n+k-1} (t-a) e^{-2n\sqrt{\frac{t}{a}}} dt.$$

Със смяната $t = au^2$, $a + \varepsilon = ar^2$, получаваме

$$\begin{aligned} |\gamma_n''| &< 2\eta\alpha^{n+k+1} \int_1^r u^{2n+2k-1} (u-1) e^{-2nu} du < \\ &< 2\eta\nu\alpha^{n+k+1} \int_1^r u^{2n} (u-1) e^{-2nu} du, \end{aligned}$$

където $\nu = \max(1, r^{2k-1})$. Както преди получаваме неравенството

$$\int_1^r u^{2n} (u-1) e^{-2nu} du < \int_1^\infty u^{2n} (u-1) e^{-2nu} du < e^{-2n} \int_1^\infty (u-1) e^{-n(u-1)^2} du = \frac{1}{n},$$

откъдето следва, че

$$\frac{n^{2k}}{\alpha^k} g_n \cdot |\gamma_n''| < \frac{\nu}{k} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Така получихме, че

$$g_n \int_a^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) \varphi(t) dt = \varphi(a) g_n \int_a^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) dt + \lambda_n' + o(1),$$

където имаме $|\lambda_n| < M'' \eta$, M'' бидейки константа, независима от n .
Подобно напълно ще имаме

$$g_n \int_{a-\varepsilon}^a t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) \varphi(t) dt = \varphi(a) g_n \int_{a-\varepsilon}^a t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) dt + \lambda_n' + o(1)$$

с $|\lambda_n'| < M''' \eta$, M''' бидейки константа. От двете горни равенства ще имаме

$$(12) \quad g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) \varphi(t) dt = \varphi(a) g_n \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{\alpha} t\right) dt + \mu_n + o(1),$$

с $|\mu_n| < M_1 \eta$, M_1 константа.

Ще установим сега, че интегралът

$$T_n = g_n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right) \dot{\varphi}(t) dt$$

клони към нула, когато $n \rightarrow \infty$. Понеже интегралът е предположен сходящ за $x=c>0$, функцията

$$\psi(x) = \int_x^{\infty} \varphi(t) \Phi(ct) dt$$

е ограничена. Понеже

$$\varphi(x) = -\frac{\psi'(x)}{\Phi(cx)},$$

то за T_n ще имаме

$$\begin{aligned} T_n &= -g_n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right) \frac{\psi'(t)}{\Phi(ct)} dt = g_n (a+\varepsilon)^n \Phi\left[\frac{n^2}{a}(a+\varepsilon)\right] \frac{\psi(a+\varepsilon)}{\Phi[c(a+\varepsilon)]} + \\ &+ g_n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \psi(t) \frac{d}{dt} \left[t^n \frac{\Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right)}{\Phi(ct)} \right] dt = l_n + l_n'. \end{aligned}$$

За l_n имаме неравенството, $a+\varepsilon=aq^2$, $q>1$,

$$|l_n| < M' \frac{e^{2n}}{n^{\delta-1}} q^{2n+2k} n^{2k} e^{-2nq}, \quad k = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4},$$

където M' е константа и оттук получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|l_n|} \leq qe^{1-q} < 1,$$

което показва, че $\lim l_n = 0$. За l_n' имаме

$$l_n' = g_n n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \psi(t) t^{n-1} \frac{\Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right)}{\Phi(ct)} dt + g_n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \psi(t) t^n \frac{d}{dt} \frac{\Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right)}{\Phi(ct)} dt = h_n' + h_n''.$$

За h_n' получаваме неравенството

$$|h_n'| < M'' n g_n \left(\frac{n^2}{ac}\right)^k \int_{a+\varepsilon}^{\infty} t^{n-1} e^{-2n} \sqrt[n]{\frac{t}{a} + 2} \sqrt[n]{ct} dt.$$

Със смяната $t=au^2$, $a+\varepsilon=ar^2$, интегралът за $|h_n'|$ става

$$|h_n'| < 2M'' n g_n \left(\frac{n^2}{ac}\right)^k a^n \int_r^{\infty} u^{2n-1} e^{-2u(n-\theta)} du, \quad \theta = \sqrt{ca}.$$

