ВЪРХУ ЕДНА НОВА ФОРМА НА УРАВНЕНИЯТА НА АНАЛИТИЧНАТА ДИНАМИКА И НЯКОИ ПРИЛОЖЕНИЯ НА ТИЯ УРАВНЕНИЯ

от Иван Ценов

§ 1. Нова форма на уравненията на аналитичната динамика

В четири работи [1—4], публикувани през 1953 г. в „Доклады Академии Наук СССР“, ние изложихме в съкратен вид една нова форма на уравнението на динамиката, като направихме различни приложения на тия уравнения. В настоящата работа ще изложим по-подробно въпросите, разгледани в казаните работи, като някои от тях ще допълним и освен това ще направим и някои други приложения на новите уравнения.

Нека $q_1, q_2, \cdots, q_i, \cdots, q_s$ (или, съкратено, $[q_i]$) са обобщените координати на някоя холономна механична система. Тогава радиусвектора на всяка точка M от системата ще бъде функция на тия координати и на времето t:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M}([q_i], t).$$

За произволните и независими вариации $[\delta q_i]$ на координатите $[q_i]$, виртуалното преместване $\delta \overrightarrow{M}$ на точката M, съвместимо с приложените връзки на системата, каквито са в даден момент t, се дава от равенството:

$$\delta \overrightarrow{M} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Нека забележим, че по отношение на обобщените координати ние ще прилагаме тензорното правило за сумирането, а при сумирането по точките M от системата ще употребяваме знака Σ.

Като поставим израза на δM в общото уравнение на динамиката

$$\Sigma(-m\ddot{\overrightarrow{M}} + \overrightarrow{F})\delta \overrightarrow{M} = 0,$$

последното уравнение се разпада на следните уравнения на движението:

(1) $$P_i = Q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s),$$

гдето

$$(2) \qquad P_i = \Sigma m \ddot{\vec{M}} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}, \quad Q_i = \Sigma \vec{F} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}.$$

На тези уравнения ще дадем друга форма, като въведем кинетическата енергия на системата T и нейните първи две пълни производни спрямо времето t. Имаме:

$$(3) \qquad T = \frac{1}{2} \Sigma m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \Sigma m \dot{\vec{M}}^2,$$

$$(4) \qquad \dot{T} = \Sigma m \dot{\vec{M}} \ddot{\vec{M}}, \quad \ddot{T} = \Sigma m \ddot{\vec{M}}^2 + \Sigma m \dot{\vec{M}} \dddot{\vec{M}}.$$

От равенството

$$\dot{\vec{M}} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t},$$

намираме

$$(5) \qquad \ddot{\vec{M}} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + 2 \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2},$$

$$(6) \qquad \dddot{\vec{M}} = 3 \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k \ddot{q}_i + 3 \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial t} \ddot{q}_i +$$

$+$ членове, несъдържащи вторите производни от координатите $[q_i]$.

Като поставим (5) и (6) в (4), можем да напишем следното съотношение

$$(7) \qquad \frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} = 2 \Sigma m \ddot{\vec{M}} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} + 3 \Sigma m \dot{\vec{M}} \left(\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial t} \right).$$

От (3) получаваме

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \Sigma m \left(\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial t} \right)$$

и равенството (7) може да се напише във вида

$$\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} = 2 P_i + 3 \frac{\partial T}{\partial q_i}, \text{ отгдето } P_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3 \frac{\partial T}{\partial q_i} \right)$$

и уравненията на движението (1) на холономната система приемат формата:

$$(8) \qquad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3 \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Това е новата форма на уравнението на движението на холономната механична система.

Да въведем в тези уравнения функцията T_0, която е функцията T, но разгледана като функция само на координатите $[q_i]$ и

t, т. е. при фиксирани обобщени скорости $[\dot{q}_i]$; тогава от равенството

$$T_0 = T$$

получаваме

$$\dot{T}_0 = \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

$$\ddot{T}_0 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i,$$

като в дясната страна на последното равенство не сме написали, членовете, несъдържащи $[\ddot{q}_i]$. От това равенство получаваме

$$\frac{\partial \ddot{T}_0}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \tag{9}$$

и уравненията (8) се написват във вида,

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i, \tag{10}$$

гдето сме положили

$$R = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ \ddot{T}_0). \tag{11}$$

Функцията R, разбира се, се съвпада с енергията на ускорението

$$S = \frac{1}{2}\Sigma m \vec{\ddot{M}}^2,$$

въведена от Appell [5], с точност до събираемите, несъдържащи вторите производни на обобщените координати. И наистина, ако във функциите $\ddot{T}$, $\ddot{T}_0$, $2S = \Sigma m \vec{\ddot{M}}^2$ премахнем членовете, несъдържащи $[\ddot{q}_i]$, и ако така получените функции от $[\ddot{q}_i]$ означим пак с $\ddot{T}$, $\ddot{T}_0$, $2S$, то от второто равенство на (4) получаваме последователно

$$\ddot{T} = 2S + \Sigma m \vec{\dot{M}}\left(3\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial q_k}\dot{q}_k + 3\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_i \partial t}\right)\ddot{q}_i =$$

$$= 2S + 3\frac{\partial T}{\partial q_i}\ddot{q}_i = 2S + 3\ddot{T}_0,$$

отгдето, въз основа на (11) получаваме $R = S$.

Най-сетне, да въведем функцията

$$K = R - Q_i\ddot{q}_i = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ \ddot{T}_0) - Q_i\ddot{q}_i; \tag{12}$$

при случая, когато дадените сили произхождат от функцията на сили $U([q_i], t)$, имаме

$$K=R-\ddot{U}=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-\ddot{U}.$$

Тогава уравненията на движението (10) могат да се напишат още във вида

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, s). \tag{13}$$

Тези уравнения се написват, когато търсим максимума и минимума на функцията K, разгледана като функция само на $[\ddot{q}_i]: K=K([\ddot{q}_i])$. Ние ще покажем, че стойностите на $[\ddot{q}_i]$, получени от тези уравнения, правят функцията K минимум във всеки момент, т. е. че нарастването на функцията K в съседство на $[\ddot{q}_i]$ е положително число. И наистина, ако положим

$$\ddot{q}'_i=\ddot{q}_i+\delta\ddot{q}_i,$$

гдето $\delta\ddot{q}_i$ са достатъчно малки величини, то нарастването ΔK на K в съседство на $[\ddot{q}_i]$ се дава от равенството

$$\Delta K=K([\ddot{q}'_i])-K([\ddot{q}_i])=K([\ddot{q}_i+\delta\ddot{q}_i])-K([\ddot{q}_i])=$$
$$=\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}\delta\ddot{q}_i+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial \ddot{q}_i \partial \ddot{q}_k}\delta\ddot{q}_i\delta\ddot{q}_k.$$

Но от (12)

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}=0 \text{ за } i=1, 2, \ldots, s,$$

а от равенството

$$K=R-Q_i\ddot{q}_i=\frac{1}{2}\Sigma m\ddot{M}^2-Q_i\ddot{q}_i,$$

като вземем във внимание (5), получаваме

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \ddot{q}_i \partial \ddot{q}_k}=\Sigma m\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k}$$

и

$$\Delta K=\frac{1}{2}\Sigma m\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k}\delta\ddot{q}_i\delta\ddot{q}_k>0.$$

Прочее, уравненията на движението (12) показват, че при реалното движение на системата във всеки момент функцията K достига минимум в сравнение с движенията, получени при варирането на ускоренията $[\ddot{q}_i]$ в израза на функцията K.

Нека забележим, че уравненията на движението (12) не изменят формата си, ако изберем други обобщени координации на системата. И наистина, нека новите координати $[p_k]$ са свързани със старите $[q_i]$ чрез релациите

$$q_i = q_i([p_k]) \quad (i=1, 2, \ldots, s), \tag{14}$$

като допускаме, че функциите $[q_i]$ са диференцируеми.

От (14) имаме

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\dot{p}_k, \quad \ddot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\ddot{p}_k + \frac{\partial^2 q_i}{\partial p_k \partial p_r}\dot{p}_k \dot{p}_r.$$

Ако стойностите на $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$, $[\ddot{q}_i]$ внесем във функцията K, получаваме функцията K_1 и

$$\frac{\partial K_1}{\partial \ddot{p}_k} = \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \ddot{p}_k} = \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial p_k};$$

оттук, въз основа на (12), получаваме

$$\frac{\partial K_1}{\partial \ddot{p}_k} = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, s).$$

Прочее, уравненията на динамиката са инвариантни относно смяната на обобщените координати.

Нека по-нататък предположим, че системата е подчинена на нови l връзки, които аналитично се изразяват с p диференциални зависимости между координатите ѝ: $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha, \ldots, q_k$ (или $[q_\alpha]$) и $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_r, \ldots, q_{s=(k+p)}$ (или $[q_r]$) и нека тези зависимости, разрешени спрямо $[\dot{q}_r]$, са от вида

$$\dot{q}_r = a_{r\alpha}\dot{q}_\alpha + a_r \quad (\alpha=1, 2, \ldots, k; \; r=k+1, k+2, \ldots, s \; (=k+p)), \tag{15}$$

където $a_{r\alpha}$ и a_r са функции на $[q_\alpha]$, $[q_r]$ и t; тогава системата става **нехолономна**. Функцията K е функция на $[\ddot{q}_\alpha]$ и $[\ddot{q}_r]$; ако заместим в нея $\ddot{q}_r$ със стойностите, дадени от равенствата

$$\ddot{q}_r = a_{r\alpha}\ddot{q}_\alpha + \dot{a}_{r\alpha}\dot{q}_\alpha + \dot{a}_r, \tag{16}$$

получаваме една друга функция, която ще означим с K_l и ще бъде функция само на $[\ddot{q}_\alpha]$. Уравненията на движението на нехолономната система ще се получат, като се търси условния минимум на функцията K, дадена с (12), разгледана като функция на $[\ddot{q}_\alpha]$ и $[\ddot{q}_r]$, гдето $[\ddot{q}_r]$ се дават от (16), или като се търси минимума на функцията K_l. Прочее, тези уравнения са:

$$\frac{\partial K_l}{\partial \ddot{q}_\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_r}a_{r\alpha} = 0 \quad (\alpha=1, 2, \ldots, k), \tag{17}$$

към които трябва да се прибавят и уравненията (15).

Нека забележим, че за да образуваме функцията K_l за нехолономна система, трябва изпърво да изчислим функцията K, като не държим сметка за диференциалните зависимости (15), т. е. като считаме, че нехолономната система е холономна, и след това от K получаваме K_l, като вземем под внимание тези зависимости.

Съгласно (12) уравненията на движението (17) могат да се напишат и така:

$$\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_a}=\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_a}+\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_r}a_{ra}=Q_a+Q_r a_{ra}.$$

§ 2. Инвариантност на уравненията на динамиката, относно смяната на производните на обобщените координати

Ние видяхме, че уравненията на движението на една холономна система, с $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_s$ (или $[q_i]$) координати, се намират като се търси минимума на функцията от втора степен на $[\ddot{q}_i]$:

$$(1) \qquad K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ \ddot{T}_0)-Q_i\ddot{q}_i \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

гдето T е кинетичната енергия на системата; T_0 е функцията T, разгледана като функция само на $[q_i]$, t; и Q_i е обобщената сила, т. е. коефициента пред δq_i на израза, който дава сумата от виртуалните работи на дадените сили. Уравненията на движението са прочее

$$(2) \qquad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Свойството на уравненията на движението — да се търси минимума на функцията K — позволява да се извърши следното преобразование на тия уравнения. Нека заменим производните $[\dot{q}_i]$ на координатите $[q_i]$ с новите променливи $[\omega_k]$, свързани с $[\dot{q}_i]$ чрез релациите

$$(3) \qquad \dot{q}_i=b_{ik}\omega_k+b_i \qquad (i, k=1, 2, \ldots, s);$$

ако положим

$$(4) \qquad \omega_k=\frac{d\mu_k}{dt}=\dot{\mu}_k \qquad (k=1, 2, \ldots, s),$$

тия релации се заменят с

$$(3') \qquad \dot{q}_i=b_{ik}\dot{\mu}_k+b_i.$$

Ако стойностите на q_i, дадени с равенствата:

$$(5) \qquad \ddot{q}_i=b_{ik}\dot{\omega}_k+\dot{b}_{ik}\omega_k+\dot{b}_i,$$

внесем във функцията K, получаваме новата функция K_1, която е от втора степен спрямо $[\dot{\omega}_k]$ или $[\ddot{\mu}_k]$. Тогава

$$\frac{\partial K_1}{\partial \ddot{\mu}_k}=\frac{\partial K_1}{\partial \dot{\omega}_k}=\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}\,\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \dot{\omega}_k}=\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}b_{ik};$$

но понеже въз основа на (2) $\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}$ е равно на нула за всяко i, то трансформираните уравнения на движението са:

$$\frac{\partial K_1}{\partial \ddot{\omega}_k}=0 \quad \left(\text{или } \frac{\partial K_1}{\partial \ddot{\mu}_k}=0\right) \quad (k=1,\ 2, \ldots, s). \tag{6}$$

Уравненията (2) и (6) имат една и съща форма; прочее трансформацията (3) не изменя формата на уравненията на движението. Уравненията (6) под название „Уравнения на Апелля в нехолономных координатах" са дадени и от Добронравов [6].

