ВЪРХУ ЕЛИПТИЧНИТЕ РОЕВЕ ПРАВИ В ДВУОСНАТА ГЕОМЕТРИЯ

Боян Петканчин

1. Някои сведения от двуосната геометрия. Нека j и k са две реални кръстосани прави в реалното триизмеримо проективно пространство P_3. Онази Клайнова геометрия в P_3, която има за основна група трансформации съвкупността от всички реални колинеации в P_3, които трансформират всяка от правите j, k в себе си, се нарича двуосна геометрия с абсолютни прави j, k. Споменатите колинеации ще наричаме B-колинеации; тяхната съвкупност е седемчленна група.

Една точка от P_3 е крайна за двуосната геометрия, ако е вън от абсолютните прави, безкрайна — ако лежи на някоя от тях. Една равнина от P_3 е крайна, ако не минава през никоя от абсолютните прави, безкрайна, ако минава през някоя от тях. Една права в двуосната геометрия е: крайна, ако е кръстосана с всяка от абсолютните прави; изотропна, ако пресича една от абсолютните прави, а е кръстосана с другата; безкрайна, ако пресича и двете абсолютни прави. Ние нататък ще разглеждаме самои *реални* точки, прави, равнини, координатни системи, параметър и пр.

Една реална проективна координатна система в P_3 ще наричаме B-система, ако координатните ѝ върхове (1,0,0,0), (0,1,0,0) лежат върху първата абсолютна права j, а координатните ѝ върхове (0,0,1,0), (0,0,0,1) — върху втората абсолютна права k. В двуосната геометрия ще си служим само с такива системи. Всяка точка от P_3 притежава относно една B-система безбройно много наредени четворки хомогенни координати (x_1, x_2, y_1, y_2) (координатни четворки). Ние ще означаваме x, y съответно наредените двойки реални числа (x_1, x_2), (y_1, y_2), така че наредената четворка (x_1, x_2, y_1, y_2) ще бъде отбелязвана накратко (x, y). Нулевата двойка (0,0) ще бъде означавана o, нулевата четворка $(0,0,0,0) = (o, o)$ също o; опасност от недоразумения не ще има. За наредените двойки и четворки от реални числа по познат начин се въвежда умножение с реални числа и събиране, следователно линейна зависимост и пр. Ако (x, y) е *една* четворка координати на някаква точка P спрямо B-системата K, то $(\lambda x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ при произволно реално число $\lambda \neq 0$ е пак четворка координати на *същата* точка спрямо *същата* система. И когато на λ даваме *всички*

отлични от 0 реални стойности, получаваме *така всички* четворки координати на P относно K.

Формулите

$$(1)\qquad a x_i = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j, \qquad a \bar{y}_i = \sum_{j=1}^{2} b_{ij} y_j,$$

където a, a_{ij}, b_{ij} $(i, j = 1,2)$ са реални числа с

$$(2)\qquad a = |a_{ij}| \neq 0, \qquad b = |b_{ij}| \neq 0,$$

допускат двояко тълкуване. I. Ако K и $\bar{K}$ са *две* B-системи и (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ са четворки координати на произволна точка от P_3 относно K и $\bar{K}$, съществуват реални числа a, a_{ij}, b_{ij}, удовлетворяващи (2), така че x_i, y_i се изразяват в зависимост от $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ чрез (1); a_{ij}, b_{ij} са едни и същи за всички точки в P_3, а a зависи от точката и от взетите й четворки (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ спрямо K и $\bar{K}$. Обратно, ако са дадени числата a_{ij}, b_{ij}, подчинени на (2), и една от системите K, $\bar{K}$, другата система е определена еднозначно от изискването, трансформационните формули от K към $\bar{K}$ да бъдат точно (1) с *дадените* a_{ij}, b_{ij}. II. Ако K е дадена B-система и (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$ са четворки координати относно K на *две* точки от пространството, съответствието $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ в P_3 при предположението, че важат (1) и (2), е B-колинеация. Обратно, при дадена координатна система K за *всяка* B-колинеация съществуват числа a_{ij}, b_{ij}, удовлетворяващи (2), така че точката $(\bar{x}, \bar{y})$, която отговаря на точката (x, y), се намира по формули (1) при подходящо число $a \neq 0$.