По-нататък имаме

$$\begin{aligned}
& \int_r^\infty u^{2n-1} e^{-2u(n-\theta)} du < \int_r^\infty u^{2n} e^{-2u(n-\theta)} du = \\
& = r^{2n} e^{-2r(n-\theta)} \int_0^\infty \left(1 + \frac{v}{r}\right)^{2n} e^{-2v(n-\theta)} dv = \\
& = r^{2n} e^{-2r(n-\theta)} \frac{1}{n-\theta} \int_0^\infty \left[1 + \frac{\tau}{r(n-\theta)}\right]^{2n} e^{-2\tau} d\tau < \\
& < r^{2n} e^{-2r(n-\theta)} \frac{1}{n-\theta} \int_0^\infty e^{-2\tau(1-\frac{1}{r})} (1+\tau)^{2\theta} d\tau.
\end{aligned}$$

Следователно, за h_n' ще имаме

$$|h_n'| < M''' n^{3/2} (ac)^{-k} a^{-1} r^{2n} e^{-2r(n-\theta)} \frac{e^{2n}}{n-\theta},$$

откъдето получаваме

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|h_n'|} \leq r e^{1-r} < 1.$$

Следователно ще имаме

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n' = 0.$$

Остава да се изучи интеграла

$$h_n'' = g_n \frac{n^2}{a} \int_{a+\varepsilon}^\infty \psi(t) t^n \frac{\Phi'\left(\frac{n^2}{a} t\right)}{\Phi(ct)} dt - c g_n \int_{a+\varepsilon}^\infty \psi(t) t^n \frac{\Phi'(ct) \Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right)}{\Phi^2(ct)} dt = a_n - \beta_n$$

На основание на асимптотичните формули за $\Phi(x)$ и $\Phi'(x)$ получаваме неравенствата

$$\begin{aligned}
|a_n| & < M_1 g_n n^2 \left(\frac{n^2}{c}\right)^k \int_{a+\varepsilon}^\infty t^n e^{-2n\sqrt{\frac{t}{a}} + \sqrt{ct}} dt, \\
|\beta_n| & < M_2 g_n \left(\frac{n^2}{c}\right)^k \int_{a+\varepsilon}^\infty t^n (ct)^{-\frac{1}{2}} e^{-2n\sqrt{\frac{t}{a}} + \sqrt{ct}} dt,
\end{aligned}$$

с M_1 и M_2 константи. Последните интегрални имат формата на интеграла δ'_n и по напълно подобен начин виждаме, че ще имаме граничните неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq r e^{1-r}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\beta_n|} \leq r e^{1-r},$$

от които следва, че $\lim a_n = 0$ и $\lim \beta_n = 0$, т. е. $\lim h_n'' = 0$, $\lim L_n' = 0$.

Ако разгледаме специално функцията $\varphi(t) = 1$, то, понеже в случая интегралът

$$\int_0^{\infty} \Phi(ct) dt$$

е сходящ за всяко $c > 0$, което веднага се вижда въз основа на асимптотичната формула за $\Phi(x)$, от (9) и (14) получаваме, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \int_0^{a-\varepsilon} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right) dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \int_{a+\varepsilon}^{\infty} t^n \Phi\left(\frac{n^2}{a} t\right) dt = 0.$$

Теоремата следва от граничните равенства.

От самото доказателство се вижда, че ако условието (4) е равномерно изпълнено за един интервал $0 < a < a < b$, то равенството (5) е изпълнено също равномерно.

В частен случай от теорема 1. получаваме, че равенството (5) е верно за всяко значение a на x , за което функцията $\varphi(x)$ е непрекъснатата. На основание на известната теорема на Лебег следва от теорема 1., че граничното равенство (5) е в сила за почти всички точки от всеки краен интервал.

Особени интегрални уравнения със Стилтесов интеграл

В този параграф ще разгледаме решението на особеното интегрално уравнение

$$(1) \quad F(x) = \int_0^{\infty} \Phi(xt) d\omega(t),$$

където $\omega(x)$ е функция с ограничена вариация във всеки краен интервал $(0, x)$, $x > 0$. Предварително ще установим една помощна теорема.