Нека сега имаме една нехолономна система с координати: $q_1, q_2, \ldots, q_a, \ldots, q_k$ (или $[q_a]$); $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_i, \ldots, q_{s\,(=k+p)}$ (или $[q_i]$) и нека нехолономните връзки са дадени с уравненията

$$\dot{q}_r=a_{ra}\dot{q}_a+a_r \quad [a=1,\ 2, \ldots, k;\ r=k+1,\ k+2, \ldots, s\,(=k+p)]. \tag{7}$$

Ако във функцията K заместим $[\ddot{q}_r]$ със стойностите им изчислени от (7), получаваме функцията K_l; уравненията на движението на нехолономната система са:

$$\frac{\partial K_l}{\partial \ddot{q}_a}=0 \text{ или } \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_a}+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_r}a_{ra}=0 \quad (a=1,\ 2, \ldots, k). \tag{8}$$

Да преобразуваме тия уравнения, като заместим независимите $[\dot{q}_a]$ с новите величини $[\omega_\beta]$, свързани с $[\dot{q}_a]$ чрез релациите

$$\dot{q}_a=C_{a\beta}\,\omega_\beta+C_a \qquad (a,\ \beta=1,\ 2, \ldots, k). \tag{9}$$

Въз основа на тия релации, уравненията (7) стават:

$$\dot{q}_r=a_{ra}\,C_{a\beta}\,\omega_\beta+a_{ra}\,C_a+a_r \quad (r=k+1,\ k+2, \ldots, s). \tag{10}$$

Ако стойностите на $[\ddot{q}_a]$ и $[\ddot{q}_r]$, изчислени от (9) и (10), внесем във функцията K, получаваме функцията K_{l_1}, която ще зависи от $[\ddot{\omega}_\beta]$. Тогава

$$\frac{\partial K_{l_1}}{\partial \ddot{\omega}_\beta}=\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_a}\,\frac{\partial \ddot{q}_a}{\partial \ddot{\omega}_\beta}+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_r}\,\frac{\partial \ddot{q}_r}{\partial \ddot{\omega}_\beta}=\left(\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_a}+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_r}a_{ra}\right)C_{a\beta};$$

оттук въз основа на (8) получаваме, че преобразуваните уравнения на движението на нехолономната система са:

$$\frac{\partial K_{l_1}}{\partial \ddot{\omega}_\beta}=0 \qquad (\beta=1,\ 2, \ldots, k), \tag{11}$$

които уравнения имат формата на (8).

Ние ще приложим уравненията (6) и (2), за да намерим уравненията на Ойлер за движението на твърдо тяло с една постоянна точка. Кинетичната енергия на тялото е

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2),$$

където

$$
(12) \quad \left\{\begin{array}{l} p=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi, \\ q=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi, \\ r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta}=p\cos\varphi-q\sin\varphi, \\ \dot{\psi}\sin\theta=p\sin\varphi+q\cos\varphi, \\ \dot{\varphi}=r-\operatorname{cotg}\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi). \end{array}\right.
$$

За случая q_1, q_2, q_3 са ъглите θ, ψ, φ; втората група на (12) са уравненията (3), така че ω_1, ω_2, ω_3 са p, q, r. Имаме

$$\dot{T}=Ap\dot{p}+Bq\dot{q}+Cr\dot{r},$$

$$\ddot{T}=A\dot{p}^2+B\dot{q}^2+C\dot{r}^2+Ap\ddot{p}+Bq\ddot{q}+Cr\ddot{r}.$$

От функцията $\ddot{T}-3\ddot{T}_0$ ще изчислим само члена, който съдържа Cr. От (12) имаме

$$\dot{r}=\ddot{\psi}\cos\theta+\ddot{\varphi}-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta, \quad \ddot{r}=-2\ddot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta-\ddot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta+\ldots,$$

а от функцията T намираме

$$\ddot{T}_0=\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \ddot{\theta}}\ddot{\theta}+\ldots=Cr(-\dot{\psi}\sin\theta.\ddot{\theta})+\ldots$$

Тогава членът от $\ddot{T}-3\ddot{T}_0$, който съдържа Cr, като вземем пред вид втората група уравнения на (12), ще бъде

$$Cr\ddot{r}-3Cr\,(-\dot{\psi}\ddot{\theta}\sin\theta)=2\,Cr(-\dot{\theta}\ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\ddot{\theta}\sin\theta)=2\,Cr(q\dot{p}-p\dot{q}).$$

Понеже p, q, r и A, B, C играят една и съща роля във въпроса, то за да намерим членовете в $\ddot{T}-3\ddot{T}_0$, които съдържат Ap и Bq, трябва да пермутираме кръгово от една страна p, q, r, а от друга A, B, C, или трябва да заместим последователно оста oz с ox и oy. Прочее,

$$
13) \quad \ddot{T}-3\ddot{T}_0=A\dot{p}^2+B\dot{q}^2+C\dot{r}^2+2\,Ap\,(r\dot{q}-q\dot{r})+2\,Bq\,(p\dot{r}-r\dot{p})+ \\ +2\,Cr\,(q\dot{p}-p\dot{q}).
$$

От друга страна уравненията (4) за случая са

$$
(14) \qquad p=\frac{d\mu_1}{dt}=\dot{\mu}_1, \quad q=\frac{d\mu_2}{dt}=\dot{\mu}_2, \quad r=\frac{d\mu_3}{dt}=\dot{\mu}_3,
$$

където очевидно е, че $d\mu_1$, $d\mu_2$, $d\mu_3$, са елементарните ъгли, на които трябва да завъртим тялото около осите свързани с него, за да го доведем от едно положение до едно безкрайно съседно положение, а $\delta\mu_1$, $\delta\mu_2$, $\delta\mu_3$ — да го доведем до едно произволно безкрайно съседно положение. Тогава

$$\Sigma\,(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=L\,\delta\mu_1+M\,\delta\mu_2+N\,\delta\mu_3,$$

където величините L, M, N са Q_1, Q_2, Q_3. Прочее

$$K_1=\frac{1}{2}(A\dot{p}^2+B\dot{q}^2+C\dot{r}^2)+Ap\,(r\dot{q}-q\dot{r})+Bq\,(p\dot{r}-r\dot{p})+$$

$$+Cr(q\dot{p}-p\dot{q})-(L\dot{p}+B\dot{q}+N\dot{r}),$$

оттук съгласно (6) получаваме уравненията на Ойлер.

Ако приложим уравненията (2) за φ, то имаме

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{\varphi}} \equiv \frac{\partial K_1}{\partial \dot{p}}\frac{\partial \dot{p}}{\partial \ddot{\varphi}} + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \ddot{\varphi}} + \frac{\partial K_1}{\partial \dot{r}}\frac{\partial \dot{r}}{\partial \ddot{\varphi}} = C\dot{r} - Apq + Brp - N = 0.$$

Уравненията (2), приложени за θ и ψ, са по-сложни, но безполезно е тяхното изчисление.

Нека сега приложим уравненията (11), за да изчислим функцията K_{l_1} и намерим уравненията на движението на обръча, който се търкаля без да се хлъзга върху постоянната хоризонтална равнина $\xi o\eta$. Прекарваме през центъра на тежестта G на обръча осите $Gx_1y_1z_1$, успоредни на постоянните оси $o\xi\eta\zeta$, и осите $Gxyz$, дефинирани така: Gz е нормалата на равнината на обръча, Gx е нормалата на равнината z_1Gz, и най-сетне Gy е перпендикулярна на равнината zGx. Допирателната точка m на обръча с равнината $\xi o\eta$ лежи върху отрицателната посока на оста Gy. Положението на обръча спрямо осите $Gx_1y_1z_1$ се определя с ъглите $\theta=(Gz_1, Gz)$, $\psi=(Gx_1, Gx)$, $\varphi=(Gx, Gx')$, където Gx' е права, неизменно свързана с обръча. Нека $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ са съответно ротационните вектори на обръча и на координатната система $Gxyz$ спрямо $Gx_1y_1z_1$; очевидно имаме

$$\vec{\omega}=\dot{\theta}\vec{i}+\dot{\psi}\sin\theta\vec{j}+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\vec{k}=p\vec{i}+q\vec{j}+r\vec{k},$$

$$\vec{\Omega}=\dot{\theta}\vec{i}+\dot{\psi}\sin\theta\vec{j}+\dot{\psi}\cos\theta\vec{k}=p\vec{i}+q\vec{j}+R\vec{k}.$$

Кинетичната енергия на обръча се дава с равенството

$$T=\frac{1}{2}(M\vec{v}_G^2+Ap^2+Aq^2+Cr^2),$$

гдето $p=\dot{\theta}$, $q=\dot{\psi}\sin\theta$, $r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}=R+\dot{\varphi}$.

Имаме:

$$\dot{T}=M\vec{v}_G\vec{\varphi}_G+Ap\dot{p}+Aq\dot{q}+Cr\dot{r},$$

$$\ddot{T}=M\vec{\varphi}_G^2+M\vec{v}_G\dot{\vec{\varphi}}_G+A(\dot{p}^2+\dot{q}^2)+C\dot{r}^2+A(p\ddot{p}+q\ddot{q})+Cr\ddot{r},$$

гдето

$$\dot{p}=\ddot{\theta},\quad \dot{q}=\ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta,\quad \ddot{q}=2\ddot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta+\ddot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta+\ldots,$$

$$\dot{r}=\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta+\ddot{\varphi},\quad \ddot{r}=-2\ddot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta-\ddot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta+\ldots;$$

$$\ddot{T}_0=\frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial \ddot{q}}{\partial \ddot{\theta}}\ddot{\theta}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \ddot{\theta}}\ddot{\theta}+\ldots=Aq\dot{\psi}\ddot{\theta}\cos\theta-Cr\dot{\psi}\ddot{\theta}\sin\theta+\ldots.$$

Тогава

$$\ddot{T}-3\ddot{T}_0=M\vec{\varphi}_G^2+A\dot{p}^2-A\dot{q}^2+C\dot{r}^2+2(AR-Cr)(p\dot{q}-q\dot{p}).$$

Обръчът ще се търкаля без да се хлъзга върху равнината $\xi o \eta$, ако скоростта $\vec{v}_m$ на m е нула:

(15) $\vec{v}_m = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{Gm} = 0$, т. е. $\vec{v}_G = -\vec{\omega} \wedge \vec{Gm} = a(p\vec{k} - r\vec{i})$.

За да образуваме функцията K_{t_1} от K, трябва да държим сметка на уравнението (15) на нехолономната връзка. Имаме

$$\vec{\varphi}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = a(\dot{p}\vec{k} - \dot{r}\vec{i}) + a(p\vec{\Omega}\wedge\vec{k} - r\vec{\Omega}\wedge\vec{i})$$

$$= a(\dot{p}\vec{k} - \dot{r}\vec{i} - p^2\vec{j} + pq\vec{i} + rq\vec{k} - rR\vec{j}).$$

Оттук

$$\vec{\varphi}_G^2 = a^2(\dot{p}^2 + \dot{r}^2) + 2a^2(\dot{p}r - \dot{r}p)q + \ldots$$

Прочее

$$\ddot{T} - 3\ddot{T}_0 = (A + Ma^2)\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + (C + Ma^2)\dot{r}^2 + 2(AR - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p}) +$$

$$+ 2a^2q(r\dot{p} - p\dot{r}),$$

и за функцията K_{t_1}, като разсъждаваме както по-горе, получаваме:

$$K_{t_1} = \frac{1}{2}[(A + Ma^2)\dot{p}^2 + A\dot{q}^2 + (C + Ma^2)\dot{r}^2 + 2(AR - Cr)(p\dot{q} - q\dot{p})$$

$$+ 2Ma^2(r\dot{p} - p\dot{r})] - (L\dot{p} + M\dot{q} + N\dot{r}),$$

откъдето намираме уравнението на движението на обръча.

§ 3. Намиране добавъчния член към уравненията на Лагранж, приложени за нехолономна система

Нека имаме една нехолономна механична система, геометричната конфигурация на която се определя с s обобщени координати $[q_a]$ и $[q_i]$, като за съкращение в писането с $[q_a]$ сме означили $q_1, q_2, \ldots, q_a, \ldots, q_k$ и с $[q_i]$ — $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_i, \ldots, q_{k+p(=s)}$, и нека между тия координати съществуват p-те линейни диференциални релации

(1) $dq_i = a_{ia}\,dq_a + a_i\,dt$ или $\dot{q}_i = a_{ia}\dot{q}_a + a_i$ $(i = k+1, \ldots, k+p(=s))$.