Числото

$$(3)\qquad xu = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

ще наричаме п р о и з в е д е н и е на наредените двойки числа $x = (x_1, x_2)$, $u = (u_1, u_2)$. Ще отбележим следните негови свойства:

I. Ако x, u, x^1, x^2, u^1, u^2 са произволни наредени двойки числа, а α_1, α_2, β_1, β_2 — произволни числа, важат равенствата

$$(4)\qquad xx = 0,$$

$$(5)\qquad xu = -ux,$$

$$(6)\qquad (\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2)(\beta_1 u^1 + \beta_2 u^2) = \alpha_1 \beta_1 . x^1 u^1 + \alpha_1 \beta_2 . x^1 u^2 + \alpha_2 \beta_1 . x^2 u^1 + \alpha_2 \beta_2 . x^2 u^2,$$

$$(7)\qquad (\alpha_1 x + \beta_1 u)(\alpha_2 x + \beta_2 u) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} . xu .$$

II. $xu = 0$ необходимото и достатъчно условие за линейната зависимост на двойките x, u.

III. При трансформиране на двойките x, u чрез когредиентни линейни трансформации

(8) $$\gamma \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{2} c_{ij}\, x_j, \qquad \delta \bar{u}_i = \sum_{j=1}^{2} c_{ij}\, u_j$$

$$(c = c_{ij} \neq 0,\ \gamma \neq 0,\ \delta \neq 0).$$

произведението $x\,u$ се трансформира така·

(9) $$\gamma\,\delta .\ x\,u = x\,u\,.c.$$

IV. Ако $x_1(t)$, $x_2(t)$ са реалнозначни функции на реалната променлива t в някакъв интервал T, наредената двойка $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ще наричаме също функция на t в T. Нейни производни $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, ... ще бъдат по дефиниция наредените двойки $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$, $(\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t))$, .. разбира се, при предположение, че съответните производни на $x_1(t)$, $x_2(t)$ съществуват. Естествено ще се употребяват и другите познати означения за производните.

V. Производната на произведението (3) се намира по формулата

(10) $$(x\,u)^{\cdot} = \dot{x}\,u + x\,\dot{u}.$$

VI. За двойката $x = x(t)$ равенството

(11) $$\dot{x}\,x = 0 \qquad \text{за } t \varepsilon T$$

е необходимото и достатъчно условие, за да съществува *постоянна* двойка x^0, така че да имаме

(12) $$x = \varrho\,.\,x^0 \qquad \text{за } t \varepsilon T$$

с някаква скаларна функция $\varrho = \varrho(t)$ на t в T. Предположено е, че $x(t)$ е дефинирана, диференцируема и постоянно отлична от o в T.

VII. За една крайна точка (x, y) имаме $x \neq o$ $y \neq o$ и (x, o), (o, y) са безкрайните точки съответно върху j и k на единствената безкрайна права през (x, y). Ако (x, y), (u, v) са две различни точки, съединителната им права е точно тогава крайна, когато

$$x\,u \neq 0,\ y\,v \neq 0.$$

VIII. Ако $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, $y^i = (y_1^i, y_2^i)$, $i = 1,2,3,4$, са 8 наредени двойки числа, имаме развитието

(13) $$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & y_1^1 & y_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & y_1^2 & y_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & y_1^3 & y_2^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & y_1^4 & y_2^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \\ x^4 & y^4 \end{vmatrix} = x^1x^2.y^3y^4 - x^1x^3.y^2y^4 + x^1x^4.y^2y^3 + x^2x^3.y^1y^4 - x^2x^4.y^1y^3 + x^3x^4.y^1y^2.$$

При наредени четворки (x^i, y^i) равенството $\Delta = 0$ е необходимото и достатъчно условие, за да бъдат компланарни четирите точки (x^i, y^i). Ако още точките (x^1, y^1), (x^2, y^2) са различни и също точките (x^3, y^3), (x^4, y^4) са различни, равенството $\Delta = 0$ е необходи-

мото и достатъчно условие, за да бъдат некръстосани двете прави, определени от първите две и от вторите две точки.