Нека интегралът (1) е сходящ за едно $x = x_0 > 0$. Тогава за $x > x_0$ имаме

$$(2) \quad \omega(x) = o\left(\frac{1}{\Phi(x_0 x)}\right).$$

Да означим с $g(x)$ функцията

$$g(x) = \int_0^x \Phi(x_0 t) d\omega(t), \quad g(x) \rightarrow c, \quad x \rightarrow \infty.$$

Тогава имаме

$$\omega(x) - \omega(0) = \int_0^x \frac{dg(t)}{\Phi(x_0 t)}.$$

С интегриране по части, получаваме

$$\omega(x) - \omega(0) = \frac{g(x)}{\Phi(x_0 x)} - \int_0^x g(t) d \frac{1}{\Phi(x_0 t)}.$$

Оттук имаме

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x_0 x) [\omega(x) - \omega(0)] = c - \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x_0 x) \int_0^x g(t) d \frac{1}{\Phi(x_0 t)}$$

или

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x_0 x) [\omega(x) - \omega(0)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x_0 x) \int_0^x [c - g(t)] d \frac{1}{\Phi(x_0 t)}.$$

Нека $\eta > 0$ е произволно малко число и $\varepsilon > 0$ е така избрано, че при $x > N$ да имаме $|c - g(x)| < \eta$. Понеже функцията $\frac{d}{dt} \Phi(x_0 t)$ е отрицателна, то ще имаме, $x > N$,

$$(3) \quad \Phi(x_0 x) \left| \int_N^x [c - g(t)] d \frac{1}{\Phi(x_0 t)} \right| < \eta \Phi(x_0 x) \int_N^x d \frac{1}{\Phi(x_0 t)} < \eta.$$

От друга страна при всяко фиксирано N имаме

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x_0 x) \int_0^N [c - g(t)] d \frac{1}{\Phi(x_0 t)} = 0.$$

От (3) и (4) следва, че

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x_0 x) [\omega(x) - \omega(0)] = 0$$

с което теоремата е установена.

Да разгледаме сега интегралното уравнение

$$(5) \quad f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) d\omega(t),$$

където функцията $\omega(t)$ е с ограничена вариация във всеки краен интервал $(0, x)$ и нормирана, т. е. за всяка точка на прекъснатост x полагаме

$$(6) \quad \omega(x) = \frac{1}{2} [\omega(x+0) + \omega(x-0)]$$

и освен това $\omega(0) = 0$. Ще установим следната теорема:

Ако образуваме последователно функциите $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $f_0(x) = f(x)$, $f_n(x) = x f_{n-1}''(x) + (1 - \delta) f_{n-1}'(x)$, $n \geq 1$, и предложим, че интегралът в (5) е сходящ за някое $x = x_0 > 0$, то имаме за всяко $x > 0$ пределното равенство

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x A(n, u) du = \omega(x) - \omega(+0),$$

където $A(n, u)$ означава израза

$$(8) \quad A(n, u) = \frac{g_n''}{u^{n+1}} f_n\left(\frac{n^2}{u}\right), \quad g_n'' = \frac{e^{2n}}{2\pi n^{2-1}}.$$

За $f_n(x)$ имаме формулата

$$(9) \quad f_n(x) = \int_0^\infty t^n \Phi(xt) d\omega(t).$$

Понеже функцията $\frac{t^n}{u^n} \Phi\left(\frac{n^2 t}{u}\right)$ е хомогенна от степен нула, то по тождеството на Ойлер имаме

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{t}{u}\right)^n \Phi\left(\frac{n^2 t}{u}\right) \right] = -\frac{u}{t} \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{t}{u}\right)^n \Phi\left(\frac{n^2 t}{u}\right) \right].$$

От друга страна с интегриране по части, като вземем под внимание, че $\omega(x) = O\left(\frac{1}{\Phi(x_0 x)}\right)$ получаваме

$$A(n, u) = -g_n'' \int_0^\infty \omega(t) \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{t}{u}\right)^n \Phi\left(\frac{n^2 t}{u}\right) \right] dt.$$

На основание на (10) този интеграл става

$$A(n, u) = g_n'' \int_0^\infty \omega(t) \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{t^{n-1}}{u^n} \Phi\left(\frac{n^2 t}{u}\right) \right] dt.$$

Нека $B > b > 0$ са произволни числа. От горната формула получаваме

$$(10') \quad \int_b^B A(n, u) du = g_n'' \int_0^\infty \omega(t) \Phi\left(\frac{n^2 t}{u}\right) \frac{t^{n-1}}{B^n} dt - g_n'' \int_0^\infty \omega(t) \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{b^n} dt = \\ = \alpha_n - \beta_n.$$