Да предположим, че тези релации не съществуват, т. е. че разглеждаме системата като холономна, и нека означим с T кинетичната енергия на тая система, която енергия ще бъде функция на $[\dot{q}_a]$, $[\dot{q}_i]$, $[q_a]$, $[q_i]$, t; от друга страна да означим с T_0 функцията T, разглеждана като функция само на $[q_a]$, $[q_i]$, t и да положим

(2) $$R = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0),$$

като във функциите $\ddot{T}$ и $\ddot{T}_0$ задържаме само членовете, които съдържат $[\ddot{q}_\alpha]$ и $[\ddot{q}_l]$. Ако във функцията R заместим $[\ddot{q}_l]$ със стойностите им, определени от (1), то се получава нова функция R_l.

Ние видяхме, че уравненията на движението на нехолономната система са:

$$\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_l}=P_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ldots,\ k), \tag{3}$$

гдето

$$\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_l}=\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\alpha}+\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_l}a_{l\alpha}, \qquad P_\alpha=Q_\alpha+Q_l a_{l\alpha}.$$

Да означим с $\overline{T}$ функцията T, когато заместим в нея $\dot{q}_l$ със стойностите им, дадени от (1); тогава функцията $\overline{T}$ — кинетичната енергия на нехолономната система — ще бъде функция на $[\dot{q}_\alpha]$, $[q_\alpha]$, $[q_l]$, t.

Сега ние ще намерим добавъчния член D_α, който трябва да прибавим към лявата част на уравненията на Лагранж, за да получим уравненията на движението на нехолономната система под формата

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}+D_\alpha=P_\alpha \quad (\alpha=1,\ 2,\ldots,\ k). \tag{4}$$

Съгласно (3) и (4) трябва значи да изчислим разликата

$$\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\alpha}-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}\right)=D_\alpha. \tag{5}$$

Тази разлика е нула за холономна система. При пресмятането на функциите R и R_l задържаме само членовете, които съдържат $[\ddot{q}_\alpha]$, $[\ddot{q}_l]$.

Функцията R, дадена с (2), се лесно пресмята. Имаме:

$$\dot{T}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\ddot{T}=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha\,\partial \dot{q}_\beta}\ddot{q}_\alpha\ddot{q}_\beta+2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha\,\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_\alpha\ddot{q}_i+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_l\,\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_l\ddot{q}_r+2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha\,\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\ddot{q}_\alpha+$$

$$+2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha\,\partial q_l}\dot{q}_l\ddot{q}_\alpha+2\frac{\partial^2 T}{\partial q_\alpha\,\partial \dot{q}_i}\dot{q}_\alpha\ddot{q}_l+2\frac{\partial^2 T}{\partial q_r\,\partial \dot{q}_i}\dot{q}_r\ddot{q}_i+2\frac{\partial^2 T}{\partial t\,\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha+$$

$$+2\frac{\partial^2 T}{\partial t\,\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l+\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_l}\ddot{q}_l+\ldots,$$

$$\dot{T}_0=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial T}{\partial t},\quad \ddot{T}_0=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\ddot{q}_\alpha+\frac{\partial T}{\partial q_l}\ddot{q}_l+\ldots,$$

$$R=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha\,\partial \dot{q}_\beta}\ddot{q}_\alpha\ddot{q}_\beta+2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha\,\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_\alpha\ddot{q}_l+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_l\,\partial \dot{q}_r}\ddot{q}_l\ddot{q}_r\right)+ \tag{6}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial q_\beta}\dot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial q_l}\dot q_l+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_a}\right)\ddot q_a+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial q_\beta}\dot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial q_r}\dot q_r+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_l}\right)\ddot q_l.$$

Оттук получаваме

$$\frac{\partial R_l}{\partial \ddot q_a}=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial \dot q_\beta}\ddot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial \dot q_l}\ddot q_l+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial \dot q_\beta}a_{la}\ddot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial \dot q_r}a_{la}\ddot q_r+ \tag{7}$$

$$+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial q_\beta}\dot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial q_l}\dot q_l+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_a}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial q_\beta}\dot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial q_r}\dot q_r+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_l}\right)a_{la}.$$

От друга страна от равенствата

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot q_a}=\frac{\partial T}{\partial \dot q_a}+\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}a_{la},\quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a}=\frac{\partial T}{\partial q_a}+\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\frac{\partial \dot q_l}{\partial q_a}$$

намираме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot q_a}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a}=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial \dot q_\beta}\ddot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial \dot q_r}\ddot q_l+ \tag{8}$$

$$+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial q_\beta}\dot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial q_l}\dot q_l+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_a \partial t}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial \dot q_\beta}\ddot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial \dot q_r}\ddot q_r+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial q_\beta}\dot q_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial q_r}\dot q_r+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_l \partial t}\right)a_{la}+$$

$$+\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\dot a_{la}-\frac{\partial T}{\partial q_a}-\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\frac{\partial \dot q_l}{\partial q_a}.$$

Тогава от (7) и (8) получаваме

$$D_a=\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\left(\frac{\partial \dot q_l}{\partial q_a}-\dot a_{la}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_l}a_{la} \tag{9}$$

и уравненията на движението на нехолономната система са:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot q_a}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a}+\frac{\partial T}{\partial \dot q_l}\left(\frac{\partial \dot q_l}{\partial q_a}-\dot a_{la}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_l}a_{la}=P_a. \tag{10}$$

Нека сега дадем на добавъчния член D_a друга форма, в която да фигурира функцията $\overline{T}$, като допускаме, че положените връзки на системата не зависят от t, т. е. че

$$dq_l=a_{la}\,dq_a \text{ или } \dot q_l=a_{la}\,\dot q_a. \tag{11}$$

Тогава от (7) имаме

$$(12)\quad \frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\alpha}=\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_l}a_{l\beta}+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_l}a_{l\alpha}+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_r}a_{l\alpha}a_{r\beta}\right)\ddot{q}_\beta+$$

$$+N_\alpha=M_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta+N_\alpha,$$

гдето N_α се състои от тези събираеми в израза на $\partial R_l/\partial \ddot{q}_\alpha$, които не съдържат вторите производни на координатите.

Тъй като $\overline{T}$ е функция на $[\dot{q}_\alpha]$, $[q_\alpha]$ и $[q_l]$, то равенството (8) се заменя с

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta+\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_l}\dot{q}_l-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}.$$

Понеже

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\beta}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}a_{l\alpha}\right)=M_{\alpha\beta},$$

то за добавъчния член D_α получаваме

$$(13)\qquad D_\alpha=N_\alpha-\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta-\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}$$

Изразът на D_α може да се представи в друг вид, като се използува уравнението

$$\dot{\overline{T}}=P_\alpha \dot{q}_\alpha,$$

което изразява теоремата за живата сила. И наистина, от това уравнение, като вземем под внимание уравненията (3) и (12), получаваме

$$(14)\qquad \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta+\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_l}\dot{q}_l=\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha=M_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta\dot{q}_\alpha+N_\alpha\dot{q}_\alpha;$$

но лесно е да се види, че

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\beta}=M_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha.$$

И наистина T е квадратна форма на $[\dot{q}_\alpha]$, $[\dot{q}_l]$, тогава очевидно е, че

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta+2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_l}\dot{q}_\alpha\dot{q}_l+\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_r}\dot{q}_l\dot{q}_r\right);$$

оттук въз основа на (11) имаме:

$$\overline{T}=\frac{1}{2}M_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \quad \text{и} \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\beta}=M_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha$$

и равенството (14) става

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}\dot{q}_i = N_\alpha \dot{q}_\alpha .$$

На това равенство вземаме частните производни спрямо $\dot{q}_\alpha$ и получаваме

$$N_\alpha + \frac{\partial N_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\beta = \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} a_{i\alpha} , \tag{15}$$

оттук стойността на N_α внасяме в (13) и намираме

$$D_\alpha = -\frac{\partial N_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\beta + 2\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} a_{i\alpha} .$$

Забележка: Уравненията (10) могат да се преобразуват в друга форма. Ако означим с $\overline{T}_1$ функцията T, разгледана като функция само на $[\dot{q}_i]$, където $\dot{q}_i$ се определя от (1), то

$$\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} a_{i\alpha} , \quad \frac{\partial \overline{T}_1}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} ; \tag{16}$$

като деривираме спрямо t първото равенство, получаваме

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{a}_{i\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} a_{i\alpha} . \tag{17}$$

От друга страна да означим с $R_{l,1}$ функцията R, разгледана като функция само на $[\ddot{q}_i]$, гдето $\ddot{q}_i$ се дават също от (1), то

$$\frac{\partial R_{l,1}}{\partial \ddot{q}_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_i}\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \ddot{q}_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_i} a_{i\alpha} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right) a_{i\alpha} , \tag{18}$$

понеже за холономна система

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} .$$

Тогава съгласно (16), (17) и (18) уравненията (10) стават

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \overline{T}_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial R_{l,1}}{\partial \ddot{q}_\alpha} = P_\alpha .$$

§ 4. Друга нова форма на уравненията на движението на нехолономна механична система

Нека намерим сега каква форма приемат уравненията на движението на нехолономната система, ако вместо функцията $R = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\,\ddot{T}_0)$ въведем функцията

$$\overline{R}=\frac{1}{2}(\ddot{\overline{T}}-3\ddot{\overline{T}}_0), \tag{1}$$

гдето под $\overline{T}$ се подразбира преобразуваната кинетическа енергия на системата с уравненията на нехолономните връзки

$$\dot{q}_i=a_{i\alpha}\dot{q}_\alpha+a_i \quad (\alpha=1,\ 2,\ldots,\ k;\ i=k+1,\ k+2\ldots,\ k+p), \tag{2}$$

а $\overline{T}_0$ е функцията $\overline{T}$, разгледана като функция само на координатите $[q_\alpha]$, $[q_i]$, t, но не на скоростите.

Ние намерихме, че уравненията на движението на нехолономната система са:

$$\frac{\partial R_l}{\partial\ddot{q}_\alpha}=P_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ldots,\ k),$$

където R_l е функцията R, в която сме заместили $[\ddot{q}_i]$ със стойностите им, определени от (2).

За да намерим новата форма на казаните уравнения, ние ще изчислим разликата

$$\frac{\partial R_l}{\partial\ddot{q}_\alpha}-\frac{\partial\overline{R}}{\partial\ddot{q}_\alpha}=\overline{D}_\alpha \tag{3}$$

и тогава търсените уравнения за движението на нехолономната система са:

$$\frac{\partial\overline{R}}{\partial\ddot{q}_\alpha}+\overline{D}_\alpha=P_\alpha \qquad (\alpha=1,\ 2,\ldots,\ k). \tag{4}$$

Намерихме по-горе, че

$$R=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta}\ddot{q}_\alpha\ddot{q}_\beta+2\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_\alpha\ddot{q}_i+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_i\ddot{q}_k\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right)\ddot{q}_\alpha+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\ddot{q}_i;$$

и

$$\frac{\partial R_l}{\partial\ddot{q}_\alpha}=\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta}+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_i}a_{i\beta}+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\beta\partial\dot{q}_i}a_{i\alpha}+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}a_{i\alpha}a_{k\beta}\right)\ddot{q}_\beta+ \tag{5}$$
$$+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_i}(\dot{a}_{i\beta}\dot{q}_\beta+\dot{a}_i)+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+$$
$$+\left[\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}(\dot{a}_{k\beta}\dot{q}_\beta+\dot{a}_k)+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_i\partial t}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]a_{i\alpha}.$$

От друга страна, като вземем пред вид, че $\overline{T}$ е функция на $[\dot{q}_\alpha]$, $[q_\alpha]$, $[q_i]$, t, то за функцията $\overline{R}$, дадена с (1), получаваме:

$$\bar{R}=\frac{1}{2}(\ddot{\bar{T}}-3\ddot{\bar{T}}_0)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta\ddot{q}_\alpha+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial t}-\frac{\partial\bar{T}}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial\bar{T}}{\partial q_l}a_{l\alpha}\right)\ddot{q}_\alpha,$$

отгдето

$$(6)\quad \frac{\partial\bar{R}}{\partial\ddot{q}_\alpha}=\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta}\ddot{q}_\beta+\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial t}-\frac{\partial\bar{T}}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial\bar{T}}{\partial q_l}a_{l\alpha};$$

но ако от равенството

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_l}a_{l\alpha}$$

изчислим

$$\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta},\quad \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_\beta},\quad \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_l},\quad \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\dot{q}_\alpha\partial t}$$