2. Основни точки на елиптичен рой прави. Нека наредените двойки $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ са реалнозначни функции на реалната променлива t в един интервал T. Предполагаме изпълнени условията

$$x u \neq 0, \quad y v \neq 0 \qquad \text{за } t \varepsilon T. \tag{14}$$

Ако K_0 е фиксирана B-система, $(x(t), y(t))$ ще бъде четворка координати спрямо K_0 на една крайна точка, а $(u(t), v(t))$ — на друга крайна точка. Съединителната права $g = g(t)$ на тези две точки ще бъде според VII крайна, тъй като важат (14). Когато t се мени в T, правата $g(t)$ описва един рой прави G. Точките върху правите на роя образуват една праволинейна повърхнина Γ. Ние ще предполагаме, че функциите $x(t), \ldots, v(t)$ имат за всяко t от T непрекъснати първи и втори производни.

Роят прави G се нарича елиптичен, ако е изпълнено условието

$$\sigma^2 - 4\varrho\tau < 0 \qquad \text{за } t \varepsilon T, \tag{15}$$

където са използувани означенията

$$\begin{gathered} \varrho = \dot{y} y \,.\, x u - \dot{x} x \,.\, y v, \quad \tau = \dot{v} v \,.\, x u - \dot{u} u \,.\, y v, \\ \sigma_1 = \dot{v} y \,.\, x u - \dot{u} x \,.\, y v, \quad \sigma_2 = \dot{y} v \,.\, x u - \dot{x} u \,.\, y v, \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = (\dot{v} y + \dot{y} v) \,.\, x u - (\dot{u} x + \dot{x} u) \,.\, y v. \end{gathered} \tag{16}$$

От (15), като вземем предвид, че $\sigma^2 \geq 0$, следва

$$\varrho\tau > 0 \qquad \text{за } t \varepsilon T. \tag{17}$$

Ако за $t \varepsilon T$ имаме $\sigma^2 - 4\varrho\tau > 0$, роят прави се нарича хиперболичен. Диференциалногеометричното изследване на хиперболичните роеве прави е предмет на нашата работа [1]. Ако за всяко $t \varepsilon T$ имаме $\sigma^2 - 4\varrho\tau = 0$, но $\varrho + \tau \neq 0$, роят прави се нарича параболичен; тези роеве са разгледани в работите ни [2] и [3].

В [1] е установено, че ако един рой прави е развиваем, изпълнено е условието

$$\varrho\tau - \sigma_1 \sigma_2 = 0 \qquad \text{за } t \varepsilon T. \tag{18}$$

Оттук веднага следва: всеки елиптичен рой прави е неразвиваем. Наистина ако нашият елиптичен рой G би бил развиваем, поради (15) и (18) бихме имали

$$\sigma^2 - 4\varrho\tau = (\sigma_1 + \sigma_2)^2 - 4\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 < 0,$$

а това е абсурд, тъй като квадратът на реалното число $\sigma_1 - \sigma_2$ е неотрицателно число.

На точката $P = \lambda(x, y) + \mu(u, v) = (\lambda x + \mu u, \lambda y + \mu v)$ върху произволната, но фиксирана права $g = g(t)$ от роя да наречем съответна онази точка $\bar{P} = \bar{\lambda}(x, y) + \bar{\mu}(u, v) = (\bar{\lambda} x + \bar{\mu} u, \bar{\lambda} y + \bar{\mu} v)$ върху g, в която g се пресича от единствената безкрайна права,