Интегралът β_n може да се пише така

$$\beta_n = g_n'' \int_0^\infty [\omega(t) - \omega(+0)] \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{b^n} dt + g_n'' \omega(+0) \int_0^\infty \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{b^n} dt.$$

Но имаме

$$\int_0^\infty \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{b^n} dt = \int_0^\infty \Phi(n^2 v) v^{n-1} dv = \int_0^\infty v^{n-1} dv \int_0^\infty e^{-\frac{n^2 v}{\tau}} \tau^{2-1} d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\delta-1} d\tau \int_0^{\infty} v^{k-1} e^{-\frac{n^2 v}{\tau}} dv = \frac{1}{n^{2n}} \Gamma(\delta+n) \Gamma(n) = A_n' \sim A_n.$$

Нека $\eta > 0$ е произволно малко число и $\varepsilon > 0$ е така избрано, че

$$|\omega(t) - \omega(+0)| < \eta$$

за $t < \varepsilon$. Тогава имаме

$$\begin{aligned} |j_n'| &= g_n'' \left| \int_0^{\varepsilon} [\omega(t) - \omega(+0)] \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{b^n} dt \right| < g_n'' \eta \int_0^{\varepsilon} \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{b^n} dt \\ &< g_n'' \eta \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{b^n} dt = g_n'' \eta A_n'. \end{aligned}$$

Да разгледаме сега интеграла

$$j_n'' = g_n'' \int_0^{\infty} [\omega(t) - \omega(+0)] \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{b^n} dt.$$

Понеже за $x > x_0$ имаме

$$|\omega(x)| < K \frac{1}{\Phi(x_0 x)},$$

където K е константа, независима от x , то ще имаме неравенството

$$\begin{aligned} |j_n''| &< K g_n'' \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{n^2 t}{b}\right) \frac{t^{n-1}}{\Phi(x_0 t) b^n} dt < \\ &< K_1 g_n'' b^{-n} \int_0^{\infty} t^{n-1} \left(\frac{n^2 t}{b x_0 t}\right)^k e^{-2n\sqrt{\frac{t}{b}} - 2\sqrt{x_0 t}} dt. \end{aligned}$$

Нека $\delta_1 > 0$ е едно фиксирано число. Да изберем $b_1 > 0$ така, че $\frac{n}{2\sqrt{b}} - \sqrt{x_0} > \delta_1$, $b \leq b_1$. Ще имаме за тези стойности на b неравенството

$$e^{-2n\sqrt{\frac{t}{b}} + 2\sqrt{x_0 t}} < e^{-2\sqrt{t}\left(\delta_1 + \frac{n}{2\sqrt{b}}\right)}$$

и, следователно, за J_n' ще имаме

$$|j_n''| < K_1 g_n'' \frac{n^{2k}}{b^{n+k}} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-2\delta_1 \sqrt{t} - 2\frac{n}{\sqrt{b}} \sqrt{t}} dt \leq \\ \leq K_1 g_n'' \frac{n^{2k}}{b^{n+k}} e^{-n\sqrt{\frac{2}{b}}} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-2\delta_1 \sqrt{t}} dt,$$

където K_1 е константа, независима от t . Понеже

$$\lim_{b \rightarrow 0} b^{-n-k} e^{-n\sqrt{\frac{2}{b}}} = 0$$

то следва, че интегралът j_n' клони към нула при $b \rightarrow 0$. Като поставим тогава в (10') $b \rightarrow 0$, получаваме формулата

$$\int_{+0}^B A(n, u) du = g_n'' \int_0^\infty \omega(t) \Phi\left(\frac{n^2 t}{B}\right) \frac{t^{n-1}}{B^n} dt - g_n'' A_n' \omega(+0).$$

Оттук, при $n \rightarrow \infty$, получаваме, на основание на предната теорема,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{+0}^B A(n, u) du = \omega(B) - \omega(+0).$$

За да привършим доказателството на теоремата, трябва да установим, че

$$\int_{+0}^B A(n, u) du = \int_0^B A(n, u) du,$$

за всяко $B > 0$. За това достатъчно е да докажем сходимостта на интеграла

$$\int_C^\infty x^{n-1} |f_n(x)| dx.$$

Представяме функцията $f_n(x)$ в сума от два интеграла

$$f_n(x) = \int_0^1 t^n \Phi(xt) d\omega(t) + \int_1^\infty t^n \Phi(xt) d\omega(t) = g_1(x) + g_2(x).$$

