

ДВЕ ТЕОРЕМИ ЗА АПРОКСИМАЦИЯТА НА ЛИНЕЙНИТЕ ФОРМИ

Н. Обрешков

Една от основните теореми за апроксимацията на ирационалните числа е следната: нека t е произволно число >1 и ω е произволно реално число. Тогава съществуват цели числа x и y , за които имаме

$$(1) \quad |\omega x - y| < \frac{1}{t}, \quad 0 < x < t.$$

В една по-раншна работа прецизирахме тази теорема в следната форма: нека n е произволно цяло положително число. Тогава неравенството (1) може да се замени със следното:

$$(2) \quad |\omega x - y| < \frac{1}{n+1}, \quad 1 \leq x \leq n,$$

като знак за равенство имаме само тогава, когато $\omega = \frac{\lambda}{n+1}$, λ е цяло число, взаимно просто с $n+1$.

Неравенството (2) установихме с редицата на Фарей и с принципа на Дирихле, прецизиран в следната форма: нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са произволни неотрицателни числа, по-малки от единица. Тогава между числата $a_1, a_2, \dots, a_n, 1$ ще има поне две, разликата на които по абсолютна стойност е по-малка от $\frac{1}{n}$, или дадените числа ще съвпадат с числата

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}.$$

В настоящата работа разглеждаме въпроса за апроксимация при ограничението числото x да лежи между дадени числа m и n , $n \geq 2m$. Установяваме, че дясната част на (2) трябва да се замени с $\frac{m}{m+n}$. Освен това доказваме обща теорема за апроксимация на линейни форми.

1. Апроксимация на едно число

В този параграф ще установим новата теорема:

1. Нека m и n са произволни цели положителни числа, $n \geq 2m$. Тогава за всяко произволно реално

число ω съществуват цели числа x и y , за които имаме

$$(1) \quad |\omega x - y| < \frac{m}{m+n}, \quad m \leq x \leq n.$$

Знак за равенство в (1) при $m=1$ имаме само тогава, когато числото ω е равно на

$$\omega = \frac{\lambda}{n+1},$$

където λ е цяло число, взаимно просто с $n+1$ и при $m \geq 2$ само тогава, когато ω има формата $\omega = k \pm \frac{1}{n+m}$, където k е произволно цяло число.

Доказателство. Очевидно можем да се ограничим на случая, когато числото ω е положително и по-малко от 1. Да образуваме редицата E от всичките правилни несъкратими дроби, на които знаменателите не надминават n и са наредени по растяща големина (редица на Фарей). Известно е, че за кои да е две последователни дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ от редицата E имаме

$$p_1 q - p q_1 = 1.$$

Първият член на въпросната редица е очевидно $\frac{1}{n}$ и последният $\frac{n-1}{n}$. Както споменахме, случаят, когато $m=1$, бе установен напълно в по-раншна моя работа, но за пълнота на изложението ще дам отново по-съкратено доказателство. Ако $\omega < \frac{1}{n}$ или $\omega > \frac{n-1}{n}$, то

очевидно ще имаме (1) със знак за неравенство. Нека $\frac{p}{q} < \omega \leq \frac{p_1}{q_1}$, като $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ са два последователни члена на редицата E . Разглеждаме два случая, когато $\frac{p}{q} < \omega < \frac{p+p_1}{q+q_1}$ и второ, когато $\frac{p+p_1}{q+q_1} < \omega \leq \frac{p_1}{q_1}$.

За първия случай имаме

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{p+p_1}{q+q_1} - \frac{p}{q} = \frac{1}{q(q+q_1)},$$

откъдето получаваме

$$(2) \quad |q\omega - p| \leq \frac{1}{q+q_1} = \frac{1}{n+1}.$$

Знак за равенство можем да имаме само при $\omega = \frac{p}{q}$ или $\omega = \frac{p+p_1}{q+q_1}$.

Подобно получаваме и за втория случай. От предното разглеждане е очевидно, че знак за равенство в (1) можем да имаме само то-

гава, когато $\omega = \frac{s}{t}$, където s и t са взаимно прости числа. Ако $t \leq n$ ($t = q$), то при $x = t$ имаме $\omega x = s$. При $t = n + 1$ ($t = q + q_1$) числата ωx , $1 \leq x \leq n$, имат остатъци $1, 2, 3, \dots, n$ по модул $n + 1$ и в (1) имаме знак за равенство. Ако $t > n + 1$, от (2) се вижда, че в (1) имаме знака за неравенство.

Впрочем тази част на теоремата изведохме по-рано с прецизирания принцип на Дирихле.

Да разгледаме сега по-трудния и нов случай, когато $m \geq 2$.