то (6) приема вида

$$(7)\quad \frac{\partial\bar{R}}{\partial\ddot{q}_\alpha}=\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_\beta}+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_l}a_{l\beta}+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_l\partial\dot{q}_\beta}a_{l\alpha}+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_l\partial\dot{q}_\alpha}a_{l\alpha}a_{k\beta}\right)\ddot{q}_\beta+$$

$$+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial\dot{q}_l}\left(\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_\alpha\partial t}-\frac{\partial\bar{T}}{\partial q_\alpha}+$$

$$+\left[\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_l\partial\dot{q}_k}\left(\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_r}\dot{q}_r+\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_l\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_l\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{q}_l\partial t}\right]a_{l\alpha}-$$

$$-\frac{\partial\bar{T}}{\partial q_l}a_{l\alpha}-\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_l}\left(\frac{\partial a_{l\alpha}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial a_{l\alpha}}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial a_{l\alpha}}{\partial t}\right),$$

в което

$$\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial t}=\dot{a}_{l\beta}\dot{q}_\beta+\dot{a}_l,$$

$$\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_r}\dot{q}_r+\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial t}=\dot{a}_{k\beta}\dot{q}_\beta+\dot{a}_k,$$

$$\frac{\partial a_{l\alpha}}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial a_{l\alpha}}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial a_{l\alpha}}{\partial t}=\dot{a}_{l\alpha},$$

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_l}\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_\alpha},\qquad \frac{\partial\bar{T}}{\partial q_l}=\frac{\partial T}{\partial q_l}+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\frac{\partial\dot{q}_k}{\partial q_l}.$$

Тогава равенството (3) въз основа на (7) и (5) приема вида

$$\bar{D}_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} a_{k\alpha} - \dot{a}_{i\alpha}\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{i\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} a_{i\alpha} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_i} \tag{8}$$

и уравненията за движението (4) на нехолономната система вземат формата

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{i\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} a_{i\alpha} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_i} a_{i\alpha} = P_\alpha . \tag{9}$$

Ако сравним тези уравнения с намерените по-рано уравнения [§ 3, уравнение (10)]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{i\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} a_{i\alpha} = P_\alpha ,$$

намираме, че

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_i} a_{i\alpha} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha} . \tag{10}$$

Ако функцията $\bar{T}$ не зависи от $[q_i]$, получаваме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha}$$

и уравненията на движението на нехолономната система ще бъдат

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{i\alpha}\right) = P_\alpha \tag{11}$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{i\alpha}\right) = P_\alpha . \tag{11'}$$

Ако $\bar{T}$ не зависи от $[q_i]$ и ако освен това в релациите (1) величините a_i са нули, т. е. $\dot{q}_i = a_{i\alpha}\dot{q}_\alpha$, то второто уравнение (11') приема формата

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\beta = P_\alpha ,$$

дадена от Чаплыгин [6].

При този частен случай ($\bar{T}$ не зависи от $[q_i]$) да предположим, че уравненията (2) на диференциалните връзки имат вида

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial q_i}{\partial t}, \text{ т. е. } q_i = q_i([q_\alpha], t), \tag{12}$$

тогава системата е холономна. Понеже $a_{i\alpha}=\partial q_i/\partial q_\alpha$, $a_i=\partial q_i/\partial t$, то

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha}-\dot{a}_{i\alpha}=\frac{\partial^2 q_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 q_i}{\partial t\, \partial q_\alpha}-\frac{\partial^2 q_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta-\frac{\partial^2 q_i}{\partial q_\alpha\, \partial t}=0$$

и уравненията (11) за холономна система приемат вида

$$\text{(13)} \qquad \frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha}=P_\alpha \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}=P_\alpha.$$

От уравненията (11) и (13) изваждаме следното важно следствие: ако имаме две материални системи — едната нехолономна, а другата холономна, които имат една и съща кинетична енергия $\overline{T}$ и една и съща функция $\overline{R}$ и на които действуват едни и същи сили, то уравненията на движението на тия системи са различни. Докато за холономната система функциите $\overline{T}$ и $\overline{R}$ са достатъчни, за да могат да се напишат уравненията на движението, тия функции за нехолономната система не са достатъчни.

За една нехолономна система диференциалните релации между координатите не са от вида (12); те са дадени с равенствата (2), написани под вида

$$dq_i=a_{i\alpha}\,dq_\alpha+a_i\,dt \qquad (i=k+1,\ k+2,\dots,\ k+p),$$

където dq_i не е пълен диференциал на някоя функция от $[q_\alpha]$, t. При този случай, за да бъде

$$\overline{D}_\alpha=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha}-\dot{a}_{i\alpha}\right)$$

нула за някоя координата q_α, трябва например: 1) функцията T да не съдържа $[q_i]$ и 2) да са проверени условията

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha}-\dot{a}_{i\alpha}=0$$

за $i=k+1,\ k+2,\dots,\ k+p$; тези условия, съгласно казаното по-горе, биха се изпълнили, ако диференциалните релации (2) са от вида

$$\dot{q}_i=\frac{d}{dt}f_i([q_\alpha],\ t)+\varphi_i(t,\ \dot{q}_1,\dots,\ \dot{q}_{\alpha-1},\ \dot{q}_{\alpha+1},\dots,\ \dot{q}_k;\ q_1,\dots,q_{\alpha-1},\ q_{\alpha+1},\dots,q_k),$$

т. е. ако dq_i за $i=k+1,\ k+2,\dots,\ k+p$ може да се представи под формата на един пълен диференциал на някоя функция f_i от $[q_\alpha]$, t с един добавъчен член, който да не съдържа q_α, $\dot{q}_\alpha$.

Ако тези условия са изпълнени, $\overline{D}_\alpha=0$ и уравнението на движението за координатата q_α се дава с (13).

§ 5. Инвариантност на уравненията на динамиката относно смяната на променливото независимо t при случая, когато силите произхождат от функцията U. Геодезични линии

Нека $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_s$ (или $[q_i]$) са координатите на една холономна система, подчинена на постоянни връзки и на сили, произхождащи от функцията на сили U, и нека $\overrightarrow{M}$ е векторната координата на една коя да е точка M от системата. Ако положим

$$\Sigma m \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_i} \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_k} = g_{ik},$$

то интегралът на живите сили

$$T \equiv \frac{1}{2} \Sigma m \vec{v}^2 = U + h \quad \left(\vec{v} = \dot{\overrightarrow{M}} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i\right)$$

приема вида

$$T \equiv \frac{1}{2} \Sigma m \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_i} \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k \equiv \frac{1}{2} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = U + h. \tag{1}$$

Нека от T и U образуваме функцията

$$K = \frac{1}{2} (\ddot{T} - 3 \ddot{T}_0) - \ddot{U}, \tag{2}$$

където T_0 е функцията T, разгледана като функция само на $[q_i]$. Имаме

$$\dot{T} = g_{ik} \dot{q}_k \ddot{q}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial q_{ik}}{q_r} \dot{q}_i \dot{q}_k \dot{q}_r,$$

$$\ddot{T} = g_{ik} \ddot{q}_k \ddot{q}_i + \left(2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_r} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rk}}{\partial q_i}\right) \dot{q}_k \dot{q}_r \ddot{q}_i + \ldots,$$

$$\ddot{T}_0 = \frac{\partial T}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \ldots = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kr}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_r \ddot{q}_i + \ldots,$$

$$K = \frac{1}{2} (\ddot{T} - 3 \ddot{T}_0) - \ddot{U} = \frac{1}{2} g_{ik} \ddot{q}_k \ddot{q}_r + | {}^{k}{}_{i}{}^{r} | \dot{q}_k \dot{q}_r \ddot{q}_i - \frac{\partial U}{\partial q_i} \ddot{q}_i. \tag{2'}$$

Ние видяхме, че уравненията на движението на системата са:

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} \equiv g_{ik} \ddot{q}_k + | {}^{k}{}_{i}{}^{r} | \dot{q}_k \dot{q}_r - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{3}$$

Едно от тези уравнения може да бъде заменено с интеграла (1) на живите сили, понеже

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} \dot{q}_i = g_{ik} \ddot{q}_k \dot{q}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r \dot{q}_i - \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (T - U) = 0.$$

Нека сега преобразуваме уравненията (3), като заместим в тях независимата променлива t с новата независима променлива σ, съгласно релацията

$$\frac{d\sigma}{dt}=2U+2h. \tag{4}$$

Ако за съкращение в писането положим $2U+2h=N$, имаме

$$\dot{q}_i=\frac{dq_i}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}=Nq'_i, \quad \ddot{q}_i=N^2q''_i+N\frac{\partial N}{\partial q_r}q'_r q'_i \tag{5}$$

и интегралът (1) на живите сили приема вида

$$Ng_{ik}q'_i q'_k=1 \quad \text{или} \quad (2U+2h)g_{ik}q'_i q'_k=1. \tag{6}$$

Нека положим

$$T_1=\frac{1}{2}Ng_{ik}q'_i q'_k=\frac{1}{2}\cdot \tag{7}$$

От друга страна, въз основа на (5) функцията K става

$$\overline{K}=N^3K_1=N^3\left\{\frac{1}{2}Ng_{ik}q''_k q''_i+\left[\left(N|{}^{k}{}_{i}{}^{r}|+\frac{\partial N}{\partial q_r}g_{ik}\right)q'_k q'_r-\frac{1}{2N}\frac{\partial N}{\partial q_i}\right]q''_i\right\},$$

откъдето, като използуваме (6), имаме

$$K_1=\frac{1}{2}Ng_{ik}q''_k q''_i+\left[N|{}^{k}{}_{i}{}^{r}|+\frac{\partial N}{\partial q_r}g_{ik}-\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial q_i}g_{rk}\right]q'_k q'_r q''_i \tag{8}$$

Понеже функцията $\overline{K}$ се образува от K, въз основа на (5), то

$$\frac{\partial\overline{K}}{\partial q''_i}=N^3\frac{\partial K_1}{\partial q''_i}=\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_r}\frac{\partial\ddot{q}_r}{\partial q''_i}=\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_r}N^2;$$

оттук, вземайки пред вид, съгласно (3), че $\partial K/\partial\ddot{q}_r=0$ за всяко r получаваме, че преобразуваните уравнения на движението на холономната система са:

$$\frac{\partial K_1}{\partial q''_i}=Ng_{ik}q''_k+\left[N|{}^{k}{}_{i}{}^{r}|+\frac{\partial N}{\partial q_r}g_{ik}-\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial q_i}g_{rk}\right]\dot{q}_r\dot{q}_k=0, \tag{9}$$

като прибавим към тях и уравнението (4). И тук едно от уравненията (9) може да се замени с първия интеграл (7), защото

$$\frac{\partial K_1}{\partial q''_i}q'_i=Ng_{ik}q''_k q'_i+\frac{1}{2}\frac{\partial(Ng_{ik})}{\partial q_r}q'_k q'_r q'_i=\frac{dT_1}{dt}=0\,.$$

Прочее, уравненията на движението (3) са инвариантни, относно преобразуването (4).

Ние ще покажем, че функцията K_1 се образува от интеграла (7) по същия начин, по който се образува функцията K от интеграла (1) на живите сили, така че

$$K_1=\frac{1}{2}(T_1''-3\,T_{1,0}''),$$

понеже $U_1''=0$. И наистина, като се изчислят производните T_1'' и $T_{1,0}''$, намираме

$$K_1=\frac{1}{2}Ng_{ik}\,q_k''\,q_i''+\left[\frac{\partial(Ng_{ik})}{\partial q_r}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial(Ng_{kr})}{\partial q_i}\right]q_k'\,q_r'\,q_i'' \tag{10}$$

и очевидно е, че двата израза на K_1, дадени с (8) и (10), са тъждествени. Тогава, за да напишем направо преобразуваните уравнения на движението, постъпваме така: от интеграла на живите сили (1) образуваме интеграла (7), а от него функцията K_1, дадена с (10), и уравненията на движението са (9), заедно с (4).

Нека предположим сега, че системата е подчинена на нови постоянни връзки, които аналитично се изразяват със следните диференциални релации между координатите ѝ $q_1,\ q_2,\ldots,\ q_a,\ldots,\ q_k$ (или $[q_a]$); $q_{k+1},\ q_{k+2},\ldots,\ q_r,\ldots,\ q_s$ (или $[q_r]$):

$$\dot{q}_r=a_{ra}\,\dot{q}_a \qquad (r=k+1,\ldots,\ s;\ a=1,\ 2,\ldots,\ k); \tag{11}$$

тогава системата става н е х о л о н о м н а. Ако заместим в K величините $[\ddot{q}_r]$ със стойностите им, определени от (11), получаваме функцията K_l и ние видяхме, че уравненията на движението на нехолономната система са:

$$\frac{\partial K_l}{\partial \ddot{q}_a}=0 \quad (a=1,\ 2,\ldots,\ k). \tag{12}$$

Понеже от (5) имаме $\dot{q}_i=Nq_i'$, то уравненията (11) на нехолономните връзки не изменят формата си, когато заместим t с σ; тогава тези уравнения вземат вида

$$q_r'=a_{ra}\,q_a',\quad q_r''=a_{ra}\,q_a''+a_{ra}'\,q_a' \tag{13}$$

и преобразуваните уравнения на движението на нехолономната система са:

$$\frac{\partial K_{l_1}}{\partial q_a''}=\frac{\partial K_1}{\partial q_a''}+\frac{\partial K_1}{\partial q_r''}\,a_{ra}=0, \tag{14}$$

гдето K_{l_1} се добива от K_1, когато заместим $[q_r'']$ със стойностите им, дадени от (13). Прочее уравненията на движението (12) запазват формата си, т. е. те са също инвариантни, относно преобразуването (4).