Имаме

$$j = \int_C^\infty x^{n-1} |g_1(x)| dx \leq \int_C^\infty x^{n-1} dx \int_0^1 t^n \Phi(xt) |d\omega(t)| = \\ = \int_C^\infty x^{n-1} dx \int_0^1 t^n |d\omega(t)| \int_0^\infty e^{-\frac{xt}{\tau}} \tau^{k-1} d\tau.$$

С интегриране по части, получаваме

$$\int_C^\infty x^{n-1} e^{-\frac{x}{t}} dx = e^{-\frac{C}{t}} \left[\frac{t}{C} C^{n-1} + (n-1) \frac{t^2}{C^2} + \dots + (n-1)! \frac{t^{n-1}}{C^{n-1}} \right]$$

и следователно, ще имаме, $C > 1$,

$$j \leq C^{n-1} \int_0^1 t^n |d\omega(t)| \int_0^\infty e^{-t} e^{-\frac{Ct}{t}} t^{\delta-1} \left[\frac{t}{t} + (n-1) \frac{t^2}{t^2} + \dots + (n-1)! \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} \right] dt$$

$$< C^{n-1} \int_0^1 |d\omega(t)| [\Gamma(\delta+1)t^{n-1} + (n-1)! \Gamma(\delta+2)t^{n-2} + \dots + (n-1)! \Gamma(\delta+n)] dt,$$

т. е. интегралът j е сходящ. Да изберем $C > x_0$. С интегриране по части ще имаме

$$g_2(x) = -\omega(1)\Phi(x) - \int_1^\infty [nt^{n-1}\Phi(xt) + xt^n\Phi'(xt)]\omega(t)dt$$

откъдето получаваме

$$j = \int_C^\infty x^{n-1} |g_2(x)| dx \leq |\omega(1)| \int_C^\infty x^{n-1} \Phi(x) dx + n \int_C^\infty x^{n-1} dx \int_1^\infty t^{n-1} \Phi(xt) |\omega(t)| dt + \int_C^\infty x^{n-1} dx \int_1^\infty t^n |\Phi'(xt)| |\omega(t)| dt = j_1 + j_2 + j_3.$$

Първият интеграл е очевидно сходящ. Понеже $\omega(x) = O\left(\frac{1}{\Phi(x_0x)}\right)$ този за втория имаме

$$j_2 < K'n \int_C^\infty x^{n-1} dx \int_1^\infty t^{n-1} \frac{\Phi(xt)}{\Phi(x_0t)} dt.$$

или

$$j_2 < K'' \frac{n}{x_0^k} \int_C^\infty x^{n+k-1} dx \int_1^\infty t^{n-1} e^{-2\sqrt{x_0t} + 2\sqrt{x_0x}} dt$$

$$\leq \frac{n}{x_0^k} K'' \int_C^\infty x^{n+k-1} dx \int_1^\infty t^{n-1} e^{-2\sqrt{x_0t} (1-\delta')} dt, \quad \delta' > \sqrt{\frac{x_0}{x}}, \quad x > M, \quad 0 < \delta' < 1.$$

Но $tx \geq C$ и при достатъчно голямо C ще имаме $e^{-2\sqrt{x_0t} (1-\delta')} t^{n-1} x^{n+k-1} < (xt)^{-2}$ и за интеграла j_2 получаваме

$$j_2 < K''' \int_0^{\infty} \int_1^{\infty} x^{-2} t^{-2} dx dt < \infty,$$

с което е установена сходимостта на този интеграл. Подобно се установява сходимостта и на интеграла

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} |g_2(x)| dx.$$

Доказателство на теоремата за представяне със Стилтесов интеграл

В уводните си бележки споменах за теоремата за представяне на реални функции $f(x)$ с интеграла

$$(1) \quad f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(xt) d\omega(t),$$

където $\omega(t)$ е монотонно растяща и ограничена функция за $t \geq 0$. Тази теорема получих в цитираната ми работа в Годишника на Соф. университет чрез трансформация от друга еквивалентна теорема, която установих в същата работа. Тук ще изложа едно по-съкратено извеждане, което по принцип не се различава от предишното ми доказателство, но не използвам трансформацията на Лаплас. Освен това изчисленията са и по-прости.