Нека $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ са две последователни дроби от редицата E и

$$\frac{p}{q} \quad \omega < \frac{p_1}{q_1}.$$

Лесно се вижда, че поне едно от числата q и q_1 трябва да е по-малко от m . Именно ако $m > q$ и $m > q_1$, то бихме имали $q + q_1 < 2m \leq n$, което противоречи на неравенството $q + q_1 > n$. Нека $q < m$ и следователно $q_1 \geq m$. Да означим с λ цялото положително число, което удовлетворява условията

$$(\lambda - 1)q < m \leq \lambda q, \quad \lambda q \leq n.$$

Вследствие предположението $n \geq 2m$ такова число съществува. Нека

$$\frac{p\lambda}{q\lambda} \leq \omega \leq \frac{p\lambda + p_1}{q\lambda + q_1}.$$

Оттук имаме

$$\left| \omega - \frac{p\lambda}{q\lambda} \right| \leq \frac{\lambda}{q\lambda(q\lambda + q_1)}$$

или

$$|q\lambda\omega - p\lambda| < \frac{\lambda}{q\lambda + q_1}$$

От друга страна имаме

$$\frac{\lambda}{q\lambda + q_1} - \frac{\lambda}{q\lambda + q + q_1 - q} < \frac{\frac{m}{q} + 1}{m + n + 1 - q}.$$

Ще докажем, че

$$\frac{\frac{m}{q} + 1}{m + n + 1 - q} < \frac{m}{m + n}.$$

Това неравенство се свежда на неравенството

$$(n + m) \frac{q - 1}{q} > \frac{n}{m} + q.$$

Ако поставим $n = tm$, това неравенство става

$$m(1+t) \frac{q-1}{q} > t+q.$$

Понеже $m \geq q+1$, то достатъчно е да установим неравенството

$$(1+t)(q^2-1) > tq+q^2.$$

Но това неравенство се преобразува лесно в следното:

$$tq(q-1) > t+1,$$

което очевидно е изпълнено за $q \geq 2$ и $t > 1$.

Остава да разгледаме случая, когато

$$\frac{p\lambda+p_1}{q\lambda+q_1} \leq \omega \leq \frac{p_1}{q_1}.$$

Оттук получаваме

$$|q_1\omega - p_1| \leq \frac{\lambda}{q\lambda+q_1}$$

и имаме същото неравенство.

Нека сега

$$\frac{1}{n+m} < \omega < \frac{1}{n}.$$

Тогава ще имаме

$$|n\omega - 1| < \frac{m}{n+m}.$$

Ако

$$1 - \frac{1}{n} < \omega < 1 - \frac{1}{n+m},$$

то получаваме

$$|n\omega - (n-1)| < \frac{m}{n+m}.$$

И в двата случая имаме (1) със знак за неравенство. Аналогичен резултат получаваме непосредствено за $\omega < \frac{1}{n+m}$ и $\omega > 1 - \frac{1}{n+m}$.

При

$$\omega = \frac{1}{n+m}$$

числата ωx , $x = m, m+1, \dots, n$ растат от $\delta \frac{m}{n+m}$ до $1-\delta$. Следователно в (1) имаме знак за равенство. При $\omega = 1 - \frac{1}{n+m}$ за числата

$$\omega x, m < x < n,$$

имаме лесно проверяемото неравенство

$$\omega x \geq x-1 + \frac{m}{m+n}, m < x \leq n.$$

Следователно при $\omega = \frac{1}{n+m}$ и при $\omega = 1 - \frac{1}{n+m}$ ще имаме в (1) знак за равенство. Така теоремата е доказана. Ще отбележим, че теоремата може да се докаже с принципа на Дирихле за случая, когато числото n е кратно на m , $n = ml$. Именно тогава разглеждаме числата $\{m\nu\}$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, l$, и прилагаме прецизирания принцип на Дирихле. Също доказателството може да се извърши с аналогична редица на тази на Фарей, като се използват всички правилни дроби със знаменатели между m и n . При това ако няколко дроби са равни помежду си, взема се само тази, на която знаменателят е най-малък.

От теорема 1 получаваме непосредствено следното следствие: Нека $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ са две редици от положителни числа, неограничено растящи, но такива, че $\frac{n_k}{m_k} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува число N такова, че каквото и да е числото ω във всеки интервал (m_k, n_k) , $k > N$, има поне едно цяло число x_k , за което имаме $|\omega x_k - y_k| < \varepsilon$. Тук y_k е също цяло число.