Геодезични линии. Нека координатите $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_i,\ldots,\ q_s$ (или $[q_i]$) на една холономна система разгледаме като координати на една точка P в пространство със s измерение и нека на системата да не действува никаква дадена сила, тогава траекториите, които описва точката P, са геодезични линии, като разширяваме това име, дадено на кривите, които описва върху идеална гладка повърхнина една точка, върху която не е приложена никаква дадена сила, а се движи само под действието на реакцията на идеалната връзка.

Ние можем да кажем, че движението на механичната система с координати $[q_i]$ се изобразява с движението на точка в пространството със s-димензионална метрика

$$ds^2 = g_{ik}\, dq_i\, dq_k .$$

Понеже системата се движи без действието на дадени сили, т. е. $U = 0$, тогава изобразяващата я точка ще се движи по геодезична линия и от (6) имаме

$$d\sigma^2 = 2h\, ds^2,$$

а интегралът (7) приема вида

$$T_1 = \frac{1}{2} g_{ik}\, q'_i\, q'_k = \frac{1}{2} \tag{15}$$

гдето сега производните на $[q_i]$ са взети относно s. Функцията K_1 изчислена от (15), се дава с равенството

$$K_1 = \frac{1}{2}(T''_1 - 3\, T''_{1,0}) = \frac{1}{2} g_{ik}\, q''_k\, q''_i + |{}^{k}{}_{i}{}^{r}|\, q'_k\, q'_r\, q''_i$$

и диференциалните уравнения на геодезичните линии в холономното пространство са:

$$\frac{\partial K_1}{\partial q''_a} = g_{ik}\, q''_k + |{}^{k}{}_{i}{}^{r}|\, q'_r\, q'_r = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ s).$$

Ако сега предположим, че пространството е нехолономно, т. е., че между координатите $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_a, \ldots,\ q_k$ (или $[q_a]$); $q_{k+1},\ q_{k+2}, \ldots,\ q_r, \ldots,\ q_{k+p\,(=s)}$ (или $[q_r]$) на точката P съществуват p диференциални съотношения

$$\dot{q}_r = a_{ra}\, \dot{q}_a \quad (r = k+1,\ k+2, \ldots,\ k+p\,(=s)),$$

то диференциалните уравнения на геодезичните линии в това пространство са:

$$\frac{\partial K_{l_1}}{\partial q''_a} = \frac{\partial K_1}{\partial q''_a} + \frac{\partial K_1}{\partial q''_r} a_{ra} = 0, \quad q'_r = a_{ra}\, q'_a .$$

Прочее в резюме, за да намерим геодезичните линии на квадратната форма

$$ds^2 = g_{ik}\, dq_k\, dq_i \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ s),$$

то образуваме си от нея функцията

$$T_1 = \frac{1}{2} g_{ik}\, q'_i\, q'_k = \frac{1}{2}$$

и от тази функция образуваме функцията

$$K_1=\frac{1}{2}(T_1''-3\,T_{1,0}''), \tag{16}$$

където $T_{1,0}$ е функцията T_1, разгледана като функция само на $[q_i]$; тогава уравненията на геодезичните линии са:

$$\frac{\partial K_1}{\partial q_i''}=0 \quad (i=1,\ 2,\ldots,\ s).$$

Ако пък искаме да намерим геодезичните линии на същата квадратна форма ds^2, написани под вида

$$ds^2=g_{\alpha\beta}\,dq_\alpha\,dq_\beta+2\,g_{\alpha m}\,dq_\alpha\,dq_m+g_{rm}\,dq_r\,dq_m,$$

$\alpha,\ \beta=1,\ 2\ \ .,\ k;\ r,\ m=k+1,\ldots,\ s=k+p$, когато между диференциалите $[aq_\alpha]$ и $[dq_r]$ на координатите $[q_\alpha]$ и $[q_r]$ на точката P, съществуват релациите

$$dq_r=a_{r\alpha}\,dq_\alpha \quad \text{или} \quad q_r'=a_{r\alpha}\,q_\alpha', \tag{17}$$

които са неинтегруеми, то от функцията K_1 дадена с (16), си образуваме функцията K_{l_1} [като заместим $[\ddot{q}_r]$ в K_1 със стойностите им, определени от (17)] и уравненията на геодезичните линии са:

$$\frac{\partial K_{l_1}}{\partial q_\alpha''}=0 \quad (\alpha=1,\ 2,\ldots,\ k),$$

към които прибавяме и уравненията (17).

§ 6. Ново доказателство на принципа на най-малкото действие

Нека имаме една холономна механична система, геометричната конфигурация на която се определи от обобщените координати q_1, $q_2,\ldots,\ q_i,\ldots,\ q_s$ (или $[q_i]$), и нека системата е подчинена на постоянни връзки и на дадени сили, които произхождат от функцията на сили U. Ако $\overrightarrow{M}$ е векторната координата на една коя да е точка M от системата със скорост $\vec{v}=\dot{\overrightarrow{M}}$, то интеграла на живите сили се дава с равенството:

$$T=\frac{1}{2}\,\Sigma m\,\dot{\overrightarrow{M}}^2=\frac{1}{2}\,\Sigma m\,\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_k}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k=U+h, \tag{1}$$

гдето h е константата на този интеграл.

В § 1 ние показахме, че уравненията на движението на холономната механична система могат да се напишат във формата

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}=0,$$

гдето

$$K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\,\ddot{T}_0)-\ddot{U},$$

T е кинетичната енергия на системата, функцията T_0 е функцията T, разгледана като функция само на координатите $[q_i[$, а скоростите $[\dot{q}_i]$ са фиксирани. Нека изчислим функцията K и да напишем уравненията на движението. Имаме:

$$\dot{T}=\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\,\dot{q}_k\ddot{q}_i+\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial q_r}\,\dot{q}_i\dot{q}_k\dot{q}_r,$$

$$\ddot{T}=\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\,\ddot{q}_k\ddot{q}_i+$$

$$+\left(2\,\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2 M}{\partial q_k\partial q_r}+3\,\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_r}\,\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_i\partial q_k}\right)\dot{q}_k\dot{q}_r\ddot{q}_i+\ldots,$$

$$\ddot{T}_0=\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_r}\,\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial q_i}\,q_k\,q_r\,q_i+\ldots$$

и

$$K=\frac{1}{2}\,\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\,\ddot{q}_k\ddot{q}_i+\left(\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial q_r}\,q_k q_r-\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)\ddot{q}_i+\ldots,\tag{2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_i}=\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\,\ddot{q}_k+\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\,\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial q_r}\,q_k q_r-\frac{\partial U}{\partial q_i}=0.\tag{3}$$

В § 5 ние преобразувахме уравнението (3), като вместо променливата независима t, въведохме нова независима променлива σ с помощта на релацията

$$\frac{d\sigma}{dt}=2U+2h.\tag{4}$$

Ние сега ще покажем, че уравненията (3), след преобразуването им с (4), изразяват факта, че за реалното движение на системата интегралът

$$I=\int_{P}^{P_1}\Sigma m\vec{v}\,d\vec{M}=\int_{t_0}^{t_1}\Sigma m\vec{v}^2\,dt=\int_{t_0}^{t_1}2T\,dt=\int_{t_0}^{t_1}(2\,U+2\,h)\,dt\tag{5}$$

достига минимума в сравнение с всички други движения, преместващи системата от положението P_0 в положението P_1 и произлизащи с едно и също значение на константната h.

Този интеграл, представляващ тоталната работа на количеството на движението на системата, се нарича **действие на системата** между двете ѝ положения P_0 и P_1.

За да докажем това свойство на уравненията на движението, ние въз основа на релацията (4) ще дадем друг вид на действието I на системата. Равенството (4) може да се напише във вида

$$\frac{d\sigma}{dt}=\sqrt{2U+2h}\,\sqrt{2U+2h}$$

или, съгласно (1),

$$\frac{d\sigma}{dt}=\sqrt{2U+2h}\sqrt{\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_k}\,,$$

отгдето

$$(6)\qquad d\sigma^2=(2U+2h)\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}dq_i dq_k$$

и

$$(7)\qquad (2U+2h)\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}q'_i q'_k=1,$$

гдето производните са взети относно σ.

На основание (4) и (5) действието на системата приема вида

$$(5')\quad I=\int_{P_0}^{P_1}\Sigma m\vec{v}\,d\vec{M}=\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}d\sigma=\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}(2U+2h)\,\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}q'_i q'_k\,d\sigma\,;$$

то е минимум за реалното движение.

За да намерим изразите на $[q_i]$ във функция от σ, които правят I минимум, трябва да напишем, че вариацията δI на I е нула.

Ако използуваме третия израз на I и ако за съкращение в писането означим израза $2U+2h$ с N, то имаме

$$\delta I=\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\Bigg[2N\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}q'_k\delta q'_i+$$

$$+\left(2N\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_i\partial q_r}+\frac{\partial N}{\partial q_i}\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_r}\right)q'_k q'_r\delta q_i\Bigg]d\sigma\,.$$

Но ако вземем в пред вид, че $\delta q'_i d\sigma=d\delta q_i$, то получаваме

$$\delta I=-2\int_{\sigma_0}^{\sigma_1}\Bigg[N\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}q''_k+\Bigg(N\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial q_r}+$$

$$+\frac{\partial N}{\partial q_r}\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial q_i}\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_r}\Bigg)q'_k q'_r\Bigg]\delta q_i d\sigma=0.$$

Понеже вариациите $[\delta q_i]$ са произволни и независими, получаваме уравненията

$$(8)\quad (2U+2h)\Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} q''_k + \left[(2U+2h)\Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_k \partial q_r} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial U}{\partial q_r}\Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_i}\Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_r}\right] q'_k q'_r = 0.$$

Но лесно е да се види, че тези уравнения заедно с уравнението (4) дефинират точно реалното движение на системата. И наистина, да заместим в тях σ с променливото t, дефинирано чрез релацията (4). Имаме

$$q'_i = \frac{dq_i}{dt}\frac{dt}{d\sigma} = \frac{\dot{q}_i}{2U+2h},\quad q''_i = \frac{\ddot{q}_i}{(2U+2h)^2} - \frac{2\dot{q}_i\dot{q}_r}{(2U+2h)^3}\frac{\partial U}{\partial q_r}$$

и уравненията (8) приемат вида

$$(9)\quad \frac{1}{2U+2h}\left(\Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k}\ddot{q}_k + \Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_k \partial q_r}\dot{q}_k\dot{q}_r - \frac{\partial U}{\partial q_i}\right) = 0,$$

като взехме пред вид, че в последния член на (8), съгласно (7),

$$\Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_r}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} q'_k q'_r = \frac{1}{2U+2h}.$$

Уравненията (9) са точно уравненията (3) на движението на системата. По такъв начин принципът на най-малкото действие (принципът на Мопертю-Лагранж) е доказан.

Ако използуваме втория израз на I, даден в (5'), дохождаме до заключението: въпросът за намиране движението на една холономна система, подчинена на постоянни връзки и на дадени сили, произхождащи от функцията на сили U, се свежда до търсенето на геодезичните линии на квадратната форма $d\sigma^2$ на $[dq_i]$, дадена с (6). Тези линии се определят от уравненията (8). Функцията K_1 се образува от функцията

$$T_1 = \frac{1}{2}(2U+2h)\Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} q'_i q'_k,$$

добита от (7).

Ако най-сетне използуваме първия израз на I, то, като вземем пред вид, че

$$\delta\, d\vec{M} = d\,\delta\vec{M},$$

получаваме

$$\delta I = \delta\int_{P_0}^{P_1}\Sigma m\,\vec{v}\,d\vec{M} = \int_{P_0}^{P_1}(\Sigma m\,\dot{\vec{M}}\,d\,\delta\vec{M} + \Sigma m\,d\vec{M}\,\delta\dot{\vec{M}})$$

$$= \int_{\sigma_0}^{\sigma} (-\Sigma m \ddot{\vec{M}} \delta \vec{M} + \Sigma m \dot{\vec{M}} \delta \dot{\vec{M}}) \frac{dt}{d\sigma} d\sigma = 0.$$

Но от (1) имаме

$$\Sigma m \dot{\vec{M}} \delta \dot{\vec{M}} = \delta U = \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i .$$

От друга страна

$$\ddot{\vec{M}} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_k \partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r , \quad \delta \vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \delta q_i ,$$

тогава

$$\delta I = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{1}{2U+2h} \left(-\Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} \ddot{q}_k - \right.$$

$$\left. - \Sigma m \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial q_k \partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i d\sigma = 0,$$

отгдето следват уравненията (9).