Следвайки начина на доказване, употребен от мене в няколко вече работи, получавам следната теорема:

Нека $f(x)$ е реална функция, която за $x > a > 0$, да допуска до $2n$ -та производна и да удовлетворява на следните условия:

Съществува една неограничено растяща редица от числа $\{x_n\}$ за която имаме

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{x_n^{\delta}} = 0$$

където δ е произволно число, $0 < \delta < 1$. Ако образуваме функциите

$$f_0(x) = f(x), \quad f_k(x) = x f_{k-1}''(x) + (1-\delta) f_{k-1}'(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n,$$

то $f_n(x)$ е неотрицателна за $x > a$. Тогава имаме

$$f_k(x) \geq 0, \quad x > a, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$f_k'(x) \leq 0, \quad x > a, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1-\delta} f_k'(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Нека сега предположим, че $f(x_n)$ клони към определена граница c , която можем да предположим, че е равна на нула, разглеждайки вместо $f(x)$ функцията $f(x) - c$. Тогава от равенството

$$x^\delta \frac{d}{dx} \left[x^{1-\delta} f'_{n-1}(x) \right] = f_n(x)$$

получаваме

$$A^{1-\delta} f'_{n-1}(A) - x^{1-\delta} f'_{n-1}(x) = \int_x^A f_n(t) t^{-\delta} dt$$

откъдето, при $A \rightarrow \infty$, имаме

$$x^{1-\delta} f'_{n-1}(x) = - \int_x^\infty f_n(t) t^{-\delta} dt.$$

Оттук получавиме аналогично

$$f_{n-1}(x) = \int_x^\infty f_n(\tau) \tau^{-\delta} P_1(\tau, x) d\tau, \quad P_1(\tau, x) = \int_x^\tau t^{\delta-1} dt = \frac{1}{\delta} (\tau^\delta - x^\delta).$$

Продължавайки така, както в цитираната ми работа, получаваме общо

$$(4) \quad f_{n-k}(x) = \int_x^\infty f_n(u) u^{-\delta} P_k(u, x) du,$$

където $P_k(u, x)$ са дефинирани с рекурентната формула

$$(5) \quad P_{k+1}(\tau, x) = \frac{1}{\delta} \int_x^\tau t^{-\delta} (t^\delta - x^\delta) P_k(\tau, t) dt,$$

като

$$P_1(\tau, x) = \frac{1}{\delta} (\tau^\delta - x^\delta).$$

С помощта на трансформацията на Лаплас получаваме формулата

$$(6) \quad P_{k+1}(\tau, x) = \frac{1}{(k!)^2} \int_x^\tau v^{\delta-k-1} (v-x)^k (\tau-v)^k dv.$$

Ще докажем тази формула, независимо от трансформацията на Лаплас. Предполагаме, че тя е доказана за $P_{k+1}(\tau, x)$. Ще докажем верността ѝ за $P_{k+2}(\tau, x)$. Да образуваме интеграла

$$g = \frac{1}{\delta} \int_x^\tau t^{-\delta} (t^\delta - x^\delta) P_{k+1}(\tau, t) dt.$$

На основание на (6) със смена на реда на интегрирането, получаваме

$$g = \frac{1}{\delta(k!)^2} \int_x^{\tau} \nu^{\delta-k-1} (\tau-\nu)^k d\nu \int_x^{\nu} t^{-\delta} (t^{\delta}-x^{\delta}) (\nu-t)^k d\nu.$$

Но с интегриране по части имаме

$$\int_x^{\nu} t^{-\delta} (t^{\delta}-x^{\delta}) (\nu-t)^k dt = \frac{\delta x^{\delta}}{k+1} \int_x^{\nu} t^{-\delta-1} (\nu-t)^{k+1} dt.$$

Следователно, можем да пишем

$$g = \frac{x^{\delta}}{k!(k+1)} \int_x^{\tau} (\tau-\nu)^k \varphi(\nu) d\nu,$$

където

$$\varphi(\nu) = \nu^{\delta-k-1} \int_x^{\nu} t^{-\delta-1} (\nu-t)^{k+1} dt.$$

За g ще имаме

$$g = -\frac{x^{\delta}}{[(k+1)!]^2} \int_x^{\tau} \varphi(\nu) d(\tau-\nu)^{k+1} = \frac{x^{\delta}}{[(k+1)!]^2} \int_x^{\tau} (\tau-\nu)^{k+1} \varphi'(\nu) d\nu.$$