лежаща в допирателната равнина към Γ в точката ѝ P. Според [1] от неразвиваемостта на роя G следва, че съответствието $P \to \bar{P}$ е една проективност Π на g върху себе си. Уравненията на тази проективност са

$$(19) \qquad \psi' \bar{\lambda} = -\sigma_2 \lambda - \tau \mu, \qquad \psi' \bar{\mu} = \varrho \lambda + \sigma_1 \mu \qquad (\psi' \neq 0)$$

с детерминанта именно $\varrho\tau - \sigma_1 \sigma_2 \neq 0$. От представянето на P и $\bar{P}$ е ясно, че двойките числа (λ, μ) и $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ са двойки проективни координати на P и $\bar{P}$ спрямо подходяща проективна координатна система върху правата g. Уравнението за двойните елементи на проективността Π е

$$(20) \qquad \varrho \lambda^2 + \sigma \lambda \mu + \tau \mu^2 = 0.$$

Поради (15) не съществуват реални двойни елементи за Π, т. е. Π е елиптична проективност; оттук и името на разглежданите роеве прави.

Нашата първа цел ще бъде да намерим върху произволната права $g = g(t)$ на роя две различни реални, инвариантно свързани с роя точки. При това, когато говорим за инварианти на роя, имаме предвид D-, P- и B-инвариантност според терминологията от [1]. За инвариантни точки при хиперболичен рой в [1] послужиха двойните елементи на Π, които при такъв рой са реални и различни; сега обаче при елиптичен рой те не съществуват.

Както е известно от проективната геометрия, за елиптичната проективност Π върху g съществува точно една елиптична инволюция Ω върху g, за която $\Pi\Omega = \Omega\Pi$. Тази инволюция, която съвпада с Π, ако Π е инволюция, има уравнения

$$(21) \qquad \psi' \lambda^* = -\frac{\sigma}{2} \lambda - \tau \mu, \qquad \psi' \mu^* = \varrho \lambda + \frac{\sigma}{2} \mu \qquad (\psi' \neq 0),$$

ако $P = \lambda(x, y) + \mu(u, v)$, $P^* = \lambda^*(x, y) + \mu^*(u, v)$ е произволна двойка на инволюцията. Ω наричаме инволюция, комутативна с Π. Тя е определена *реално* по следния начин. Ако P е произволна точка от g и $\bar{P} = \Pi(P)$, $P = \Pi^{-1}(\bar{P})$, то точката $P^* = \Omega(P)$ е хармонично спрегнатата на P относно двойката $P\bar{P}$. Ясно е, че както проективността Π, така и инволюцията Ω са инвариантно свързани с роя G.

За решаване на поставената задача ние ще предполагаме нататък, че определящите точки (x, y), (u, v) върху правата g не са произволни, а че образуват двойка на инволюцията Ω. Това означава, че от (21) при $\lambda = 1$, $\mu = 0$ трябва да получим $\lambda^* = 0$, $\mu^* \neq 0$; оттук намираме $\sigma = 0$ за $t \varepsilon T$. А условието (15) сега се обръща в (17). И тъй ние ще предполагаме вече, че функциите $x(t), \ldots, v(t)$ удовлетворяват условията

$$(22) \qquad \sigma = 0, \quad \varrho\tau > 0 \qquad \text{за } t \varepsilon T.$$

Оттук поради вида на функциите ϱ, τ следва, че важат и (14).

С правата $g = g(t)$ от роя е свързана проективно-инвариантно една неособена праволинейна повърхнина $\Lambda = \Lambda(t)$ от втора степен, наречена повърхнина на Ли на роя G за правата му $g(t)$. $\Lambda(t)$