2. Апроксимация на линейни форми

Да разгледаме линейната форма

$$(1) \quad f = \sum_{\mu=1}^{n_1} a_{1\mu} x_{\mu}^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n_2} a_{2\mu} x_{\mu}^{(2)} + \dots + \sum_{\mu=1}^{n_p} a_{p\mu} x_{\mu}^{(p)},$$

в която променливите са разделени в p групи по съответно $n_1, n_2, \dots, n_p$ променливи. Ще установим теоремата:

2. Нека $m_1, m_2, \dots, m_p$ са произволни цели положителни числа и $a_{s\mu}$ са произволни реални числа. Тогава винаги можем да намерим цели числа $x_{\mu}^{(s)}$, не всички равни на нула, както и цяло число y , които удовлетворяват следните условия: числата от всяка група $x_{\mu}^{(s)}$, $1 \leq \mu \leq n_s$, $1 \leq s \leq p$, са всичките неотрицателни или неположителни, $|x_{\mu}^{(s)}| \leq m_s$, $s = 1, 2, \dots, p$, и

$$(2) \quad \left| \sum_{\mu=1}^{n_1} a_{1\mu} x_{\mu}^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n_2} a_{2\mu} x_{\mu}^{(2)} + \dots + \sum_{\mu=1}^{n_p} a_{p\mu} x_{\mu}^{(p)} - y \right| \leq \frac{1}{M},$$

$$M = (m_1 n_1 + 1)(m_2 n_2 + 1) \dots (m_p n_p + 1).$$

При това последното неравенство (2) е точно.

На системата $x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_{n_s}^{(s)}$, $1 \leq s \leq p$, даваме следните значения:

$$\begin{array}{ccccc}
 m_s & m_s & m_s & m_s & m_s \\
 m_s & m_s & m_s & m_s & m_s - 1 \\
 m_s & m_s & m_s & m_s & m_s - 2 \\
 \\
 m_s & m_s & m_s & m_s & 0 \\
 m_s & m_s & m_s & m_s - 1 & 0 \\
 \\
 m_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0,
 \end{array}$$

числото на които е M . Формата f ще приеме M на брой стойности. Да означим за прегледност променливите с y_v , $1 \leq v \leq n_1 + n_2 + \dots + n_p$, и с b_μ коефициентите ѝ, т. е.

$$f = \sum_{v=1}^N b_v y_v, \quad N = n_1 + n_2 + \dots + n_p.$$

Значенията на f ще бъдат

$$f_\tau = \sum_{v=1}^N b_v y_v^{(\tau)},$$

като $1 \leq \tau \leq M$. Ще отбележим, че в коя да е разлика $f_{\tau_1} - f_{\tau_2}$ разликите $y_v^{(\tau_1)} - y_v^{(\tau_2)}$ от коя да е група променливи ще имат еднакъв знак, като някои от тях или всичките в групата са нули, но в цялата съвкупност от разлики ще има поне една отлична от нула. Да разгледаме тогава числата

$$1, \{f_\tau\} = f_\tau - [f_\tau], \quad 1 \leq \tau \leq M.$$

По принципа на Дирихле ще има поне една разлика $\{f_\alpha\} - \{f_\beta\} = f_\alpha - f_\beta - y$, $y = [f_\alpha] - [f_\beta]$, ненадминаваща по абсолютна стойност $\frac{1}{M}$ или поне числото $1 - \{f_\delta\}$, $\{f_\delta\} = \max \{f_k\}$, $1 \leq k \leq M$, не ще надминава $\frac{1}{M}$.

Но в разликите от коя да е група

$$x_1^{(\delta)}, x_2^{(\delta)}, \dots, x_{n_\delta}^{(\delta)}$$

ще имаме

$$|x_\mu^{(\delta)'} - x_\mu^{(\delta)''}| \leq m_\delta, \quad 1 \leq \delta \leq p,$$

с което първата част на теоремата е доказана.

За да установим втората част, т. е. че за някои форми границата в дясната част на (2) се достига, ще посочим една такава проста форма.

Не е трудно да се види, че за формата

$$f = \frac{X_1}{\lambda_1} + \frac{X_2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{X_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \dots + \frac{X_p}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p},$$

където за простота сме въвели означенията

$$\lambda_i = m_i n_i + 1, \quad 1 \leq i \leq p, \quad X_i = x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \dots + x_{n_i}^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

в (2) имаме знак за равенство. Действително да разгледаме новата форма

$$\varphi = Mf = \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_p X_1 + \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_p X_2 + \dots + \lambda_p X_{p-1} + X_p.$$

Като даваме на променливите стойностите от таблицата (3), тази форма взема стойности, които са числата 0, 1, 2, 3, ..., $M-1$. Именно, първо, най-малкото число очевидно е равно на нула и най-голямото е равно на

$$\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_p (\lambda_1 - 1) + \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_p (\lambda_2 - 1) + \dots + \lambda_p (\lambda_{p-1} - 1) + \lambda_p - 1 = M - 1.$$