За $\varphi'(\nu)$ получаваме

$$\begin{aligned} \varphi'(\nu) &= (\delta-k-1) \nu^{\delta-k-2} \int_x^{\nu} t^{-\delta-1} (\nu-t)^{k+1} dt + (k+1) \nu^{\delta-k-1} \int_x^{\nu} t^{-\delta-1} (\nu-t)^k dt \\ &= \delta \nu^{\delta-k-2} \int_x^{\nu} t^{-\delta-1} (\nu-t)^{k+1} dt + (k+1) [\nu^{\delta-k-1} \int_x^{\nu} t^{-\delta-1} (\nu-t)^k dt - \\ &\quad - \nu^{\delta-k-2} \int_x^{\nu} t^{-\delta-1} (\nu-t)^{k+1} dt] \\ &= \delta \nu^{\delta-k-2} \int_x^{\nu} t^{-\delta-1} (\nu-t)^{k+1} dt + (k+1) \nu^{\delta-k-2} \int_x^{\nu} t^{-\delta} (\nu-t)^k dt = \\ &= -\nu^{\delta-k-2} \int_x^{\nu} (\nu-t)^{k+1} dt^{-\delta} + (k+1) \nu^{\delta-k-2} \int_x^{\nu} t^{-\delta} (\nu-t)^k dt = \\ &= x^{-\delta} \nu^{\delta-k-2} (\nu-x)^{k+1}. \end{aligned}$$

Следователно, ще имаме

$$g = \frac{1}{((k+1)!)^2} \int_x^{\tau} \nu^{\delta-k-2} (\nu-x)^{k+1} (\tau-\nu)^{k+1} d\nu = P_{k+2}(\tau, x).$$

Така виждаме, че формулата (6) е верна и за $k+2$ т. е. тя е верна за всяко $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Нека сега $f(x)$ е реална функция, неограничено пъти диференцируема за $x>0$, като за една неограничено растяща редица от числа от $x_1, x_2, \dots f(x_n)$ да клони към определена граница c при $x_n \rightarrow \infty$, $f(0)=f(+0)$. Освен това функциите $f_n(x)$, дефинирани с рекурентната зависимост

$$f_n(x) = x f''_{n-1}(x) + (1-\delta) f'_{n-1}(x), \quad f_0(x) = f(x),$$

да са неотрицателни за $x>0$. Тогава по формулата (5) ще имаме

$$f(x) = c + \int_x^\infty f_{n+1}(u) u^{-\delta} P_{n+1}(u, x) du,$$

където

$$P_{n+1}(u, x) = \frac{1}{(n!)^2} \int_x^u v^{\delta-n-1} (v-x)^n (u-v)^n dv.$$

От предната формула имаме

$$P_{n+1}(u, 0) = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^u v^{\delta-k-1} (u-v)^n v^n dv = \frac{u^{n+\delta}}{(n!)^2} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\delta)}{\Gamma(n+1+\delta)}.$$

Ако въведем означенията

$$Q_{n+1}(u, x) = \frac{P_{n+1}(u, x)}{P_{n+1}(u, 0)}, \quad f_{n+1}(u) u^{-\delta} P_{n+1}(u, 0) = g_n(u),$$

получаваме

$$(7) \quad f(x) = c + \int_x^\infty Q_{n+1}(u, x) g_n(u) du.$$

Със смяната на променливото $u = \frac{n^2}{t}$ имаме

$$(8) \quad f(x) = c + \int_0^{\frac{n^2}{x}} Q_{n+1}\left(\frac{n^2}{t}, x\right) h_n(t) dt, \quad h_n(t) = g_n\left(\frac{n^2}{t}\right) \cdot \frac{n^2}{t^2}.$$

Нека $\omega_n(t)$ е функция, дефинирана по следния начин:

$$\omega_n(t) = \int_0^t h_n(\tau) d\tau \text{ за } t \leq \frac{n^2}{x}, \quad \omega_n(t) = \omega_n\left(\frac{n^2}{x}\right) \text{ за } t > \frac{n^2}{x}. \quad \text{Тогава формулата}$$

(8) добива вида

$$(9) \quad f(x) = c + \int_0^\infty Q_{n+1}\left(\frac{n^2}{t}, x\right) d\omega_n(t).$$