минава през правата $g(t)$ и във всяка точка на $g(t)$ двете праволинейни повърхнини Γ и $\Lambda(t)$ имат една и съща допирателна равнина. Онази система образуващи на $\Lambda(t)$, на която принадлежи правата $g(t)$, се нарича рой на Ли на G за правата му $g(t)$; ще я бележим с $L(t)$. Другата система образуващи на $\Lambda(t)$ се нарича спрегнат рой на Ли на G за правата му $g(t)$; ще я бележим с $M(t)$. Очевидно всички прави на $M(t)$ секат $g(t)$. В нашата работа [4] изведохме, че онази права $m(t;\lambda,\mu)$ от спрегнатия рой $M(t)$ на Ли, която минава през точката

$$\lambda(x,y)+\mu(u,v)=(\lambda x+\mu u,\ \lambda y+\mu v) \tag{23}$$

върху $g(t)$, е определена с тази точка и с всяка точка

$$\alpha(x,y)+\beta(u,v)+\varrho.[\lambda(\dot{x},\dot{y})+\mu(\dot{u},\dot{v})] \tag{24}$$
$$=(\alpha x+\beta u+\varrho(\lambda\dot{x}+\mu\dot{u}),\ \alpha y+\beta v+\varrho(\lambda\dot{y}+\mu\dot{v})),$$

стига между хомогенните параметри α, β, ϱ да има връзката

$$2(\mu\alpha-\lambda\beta).1+(A_1\lambda^2+A_2\lambda\mu+A_3\mu^2)\varrho=0. \tag{25}$$

Тук $.1$, A_1, A_2, A_3 са следните изрази:

$$.1=\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}=-xu.\dot{y}\,\dot{v}-\dot{u}x.\dot{y}v+\dot{x}x.\dot{v}v+\dot{u}u.\dot{y}y-\dot{x}u.\dot{v}y-yv.\dot{x}\dot{u}, \tag{26}$$

$$A_1=\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \\ \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}=-xu.y\ddot{y}-\dot{x}x.y\dot{v}+\ddot{x}x.\dot{y}v+xu.y\ddot{y}-\ddot{x}u.\dot{y}y-x\dot{x}.yv,$$

$$A_2=\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \\ \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{u} & \ddot{v} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}=-xu.\ddot{v}\dot{y}-x\dot{x}.\ddot{v}v+\ddot{u}x.\dot{y}v+\dot{x}u.\ddot{v}y-\ddot{u}u.\dot{y}y-yv.\ddot{u}\dot{x}$$
$$-xu.\dot{y}\dot{v}-\dot{u}x.y\ddot{v}+\ddot{x}x.\dot{v}v+\dot{u}u.\dot{y}y-x\ddot{u}.\dot{v}y-\ddot{x}\dot{u}.yv,$$

$$A_3=\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \\ \ddot{u} & \ddot{v} \end{vmatrix}=-xu.\ddot{v}\,\dot{v}-\dot{u}x.\ddot{v}v+\ddot{u}x.\dot{v}v+\dot{u}u.\ddot{v}y-\ddot{u}u.\dot{v}y-\ddot{u}\dot{u}.yv.$$

За детерминантите е използувано развитието (13) и краткото означение, въведено там. При това поради неразвиваемостта на G имаме

(27) $$\Delta \neq 0 \qquad \text{за } t \varepsilon T.$$

Да въведем проективната координатна система $P(t)$ в P_8, спрямо която произволна точка от пространството, имаща относно K_0 координатна четворка (p, q), притежава координати X_i, определени от

(28) $$(p,q) = X_0(u,v) + X_1(\dot{u},\dot{v}) + X_2(x,y) + X_3(\dot{x},\dot{y}).$$

Спрямо тази система повърхнината Λ на Ли има уравнение

(29) $$A_1 X_3^2 + A_2 X_1 X_3 + A_3 X_1^2 + 2\lambda(X_1 X_2 - X_0 X_3) = 0,$$

което също е намерено в [4]. Лявата му страна $\Phi(X) = \Phi(X_0, X_1, X_2, X_3)$ е квадратна форма на 4 променливи с ранг 4. Полярната ѝ форма е

(30) $$\Phi(X;X') = \Phi(X_0, X_1, X_2, X_3;\ X_0', X_1', X_2', X_3')$$

$$= A_1 X_3 X_3' + \frac{1}{2} A_2 (X_1 X_3' + X_3 X_1') + A_3 X_1 X_1' + \lambda(X_1 X_2' + X_2 X_1' - X_0 X_3' - X_3 X_0').$$