§ 7. Обобщение на принципа на Остроградски-Хамилтон за случая на нехолономна система с линейни връзки

Нека имаме една нехолономна система с s координати: q_1, $q_2, \ldots, q_\alpha, \ldots, q_k$ (или $[q_\alpha]$); $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_i, \ldots, q_{k+p=s}$ (или $[q_i]$) и нека между координатите съществуват p-те диференциални (неинтегруеми) релации:

(1) $$dq_i = a_{i\alpha} dq_\alpha + a_i dt \text{ или } \dot{q}_i = a_{i\alpha} \dot{q}_\alpha + a_i ,$$

$\alpha = 1, 2, \ldots, k$; $i = k+1, k+2, \ldots, k+p=s$. Понеже $\delta q_i = a_{i\alpha} \delta q_\alpha$, то системата с $k+p$ координати има k степени на свобода.

В реалното движение на системата координатите й $[q_\alpha]$ и $[q_i]$ са дадени функции на времето t. Двете положения P_0 и P_1 на системата, отговарящи на моментите t_0 и t_1, са определени със стойностите на $[q_\alpha]$ и $[q_i)$ за $t = t_0$ и $t = t_1$. Да разгледаме едно друго произволно движение на системата, безкрайно съседно до реалното движение, като крайните положения P_0 и P_1 на системата се запазват в двете движения. На функциите $[q_\alpha]$ и $[q_i]$ на реалното движение ще съответствуват функциите $[q_\alpha + \delta q_\alpha]$ и $[q_i + \delta q_i] = [q_i + a_{i\alpha} \delta q_\alpha]$ за фиктивното движение. Вариациите $[\delta q_\alpha]$ на $[q_\alpha]$ са безкрайно малки функции на t, които се анулират за $t = t_0$ и $t = t_1$ и освен това тези вариации са независими, тогава $\delta d q_\alpha = d \delta q_\alpha$, нещо, което се приема и от други автори [7—10].

Ние ще докажем, че ако заместим реалното движение на една нехолономна система с едно какво да е друго движение, безкрайно съседно до реалното и съвместимо с връзките, като в двете движения крайните положения P_0 и P_1 се запазват, то за **реалното движение** на системата интегралът

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \overline{T} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \overline{\delta} \dot{q}_i + P_a \delta q_a \right) dt \tag{2}$$

е р а в е н н а н у л а, каквито и да са независимите вариации $[\delta q_a]$ на $[q_a]$. В този интеграл T е кинетичната енергия на системата, когато я разглеждаме като холономна или все същото, когато не държим сметка на релациите (1); $\overline{T}$ — кинетичната енергия на нехолономната система, която се получава от T, когато заместим $[\dot{q}_i]$ със стойностите им, дадени от (1); вариациите $\delta \dot{q}_i$ се определят от (1), символът $\overline{\delta} \dot{q}_i$ означава вариациите от $\dot{q}_i$ като от независими, т. е. $\overline{\delta} \dot{q}_i dt = \delta dq_i = d \delta q_i$.

И наистина, имаме последователно:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \overline{T} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[- \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a} + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} \right) a_{ia} \right] \delta q_a dt ;$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \delta q_k + a_{ia} \delta \dot{q}_a \right) dt$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} a_{ka} \right) \delta q_a dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} a_{ia} \right) \delta q_a dt \tag{3}$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} a_{ka} - \dot{a}_{ia} \right) \delta q_a dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt ;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \overline{\delta} \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d \delta q_i = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt. \tag{4}$$

Тогава интегралът (2) взема вида

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[- \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a} + \frac{\partial T}{\partial q_i} a_{ia} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a} - \dot{a}_{ia} \right) + P_a \right] \delta q_a dt .$$

Понеже диференциалните уравнения на реалното движение на нехолономната система са (§ 3)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a} - a_{ia} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} a_{ia} - P_a = 0, \tag{5}$$

то интегралът δI е равен на нула за това движение. Обратно, уравнението $\delta I = 0$ дава диференциалните уравнения на движението на нехолономната система, защото, за да бъде δI нула, когато вариациите $[\delta q_a]$ на $[q_a]$ са произволни и независими, трябва коефициентите на тия вариации да бъдат всички нула. Прочее, получаваме уравненията (5).

Ако означим с T_1 функцията T, разгледана като функция само на скоростите $[\dot{q}_i]$ и с $\overline{T}_1$ функцията T_1, в която скоростите $[\dot{q}_i]$ се заменят с независимите $[\dot{q}_a]$ чрез уравненията на връзките, то

$$\delta T_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \overline{\delta} \dot{q}_i, \quad \delta \overline{T}_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

и интегралът (2) взема вида

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} [\delta(\overline{T} - \overline{T}_1 + T_1) + P_a \delta q_a]\, dt. \tag{2'}$$

Да разгледаме случая, когато дадените сили произхождат от функцията

$$U([q_a], [q_i], t),$$

тогава

$$\delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial q_a} + \frac{\partial U}{\partial q_i} a_{ia}\right) \delta q_a = P_a \delta q_a .$$

Ако положим

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\overline{T} - \overline{T}_1 + T_1 + U)\, dt,$$

уравненията на движението на нехолономната система се получават, като се приравни към нула вариацията на определения интеграл I.

Следователно, изпълнението на уравнението $\delta I = 0$ в реалното движение изразява обобщения принцип на Остроградски-Хамилтон за нехолономна система.

Да предположим, че между координатите $[q_a]$ и $[q_i]$ на материалната система съществуват p-те крайни зависимости:

$$q_i = q_i([q_a], t) \quad (i = k+1,\ k+2, \ldots, k+p\ (=s)), \tag{6}$$

тогава системата е холономна. Уравненията (1) се заменят с

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial q_i}{\partial t} \qquad \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_a} = a_{ia}, \ \frac{\partial q_i}{\partial t} = a_i\right),$$

където a_{ia} и a_i не зависят от $[\dot{q}_i]$.

Понеже

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a} - \dot{a}_{ia} = 0,$$

от равенствата (3) и (4) следва

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \overline{\delta \dot{q}_i} \, dt$$

и интегралът δI, даден с (2), взема вида

$$(7) \qquad \delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta \overline{T} + P_a \delta q_a) \, dt.$$

Ако във функцията $\overline{T}$ ($[\dot{q}_a]$, $[q_a]$, $[q_i]$, t] заместим $[q_i]$ със стойностите им, дадени от (6), то получаваме кинетичната енергия T_h на холономната система, която ще бъде функция на $[\dot{q}_a]$, $[q_a]$, t. Тогава

$$\frac{\partial T_h}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a}, \quad \frac{\partial T_h}{\partial q_a} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q_a},$$

$$\delta \overline{T} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a + \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q_a} \right) \delta q_a$$

$$= \frac{\partial T_h}{\partial \dot{q}_a} \delta \dot{q}_a + \frac{\partial T_h}{\partial q_a} \delta q_a = \delta T_h$$

и от (7) имаме

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T_h + P_a \delta q_a) \, dt.$$

Прочее, дохождаме до принципа на Хамилтон за холономна система: интегралът δI е равен на нула, каквито и да бъдат $[\delta q_a]$.

§ 8. Уравненията на движението на системи, подчинени на сили, които произхождат от функцията U, зависяща от координатите, скоростите и времето

Ние видяхме, че когато директно приложените сили на една материална система с $[q_i]$ координати произхождат от функцията на сили $U([q_i], t)$, уравненията на движението на системата се намират като се търси минимума на функцията от втора степен на $[\ddot{q}_i]$:

$$K_1 = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0) - \ddot{U} = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0 - 2\ddot{U}),$$

където функцията T_0 е кинетичната енергия T на системата, разгледана като функция само на $[q_i]$ и t. Тези уравнения се получават още и от уравнението

$$(1) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) \, dt = 0$$

за всички произволни и независими вариации $[\delta q_i]$ на $[q_i]$.

Нека сега намерим уравненията на движението на системата, когато функцията U зависи не само от $[q_i]$ и t, но още и от обобщените скорости $[\dot{q}_i]$. При този случай ние ще търсим минимум на функцията от втора степен на $[\ddot{q}_i]$.

$$K = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\,\ddot{T}_0 + \ddot{U} - 3\,\ddot{U}_0),$$

където U_0 е функцията U, разгледана като функция само на $[q_i]$ и t. Очевидно е, че функцията K_1 се получава от K, когато U не зависи от $[\dot{q}_i]$. И при този случай уравненията на движението се получават също от уравнението (1).

Да пресметнем функцията K. Имаме

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\ddot{T} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} q_k \ddot{q}_i + 2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k \ddot{q}_i + 2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t}\ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \ldots,$$

$$\dot{T}_0 = \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \ddot{T}_0 = \frac{\partial T}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \ldots;$$

прочее

$$\ddot{T} - 3\,\ddot{T}_0 = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \ddot{q}_i + 2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k \ddot{q}_i + 2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t}\ddot{q}_i - 2\frac{\partial T}{\partial q_i}\ddot{q}_i.$$

По същия начин намираме и $\ddot{U} - 3\,\ddot{U}_0$; тогава

$$K = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}\ \ q_i + 2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} q_k q_i + 2\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t}\ddot{q}_i - 2\frac{\partial T}{\partial q_i}\ddot{q}_i +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \ddot{q}_i + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k \ddot{q}_i + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial t}\ddot{q}_i - 2\frac{\partial U}{\partial q_i}\ddot{q}_i\Big)$$

и уравненията на движенията на системата са

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} q_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} q_k +$$

$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

за $i = 1, 2, \ldots, s$. Понеже

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot q_i \partial \dot q_k}\ddot q_k + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot q_i \partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i \partial t},$$

то уравненията вземат следната форма

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

където обобщените сили

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_i}$$

произхождат от функцията на сили (или потенциала) U.

Ако предположим, че T и U не зависят от времето t, то при тези случаи съществува интегралът на живите сили. И наистина, ако умножим уравненията (2) с $\dot q_i$, получаваме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\cdot \dot q_i - \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}\dot q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_i}\cdot \dot q_i$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right) - \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_i}\dot q_i\right).$$

Оттук интегралът на живите сили се дава с равенството

$$(3) \qquad T = U - \frac{\partial U}{\partial \dot q_i}\dot q_i + h.$$

Ние ще направим две приложения на уравненията (2) и (3). Известно е, че законът на Вебер се дефинира с уравнението

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\dot x^2 + \dot y^2}{2} + U\right) dt = 0, \quad U = \frac{\mu}{r}\left(1 + \frac{\dot r^2}{c^2}\right).$$

Понеже

$$T = \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2),$$

то

$$\dot T = \dot r \ddot r + r^2 \dot\theta \ddot\theta + r \dot r \dot\theta^2$$

$$\ddot T = \ddot r^2 + r^2 \ddot\theta^2 + 4 r \dot r\, \dot\theta \ddot\theta + r \dot\theta^2 \ddot r + \ldots,$$

$$\ddot T_0 = \frac{\partial T}{\partial r}\ddot r + \ldots, = r\dot\theta^2 \ddot r + \ldots$$

$$\ddot T - 3\ddot T_0 = \ddot r^2 + r^2\ddot\theta^2 + 4 r \dot r \dot\theta \ddot\theta - 2 r \dot\theta^2 \ddot r + \ldots$$

От друга страна

$$\dot U = -\frac{\mu}{r^2}\dot r\left(1 + \frac{\dot r^2}{c^2}\right) + \frac{2\mu}{c^2}\frac{\dot r \ddot r}{r},$$

$$\ddot{U} = \frac{2\mu}{c^2}\frac{\ddot{r}^2}{r} - \frac{\mu}{r^2}\left(1 + 5\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\ddot{r} + \ldots,$$

$$\ddot{U}_0 = \frac{\partial U}{\partial r}\ddot{r} + \ldots = -\frac{\mu}{r^2}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)\ddot{r} + \ldots$$

$$\ddot{U} - 3\ddot{U}_0 = \frac{2\mu}{c^2}\frac{\ddot{r}^2}{r} + \left(\frac{2\mu}{r^2} - \frac{2\mu}{c^2}\frac{\dot{r}^2}{r^2}\right)\ddot{r} + \ldots$$

Прочее

$$K = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right)\ddot{r}^2 + r^2\ddot{\theta}^2 + 2\left(\frac{\mu}{r} - \frac{\mu\dot{r}^2}{c^2 r^2} - r\dot{\theta}^2\right)\ddot{r} + 4r\dot{r}\dot{\theta}\ddot{\theta}\right] + \ldots$$

и уравненията на движението са:

$$\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right)\ddot{r} + \frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu\dot{r}^2}{c^2 r^2} - r\dot{\theta}^2 = 0.$$