Със смяната $\tau = \frac{n}{t} \tau$ получаваме за $Q_{n+1}\left(\frac{n^2}{t}, x\right)$ изрази

$$Q_{n+1}\left(\frac{n^2}{t}, x\right) = \lambda_n \int_{\frac{y}{n}}^n \tau^{\delta-1} \left(1 - \frac{tx}{n\tau}\right)^n \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n d\tau, \quad \lambda_n = \frac{\Gamma(n+1+\delta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\delta)} n^{-\delta} \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\delta)}.$$

Лесно е да докажем, че функцията

$$T_n(y) = \int_{\frac{y}{n}}^n \tau^{\delta-1} \left(1 - \frac{y}{n\tau}\right)^n \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n d\tau$$

клови към функцията

$$\Phi(y) = \int_0^\infty \tau^{\delta-1} e^{-\frac{y}{\tau}-\tau} d\tau,$$

когато n расте неограничено. Действително при произволни числа A и B , $0 < A < B$ имаме ($y > 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A^B \tau^{\delta-1} \left(1 - \frac{y}{n\tau}\right)^n \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n d\tau = \int_A^B \tau^{\delta-1} e^{-\frac{y}{\tau}-\tau} d\tau.$$

Понеже

$$\left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n < e^{-\tau}, \quad \tau \leq n,$$

то можем да изберем B така голямо, че

$$\int_B^n \tau^{\delta-1} \left(1 - \frac{y}{n\tau}\right)^n \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n d\tau < \int_B^n \tau^{\delta-1} e^{-\tau} d\tau < \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\infty \tau^{\delta-1} e^{-\frac{y}{\tau}-\tau} d\tau < \frac{\varepsilon}{2}$$

и A така малко, че

$$\int_{\frac{y}{n}}^A \tau^{\delta-1} \left(1 - \frac{y}{n\tau}\right)^n \left(1 - \frac{\tau}{n}\right)^n d\tau < \int_0^A \tau^{\delta-1} d\tau < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_0^A \tau^{\delta-1} e^{-\frac{y}{\tau}-\tau} d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тук $\varepsilon > 0$ е произволно малко число.

С горните неравенства твърдението е установено.

Понеже монотонните функции $\omega_n(t)$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$ са ограничени за $t \geq 0$, то по теоремата на Хели съществува подредица

$$\omega_{n_1}(t), \quad \omega_{n_2}(t), \quad \omega_{n_3}(t), \dots,$$

която клони към една монотонно растяща функция $\omega(t)$.

Като дадем на n редицата стойности $n_1, n_2, n_3, \dots$, то от предните резултати по теорема на Хели получаваме равенството

$$f(x) = c + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{\infty} \Phi(xt) d\omega(t).$$

Като вземем под внимание, че ако $c > 0$, то константата c се представя със Стилтесов интеграл от разглеждания вид, то ще имаме

$$f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(xt) dh(t).$$

където $h(t)$ е монотонно растяща и ограничена функция за $t \geq 0$.

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ РЕАЛЬНЫХ ФУНКЦИИ

Н. Обрешков

Резюме

Обозначим через $\Phi(x)$ функцию, определенную для $x > 0$ сходящимися интегралом

$$(1) \quad \Phi(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{t}-t^{\delta-1}} dt,$$

где $\delta > 0$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$(2) \quad f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(xt) \varphi(t) dt.$$

Здесь мы дадим решение этого уравнения, используя операторы вида, напоминающего оператор Пост-Уиндера для уравнения Лапласа.

Теорема. Пусть $\varphi(x)$ есть функция, интегрируемая в каждом интервале $(0, x)$, $x > 0$, и интеграл (2) сходящийся для некоторого $x = c > 0$. Образует для $x > 0$ ряд функции

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots,$$

определенных при помощи рекуррентной

$$f_n(x) = x f''_{n-1}(x) + (1-\delta) f'_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Тогда в каждой $x = a$ в которой

$$\int_a^{a+h} |\varphi(t) - \varphi(a)| dt = o(h), h \rightarrow 0,$$

имеем предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{2\pi a^{n+1} n^{\delta-1}} f_n\left(\frac{n^2}{a}\right) = \varphi(a).$$

Имеем $\Phi(x) = 2(\sqrt{x})^{\delta} K_{\delta}(2\sqrt{x})$, где $K_{\delta}(t) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2} \delta i \pi} H_{\delta}^{(1)}(it)$ есть функция Ханкеля для мнимого аргумента.