Второ, всичките възможни числа са все различни. Да предположим, че има две равни числа

$$(4) \quad \begin{aligned} \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_p X'_1 + \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_p X'_2 + \dots + \lambda_p X'_{p-1} + X'_p = \\ = \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_p X''_1 + \dots + \lambda_p X''_{p-1} + X''_p. \end{aligned}$$

От това равенство получаваме

$$X'_p \equiv X''_p \pmod{\lambda_p}.$$

Понеже числата X'_p и X''_p са по-малки от λ_p , следва, че $X'_p = X''_p$. Но тогава равенството (4) става

$$\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{p-1} X'_1 + \lambda_3 \lambda_4 \dots \lambda_{p-1} X'_2 + \dots + X'_{p-1} = \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_{p-1} X''_1 + \dots + X''_{p-1}$$

и ще имаме

$$X'_{p-1} \equiv X''_{p-1} \pmod{\lambda_{p-1}}.$$

Но числата X'_{p-1} и X''_{p-1} са по-малки от λ_{p-1} и ще имаме следователно $X'_{p-1} = X''_{p-1}$.

Продължавайки така, се убеждаваме, че числата $X'_1, X'_2, \dots, X'_p$ са съответно равни на числата $X''_1, X''_2, \dots, X''_p$. От това следва, че първоначалните променливи в двата израза (4) ще имат съответно еднакви стойности. Като вземем предвид, че броят на числата (3) е равен на M , горното твърдение става очевидно. Но тогава формата f ще вземе стойностите

$$\frac{0}{M}, \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, \frac{M-1}{M} = 1 - \frac{1}{M}$$

и за нея в (2) ще имаме знак за равенство. Ще отбележим, че могат да се намерят всичките форми f , за които в (2) имаме знак за равенство.

За повече линейни форми имаме теоремата:

3. Нека $m_1, m_2, \dots, m_p$ са произволни цели положителни числа и

$$f_1 = \sum_{\mu=1}^{n_1} a_{1\mu}^{(1)} x_{\mu}^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n_2} a_{2\mu}^{(2)} x_{\mu}^{(2)} + \dots + \sum_{\mu=1}^{n_p} a_{p\mu}^{(p)} x_{\mu}^{(p)},$$

$$f_2 = \sum_{\mu=1}^{n_1} a_{1\mu}^{(2)} x_{\mu}^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n_2} a_{2\mu}^{(2)} x_{\mu}^{(2)} + \dots + \sum_{\mu=1}^{n_p} a_{p\mu}^{(2)} x_{\mu}^{(p)},$$

$$f_k = \sum_{\mu=1}^{n_1} a_{1\mu}^{(k)} x_{\mu}^{(1)} + \sum_{\mu=1}^{n_2} a_{2\mu}^{(k)} x_{\mu}^{(2)} + \dots + \sum_{\mu=1}^{n_p} a_{p\mu}^{(k)} x_{\mu}^{(p)}$$

са k линейни форми с произволни реални коефициенти. Тогава на променливите можем да дадем цели рационални стойности, не всички равни на нула, като числата от всяка група $x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_{n_s}^{(s)}$ са с еднакъв знак (не се изключва случаят всичките да са равни на нула), така че да бъдат изпълнени неравенствата

$$|x_{\mu}^{(s)}| < m_s, \mu = 1, 2, \dots, n_s, s = 1, 2, \dots, p,$$

$$(5) \quad |f_r - y_r| < \frac{1}{\sqrt[k]{M}}, r = 1, 2, \dots, k,$$

$$M = (m_1 n_1 + 1)(m_2 n_2 + 1) \dots (m_p n_p + 1).$$

Тук $y_1, y_2, \dots, y_k$ са цели числа.

Доказателството извършваме както преди, като се използва помощен единичен куб в пространството с k измерения. За точността на неравенствата (5) ще се спрем в друга работа.

Постъпила на 19. III. 1955

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе доказывается одна теорема об аппроксимации линейных форм вида $\omega x - y$ при предположении $m \leq x \leq n$, m, n натуральные числа, и теорема для форм вида

$$f = \sum_{i=1}^p \sum_{\mu=1}^{n_i} a_{i\mu} x_{\mu}^{(i)}$$

при предположении, что променливые сгруппированы таким образом что в каждой группе знаки променливых не меняются.

DEUX THÉORÈMES POUR L'APPROXIMATION DES FORMES LINÉAIRES

N. Obrechhoff

RÉSUMÉ

L'auteur démontre un théorème précis pour l'approximation de la forme $\omega x - y$, x étant soumis aux conditions $m \leq x \leq n$, m et n entiers, et un théorème pour la forme

$$f = \sum_{i=1}^p \sum_{\mu=1}^{n_i} a_{i\mu} x_{\mu}^{(i)},$$

les variables $x_{\mu}^{(i)}$, $1 \leq \mu \leq n_i$ ($1 \leq i \leq p$), étant du même signe.