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0,$$

откъдето

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}\left(1 + \frac{2r\ddot{r} - \dot{r}^2}{c^2}\right), \quad r^2\dot{\theta} = C;$$

прочее, силата е централна, на която алгебричната мярка върху радиус вектора е

$$-\frac{\mu}{r^2}\left(1 + \frac{2r\ddot{r} - \dot{r}^2}{c^2}\right).$$

Интегралът (2) на живите сили се дава с равенството

$$\frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\mu}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) - \frac{2\mu\dot{r}^2}{rc^2} + h$$

или

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} = \frac{\mu}{r}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) + h.$$

Също известно е, че законът на Риман се дефинира с уравнението

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + U\right)dt = 0, \quad U = \frac{\mu}{r}\left(1 + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{c^2}\right).$$

Лесно се намира, че

$$K = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right)(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{2\mu}{r^2}\left(1 + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{c^2}\right)\ddot{r} - \frac{4\mu}{c^2}\frac{\dot{r}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{r^2}\right]$$

където $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ и уравненията на движението са:

$$\left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right)\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3}\left(1 + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{c^2}\right) - \frac{2\mu}{c^2 r^2}\dot{r}\dot{x} = 0,$$

$$\left(1+\frac{2\mu}{c^2}\right)\ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}\left(1+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{c^2}\right)-\frac{2\mu}{c^2 r^2}\dot{r}y=0$$

или

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{2\mu}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{r}\right)=0,$$

$$\ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{2\mu}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{r}\right)=0.$$

Интегралът на живите сили е

$$\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}=\frac{\mu}{r}\left(1+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{c^2}\right)-\frac{2\mu(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{rc^2}+h$$

или

$$\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}=\frac{\mu}{r}\left(1-\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{c^2}\right)+h.$$

§ 9. Извеждане на принципа на Гаус за най-малкото принуждение, като се използува минималното свойство на функцията K

Нека $[q_i]$ са координатите на една холономна система и нека си образуваме функцията

(1) $$K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-Q_i\ddot{q}_i,\quad Q_i=\Sigma\vec{F}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i},$$

в която T е кинетичната енергия на системата, T_0 е функцията T разгледана като функция само на $[q_i]$ и времето t. Ние намерихме че уравненията на движението на холономната система са:

(2) $$\frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_i}=0\quad(i=1,2,\ldots,s)$$

и доказахме, че стойностите на $[\ddot{q}_i]$, определени от тези уравнения, правят функцията минимум във всеки момент. Понеже стойностите на обобщените ускорения $[\ddot{q}_i]$ определят ускоренията на различните точки от системата, то ние можем да кажем, че във всеки момент стойностите на ускоренията правят K минимум.

От кинетичната енергия

$$T=\frac{1}{2}\Sigma m\dot{M}^2,\quad\dot{\vec{M}}=\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}$$

чрез прости пресмятания намираме

(1') $$K=\frac{1}{2}\left[\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\ddot{q}_k\ddot{q}_i+\right.$$

$$+2\Sigma m\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\left(\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial q_r}\dot{q}_k\dot{q}_r+2\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial t}q_k+\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial t^2}\right)\ddot{q}_i\Bigg]-\Sigma\vec{F}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\ddot{q}_i,$$

като не сме написали членовете, несъдържащи $[\ddot{q}_i]$, и оттук

$$(2')\qquad \frac{\partial K}{\partial\ddot{q}_i}=\Sigma m\left[\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\ddot{q}_k+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\left(\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial q_r}\dot{q}_k\dot{q}_r+2\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial t}\dot{q}_k+\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial t^2}\right)\right]-\Sigma\vec{F}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}=0.$$

Ние сега ще изведем принципа на Гаус за най-малкото принуждение, като използуваме минималното свойство на функцията K.

Нека в даден момент t точката M от системата заема положението M и има скорост $\vec{\dot{M}}$. На M действува дадена сила $\vec{F}$ и силата $\vec{\Phi}$ на връзките, които тя е принудена да удовлетворява. Да предположим, че за време dt на M не действува никаква сила; тогава за това време тя ще се движи равномерно по права и в момента $t+dt$ нека бъде в точката N от правата, като изминатият път $\vec{MN}=\vec{\dot{M}}dt$. Но на точката M действуват силите $\vec{F}$ и $\vec{\Phi}$ и при нейното реално движение в момента $t+dt$ ще заеме положението P. Векторът $\vec{NP}$ представлява девиацията между реалното движение на несвободната точка M и нейното фиктивно праволинейно и равномерно движение. Този вектор се дава с равенството

$$\vec{NP}=\frac{1}{2}\vec{\ddot{M}}\,dt^2;$$

понеже $\vec{\ddot{M}}$ е реалното ускорение на M, дължимо от силите $\vec{F}$ и $\vec{\Phi}$, то

$$(3)\qquad m\vec{\ddot{M}}=\frac{2m\vec{NP}}{dt^2}=\vec{F}+\vec{\Phi}.$$

Да предположим сега, че премахваме положените връзки на системата; точката M остава свободна и се движи само под действието на дадената сила $\vec{F}$. Нека в момента $t+dt$ тя заеме положението S. Векторът $\vec{NS}$ е девиацията между движението на свободната точка M и нейното праволинейно и равномерно движение. Този вектор се дава с равенството

$$\vec{NS}=\frac{1}{2}\vec{\varphi}\,dt^2,$$

гдето $\vec{\varphi}$ е ускорението на свободната точка M, дължимо от силата $\vec{F}$; тогава

$$(4)\qquad m\vec{\varphi}=\frac{2m\overrightarrow{NS}}{dt^2}=\vec{F}$$

От (3) и (4) чрез изваждане получаваме

$$(5)\qquad \frac{2m(\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{NS})}{\Delta t^2}=\frac{2m\overrightarrow{SP}}{dt^2}=\vec{\Phi};$$

но от (3) имаме $\vec{\Phi}=m\ddot{\vec{M}}-\vec{F}$, тогава

$$(6)\quad \frac{2m\overrightarrow{SP}}{dt^2}=m\ddot{\vec{M}}-\vec{F}=m\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_i\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_k+2\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_i\partial t}\dot{q}_i+\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial t^2}\right)-\vec{F}.$$

Векторът $\overrightarrow{SP}$, който представлява девиацията между реалното движение на точката M и движението, което тя има ако беше свободна, Гаус нарича п р и н у ж д е н и е н а т о ч к а M. От равенството $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NS}+\overrightarrow{SP}$ заключаваме, че този вектор представлява частта от девиацията $\overrightarrow{NP}$, която се дължи от присъствието на връзките.

От последното равенство получаваме

$$\frac{4m^2\overrightarrow{SP}^2}{dt^4}=m^2\left[\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_k}\ddot{q}_k\ddot{q}_i+2\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\left(\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial q_r}\dot{q}_k\dot{q}_r+2\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial q_k\partial t}\dot{q}_k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2\vec{M}}{\partial t^2}\right)\ddot{q}_i\right]-2m\vec{F}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\ddot{q}_i+$$

като в дясната страна не сме написали членовете, които не зависят от $[\ddot{q}_i]$. Ако разделим двете страни на това равенство с m, сетне сумираме за всички точки от системата и най-сетне вземем в пред вид (1), то получаваме

$$(7)\qquad \Sigma m\overrightarrow{SP}^2=\frac{dt^4K}{2}=\frac{dt^4}{2}\left[\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-\Sigma\vec{F}\frac{\partial\vec{M}}{\partial q_i}\ddot{q}_i\right].$$

В лявата част на (7) се получи израз, наречен Гаусово „п р и н у ж д е н и е" на системата, който се изразява с въведената от нас функция K.

Понеже във всеки момент стойностите на реалните ускорения правят K минимум, то от това равенство следва, че $\Sigma m\overrightarrow{SP}^2$ е минимум за р е а л н о т о д в и ж е н и е на системата, което движение е съвместимо с положените връзки на системата, такива каквито са в даден момент t. В този даден момент системата заема едно определено положение, като скоростите на всички точки в системата са известни. За същото положение и за същите начални скорости, ние можем да си въобразим безкрайно много други движения, съвместими с връзките, които движения бихме реализирали без да изменяме дадените сили, като прибавим нови връзки, прилично избрани. За едно от тия движения, точката M от системата за всяко време dt дохожда в положението P_1 с обобщено ускорение $\ddot{q}_i$. Тогава в равенството (6) ще пишем P_1 вместо P, $\ddot{q}_i^1$ вместо $\ddot{q}_i$, а силата $\vec{F}$ не се изменя; от (7) получаваме

$$\Sigma m\overrightarrow{SP}_1^2 = \frac{dt^4}{2} K_1.$$

Но понеже $\Sigma m\overrightarrow{SP}^2$ е минимум за реалното движение, то

$$\Sigma m\overrightarrow{SP}_1^2 > \Sigma m\overrightarrow{SP}^2.$$

Оттук следва **принципът на Гаус за най-малкото принуждение**: за едно безкрайно малко време между всички суми, образувани от произведенията на масите на точките от системата с квадратите на техните принуждения, сумата отнесена за реалното движение е минимум.

Ако използуваме функцията K, принципът може да се изкаже и така: във всеки момент между всичките възможни ускорения на различните точки от системата, които позволяват връзките, реалните ускорения на тия точки правят минимум функцията K. Тогава въз основа на това изказване на принципа ние можем да намерим отново уравненията на движението (2). И наистина възможните ускорения на точките от системата, които позволяват връзките, се определят чрез различните произволни стойности на обобщените ускорения $[\ddot{q}_i]$. Реалните ускорения на точките са длъжни да направят функцията K, дадена с (1′), минимум; тогава стойностите на $[\ddot{q}_i]$, отговарящи на реалното движение, ще се получат като приравним към нула частните производни спрямо $[\ddot{q}_i]$ на функцията K и получаваме уравненията (1′).

Принципът на Гаус се прилага и за нехолономни системи, защото ние видяхме, че уравненията на движението на такива системи с линейни връзки изразяват, че функцията K_l, получаваща се от K, като изразим зависимите ускорения $[\ddot{q}_i]$ чрез независимите $[\ddot{q}_i]$, с помощта на уравненията на връзките, достига екстремум, който е длъжен да бъде минимум, нещо очевидно въз основа на елементарни физически и геометрически съображения.

Накрая нека забележим факта, че минималността на израза $\Sigma m\overrightarrow{SP}^2$ в реалното движение може да бъде доказана и със следните прости съображения. Силите на връзките $\vec{\Phi}$, дадени с (5), имат работа нула за всяка система премествания на точките от материалната система, съвместими с връзките, каквито са в даден момент t. Така че за двете системи преместванията $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MP}_1$ на точките, едното действително, а другото произволно, имаме

$$\Sigma\vec{\Phi}\,\overrightarrow{MP}=\frac{2}{dt^2}\Sigma m\overrightarrow{SP}\,\overrightarrow{MP}=0,\quad \Sigma\vec{\Phi}\,\overrightarrow{MP_1}=\frac{2}{dt^2}\Sigma m\overrightarrow{SP}\,\overrightarrow{MP_1}=0;$$

оттук чрез изваждане получаваме

$$\Sigma\vec{\Phi}\,\overrightarrow{PP_1}=\frac{2}{dt^2}\Sigma m\overrightarrow{SP}\,\overrightarrow{PP_1}=0, \tag{8}$$

т. е. сумата от работата на силите на връзките за системата премествания $\overrightarrow{PP_1}$, е също равна на нула. От друга страна

$$\Sigma m\overrightarrow{SP_1}^2=\Sigma m(\overrightarrow{PP_1}-\overrightarrow{PS})^2=\Sigma m\overrightarrow{PP_1}^2+\Sigma m\overrightarrow{PS}^2-2\Sigma m\overrightarrow{PS}\,\overrightarrow{PP_1};$$

понеже последната сума е нула, съгласно (8), получаваме

$$\Sigma m\overrightarrow{SP_1}^2-\Sigma m\overrightarrow{SP}^2=\Sigma m\overrightarrow{PP_1}^2.$$

Оттук следва, че когато системата точки P_1 се мени, т. е. когато системата премествания $\overrightarrow{MP_1}$ на точките се мени, но така, че преместванията са съвместими с връзките, то за всички тези произволни движения на материалната система разликата $\Sigma m\overrightarrow{SP_1}^2-\Sigma m\overrightarrow{SP}^2$ е винаги положителна, а това значи, че $\Sigma m\overrightarrow{SP}^2$ е минимум за реалното движение и въз основа на (7) функцията K е минимум за реалните ускорения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ив. Ценов. ДАН, 89, № 1 (1953).
2. Ив. Ценов. ДАН, 89, № 2 (1953).
3. Ив. Ценов. ДАН, 89, № 3 (1953).
4. Ив. Ценов. ДАН, 89, № 4 (1953).
5. P. Appell. Traité de mécanique rationelle, 2, p. 382, 1931.
6. В. В. Добронравов. Уч. зап МГУ, в. 122, механика, 2, 95. 19 (1948).
7. Г. К. Суслов. Теоретическая механика, изд. 3-е, стр. 597, 1946.
8. P. Appell. Bull. Soc. Mathem. de France, 21 (1898).
9. V. Volterra. Atti dei R. Accad. dei Science di Torino, 33, 215 (1897).
10. Т. Леви-Чивита, У. Амальдир. Курс теоретической механики, 2, ч. 1, русск. пер., стр. 328, 1951.

SUR UNE FORME NOUVELLE DES EQUATIONS DE LA MECANIQUE ANALYTIQUE ET QUELQUES APPLICATIONS DE CES EQUATIONS

Prof. Ivan Tzénoff

RÉSUMÉ

Dans le § I nous avons montré que les équations du mouvement d'un système mécanique holonome de coordonnées généralisées $[q_i]$ $(i=1, 2, \ldots, i, \ldots, s)$ sont

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i}-3\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)=Q_i \quad (i=1, 2, \ldots, s), \tag{1}$$

T étant l'énergie cinétique et Q_i le coefficient de δq_i dans l'expression du travail virtuel des forces données. Si nous désignons par T_0 la fonction T, considérée comme fonction seulement des $[q_i]$ et de t, c'est-à-dire en fixant les vitesses généralisées $[\dot{q}_i]$, les équations (1) prennent la forme

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_i}=Q_i \quad (i=1, 2, \ldots, s), \tag{2}$$

où nous avons posé

$$R=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0). \tag{3}$$

Enfin si nous introduisons la fonction

$$K=R-Q_i\ddot{q}_i=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-Q_i\ddot{q}_i, \tag{4}$$

qui dans le cas particulier où il existe une fonction de forces $U([q_i], t)$ prend la forme

$$K=R-\ddot{U}=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-\ddot{U},$$

alors les équations du mouvement (2) deviennent

(5) $$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Les équations du mouvement (5) montrent que dans le mouvement réel du système à chaque instant la fonction K, donnée avec (4), a une valeur minimum en comparant avec les mouvements obtenus en variant les accélérations $[\ddot{q}_i]$ dans l'expression de K. Ces équations sont invariantes pour tout un changement de coordonnées généralisées.

Nous supposons ensuite que le système est assujetti à l nouvelles liaisons non holonomes, exprimées par p relations différentielles linéaires entre les coordonnées $[q_\alpha]$ $(\alpha=1, 2, \ldots, k)$ et $[q_r]$ $(r=k+1, k+2, \ldots, k+p=s)$ de la forme

(6) $$\dot{q}_r=a_{r\alpha}\dot{q}_\alpha+a_r \quad (r=k+1, k+2, \ldots, k+p;\ \alpha=1, 2, \ldots, k).$$

Dérivons (6) par rapport au temps et remplaçons dans l'expression de K les variables dépendantes $[\ddot{q}_r]$ par leurs expressions en fonction des variables indépendantes $[\ddot{q}_\alpha]$; désignons par K_l la fonction K ainsi transformée. Alors les équations du mouvement du système non holonome sont

(7) $$\frac{\partial K_l}{\partial \ddot{q}_\alpha}=0 \text{ ou } \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha}+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_r}a_{r\alpha}=0 \quad (\alpha=1, 2, \ldots, k)$$

ou bien en vertu de (4)

(7') $$\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\alpha}=P_\alpha \text{ ou } \frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\alpha}+\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_r}a_{r\alpha}=P_\alpha,$$

où $P_\alpha=Q_\alpha+Q_r a_{r\alpha}$.

Dans le § 2 nous avons démontré que les nouvelles équations sont invariantes lorsqu'on effectue le changement de variables $[\dot{q}_i]$:

(8) $$\dot{q}_i=b_{ik}\omega_k+b_i \quad (i, k=1, 2, \ldots, s),$$

$[\omega_k]$ étant les nouvelles variables.

En remplaçant les valeurs de $[\ddot{q}_i]$ obtenues par les équations (8) dans la fonction K, nous obtenons une nouvelle fonction K_1 qui dépend des $[\dot{\omega}_k]$. Les équations du mouvement du système holonome sont

(9) $$\frac{\partial K_1}{\partial \dot{\omega}_k}=0 \quad (k=1, 2, \ldots s).$$

Pour un système non holonome de coordonnées $[q_\alpha]$ et $[q_r]$ nous effectuons le changement de variables

(10) $$\dot{q}_\alpha=c_{\alpha\beta}\omega_\beta+c_\alpha \quad (\alpha,\beta=1, 2, \ldots, k),$$

$[\omega_\beta]$ étant les nouvelles variables.
En tenant compte de (6) nous obtenons

(11) $$\dot{q}_r=a_{r\alpha}c_{\alpha\beta}\omega_\beta+a_{r\alpha}c_\alpha+a_r \quad (r=k+1, k+2, \ldots, s).$$

Si nous remplaçons dans l'expression (4) de K les $[\ddot{q}_a]$ et $[\ddot{q}_r]$ par leurs valeurs obtenues par (10) et (11) nous obtenons une fonction K_{t_1} qui dépend de $[\dot{\omega}_\beta]$. Les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial K_{t_1}}{\partial \dot{\omega}_\beta}=0 \quad (\beta=1, 2, \ldots, k). \tag{12}$$

Nous avons appliqué les équations (9) et (5) pour obtenir les équation d'Euler pour le mouvement d'un corps ayant un point fixe et les équations (12) pour trouver les équations du mouvement du cerceau.

Dans le § 3 nous avons calculé le terme complémentaire D_a dans les équations de Lagrange dans le cas d'un système non holonome On a

$$D_a=\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_a}-\left(\frac{d}{at}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a}\right)$$

$\overline{T}$ étant la fonction T dans laquelle $\dot{q}_r$ sont remplacés par leurs valeurs (6). Alors

$$D_a=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a}-\dot{a}_{ia}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}a_{ia} \tag{13}$$

et les équation du mouvement du système non holonome sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a}+D_a=P_a \quad (a=1, 2, \ldots, k), \tag{14}$$

D_a étant donné par (13).

Dans le cas particulier où les liaisons non holonomes (6) ne dépendent pas du temps t nous avons donné à D_a la forme suivante

$$D_a=-\frac{\partial N_\beta}{\partial \dot{q}_a}\dot{q}_\beta+2\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a}+\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i}a_{ia},$$

où $\overline{T}$ désigne l'énergie cinétique du système non holonome et N_β est composé par ces termes de $\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\beta}$ qui ne contiennent les dérivées secondes des coordonnées généralisées.

Enfin nous avons donné à D_a la forme suivante

$$D_a=\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial q_a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \dot{q}_a}+\frac{\partial R_{e,1}}{\partial \ddot{q}_a},$$

où $\overline{T}_1$ est la fonction T, considérée comme fonction seulement des $[q_i]$, $\dot{q}_i$ étant déterminé par (6), et $R_{e,1}$ est la fonction R_e, considérée comme fonction seulement des $[\ddot{q}_i]$ $\ddot{q}_i$ étant aussi déterminé par (6).

Dans le § 4 nous avons donné une autre forme aux équations du mouvement du système non holonome en introduisant au lieu de R la fonction

$$\overline{R}=\frac{1}{2}\left(\ddot{\overline{T}}-3\ddot{\overline{T}}_0\right),$$

$\overline{T}$ étant l'énergie cinétique du système. En calculant la différence

$$\overline{D}_a=\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_a}-\frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_a}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a}-\dot{a}_{ia}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}a_{ia}+\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_i},\tag{15}$$

la nouvelle forme des équations est

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_a}+\overline{D}_a=P_a \quad (a=1,\ 2,\ldots,\ k),\tag{16}$$

$\overline{D}_a$ étant donné par (15).

Lorsque $\overline{T}$ ne dépend par des $[q_i]$, ces équations deviennent

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_a}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a}-\dot{a}_{ia}\right)=P_a\tag{17}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a}-\frac{\partial T}{\partial q_a}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_a}-\dot{a}_{la}\right)=P_a.\tag{17'}$$

Si dans ce cas particulier les liaisons non holonomes (6) ne contiennent pas a_r les équations (17') prennent la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_a}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_a}+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_a}-\frac{\partial a_{ia}}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\beta=P_a,$$

donnée par Tchaplyghuine.

Dans le § 5 nous avons montré que les nouvelles équations du mouvement (5) et (7) dans le cas particulier où les forces agissantes admettent une fonction de forces U restent invariantes, si au lieu du temps t on introduit une nouvelle variable σ au moyen de la relation

$$\frac{d\sigma}{dt}=2(U+h),\tag{18}$$

h étant la constante dans l'intégrale des forces vives

$$T=U+h.$$

En vertu de (18) l'intégrale des forces vives devient

$$(2U+2h)g_{ik}q_i'q_k'=1,\tag{19}$$

g_{ik} étant les coefficients dans l'expression de la force vive; les fonctions K et K_l sont remplacées par K_1 et K_{l_1} et les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial K_1}{\partial q_i''}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, s), \tag{20}$$

$$\frac{\partial K_{l_1}}{\partial q_a''}=0 \quad (a=1, 2, \ldots, k), \tag{21}$$

les dérivées des $[q_i]$ et $[q_a]$ étant prises par rapport à σ.

Supposons maintenant que le système mécanique n'est par soumis à des forces données, c. à. d. $U=0$; nous représenterons le mouvement du système aux coordonnées $[q_i]$ par le mouvement d'un point dans un espace à s dimensions de métrique

$$ds^2=g_{ik}dq_idq_k.$$

Alors le point représentant se déplace sur une ligne géodésique et on obtient de (19)

$$d\sigma^2=2hds^2.$$

Il est évident que les équations (20) et (21) représentent les équations des lignes géodésiques, les dérivées des $[q_i]$ et $[q_a]$ étant prises par rapport à s.

Dans le § 6 nous donnons une nouvelle démonstration du principe de la moindre action de Maupertuis et Lagrange. Nous avons montré que les équations (20) expriment le fait que dans le mouvement réel du système i'intégrale

$$I=\int_{P_0}^{P_1}\Sigma m\vec{v}d\vec{M}=\int_{t_0}^{t_1}2Tat$$

atteint une valeur minimum en comparaison avec tous les autres mouvement qui conduisent le système de P_0 à P_1 et s'effectuent avec la même valeur de la constante h.

Dans le § 7 nous donnons une généralisation du principe d'Ostrogradski-Hamilton pour un système non holonome à liaisons linéaires. Nous avons montré que le mouvement réel d'un système mécanique non holonome diffère de tous les mouvements voisins possibles qui ménent le système donné d'une configuration $(t=t_0)$ à une autre $(t=t_1)$ par le fait que dans le mouvement réel l'intégrale

$$\delta I=\int_{t_0}^{t}\left(\delta\overline{T}-\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\,\delta\dot{q}_i+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\,\overline{\delta\dot{q}_i}+P_a\,\delta q_a\right)dt \tag{22}$$

est égale à zéro. T désigne l'énergie cinétique du système calculée sans tenir compte des liaisons non holonomes (6); $\overline{T}$ est l'énergie cinétique en tenant compte de (6); les variations $\delta\dot{q}_i$ sont calculier en partant de (6); le symbole $\overline{\delta\dot{q}_i}$ désigne les variations des $\dot{q}_i$ si on les suppose indépendantes, c. à. d.

$$\overline{\delta \dot{q}_i}\, dt = \delta d q_i = d \delta q_i.$$

Si l'on désigne par $\dot{T}_1$ la fonction T, considérée comme fonction seulement des vitesses $[\dot{q}_i]$ et par $\overline{T}_1$ la fonction T_1 dans laquelle $[\dot{q}_i]$ est donné par (6), alors

$$\delta T_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \overline{\delta \dot{q}_i}, \quad \delta \overline{T}_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

et l'intégrale (22) prend la forme

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} [\delta (\overline{T} - \overline{T}_1 + \overline{T}_1) + P_\alpha \delta q_\alpha]\, dt.$$

Enfin lorsque les forces données dérivent d'une fonction de forces U, alors I représente l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\overline{T} - \overline{T}_1 + T_1 + U)\, dt$$

et le principe généralisé exprime que $\delta I = 0$ dans le mouvement réel.

Dans le § 8 nous avons montré que lorsque les forces agissantes dérivent d'une fonction U qui contient aussi les vitesses, les équations du mouvement s'obtiennent en cherchant le minimum d'une fonction de deuxième degré en $[\ddot{q}_i]$

$$K = \frac{1}{2} (\ddot{T} - 3\ddot{T}_0 + \ddot{U} - 3\ddot{U}_0),$$

T_0 et U_0 désignant les fonctions T et U, considérées comme fonctions seulement des $[q_i]$ et de t.

Enfin dans le § 9 nous avons démontré que le „principe de la moindre contrainte“ de Gauss peut être déduit en nous servant de la propriété de la fonction K d'être minimum.