С помощта на повърхнината на Ли ще дефинираме върху правата $g = g(t)$ още една инволюция, инвариантно свързана с роя G. Да наречем: π — проективността на реда точки g върху снопа равнини g, при която на произволна точка от g отговаря допирателната равнина в тази точка към повърхнината Γ (или все едно към Λ); ψ_j — перспективността на снопа равнини g върху реда точки j; ω_j — инволюцията на спрегнатите относно повърхнината на Ли точки върху j. Разбира се, предположено е, че абсолютната права j не е тангента на Λ, така че Λ възбужда върху нея инволюция на спрегнати точки. Да разгледаме проективността

(31) $$\Omega_j = \pi \psi_j \omega_j \psi_j^{-1} \pi^{-1}$$

на правата g върху себе си, която е определена именно защото j не е тангента на Λ. Имаме най-напред, че Ω_j не е идентитетът ι_g в g; защото ако би било $\Omega_j = \iota_g$, от (31) би следвало, че ω_j е идентитетът в j, което е абсурд. По нататък

$$\Omega_j^2 = \pi \psi_j \omega_j \psi_j^{-1} \pi^{-1} \pi \psi_j \omega_j \psi_j^{-1} \pi^{-1} = \pi \psi_j \omega_j^2 \psi_j^{-1} \pi^{-1} = \iota_g$$

показва, че Ω_j е инволюция в g; взето е предвид, че ω_j^2 е идентитетът в j. Накратко казано: две точки от g са точно тогава спрегнати в Ω_j, когато допирателните равнини към Γ (и Λ) в тези точки пресичат j в две спрегнати относно Λ точки. Ще намерим аналитичното представяне на Ω_j.

Да вземем върху g точката

(32) $$\lambda(x,y) + \mu(u,v),$$

която спрямо въведената вече проективна координатна система $P(t)$ има координати

$$X'_0 = \mu,\ X'_1 = 0,\ X'_2 = \lambda,\ X'_3 = 0. \tag{33}$$

Допирателната равнина в тази точка към Γ или все едно към Λ има уравнение $\Phi(X; X') = 0$, където координатите X'_i са (33). Заместваме в (30) X'_i със стойностите (33) и приравняваме на 0; уравнението на допирателната равнина се получава

$$\lambda X_1 - \mu X_3 = 0. \tag{34}$$

Уравненията на правата g спрямо $P(t)$ са очевидно

$$X_1 = 0,\ X_3 = 0. \tag{35}$$

Да намерим и уравненията на j спрямо $P(t)$. Точката (28) от пространството лежи точно тогава на j, когато втората двойка $q = o$, т. е.

$$X_0 v + X_1 \dot{v} + X_2 y + X_3 \dot{y} = o. \tag{36}$$

Поради линейната независимост на y и v (следваща от $yv \neq 0$) (36) ще бъде изпълнено точно тогава, когато $qy = 0$, $qv = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} yv.X_0 - \dot{v}y.X_1 - \dot{y}y.X_3 &= 0, \\ yv.X_2 + \dot{v}v.X_1 + \dot{y}v.X_3 &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Това са уравненията на j относно $P(t)$. От (34) и (37) веднага се намира пресечната точка на допирателната равнина с j; тя има координати

$$X_0 \quad \lambda.\dot{y}y + \mu.\dot{v}y,\ X_1 = \mu.yv,\ X_2 = -(\dot{y}v.\lambda + \dot{v}v.\mu),\ X_3 = \lambda.yv. \tag{38}$$

Да вземем втора точка

$$\lambda'(x,y) + \mu'(u,v) \tag{39}$$

върху g със съответна пресечна точка на j с допирателната равнина към Λ (и Γ) в тази точка, именно

$$X'_0 = \lambda'.\dot{y}y + \mu'.\dot{v}y,\ X'_1 = \mu'.yv,\ X'_2 = -(\dot{y}v.\lambda' + \dot{v}v.\mu'),\ X'_3 = \lambda'.yv. \tag{40}$$

Двете точки (32) и (39) ще бъдат точно тогава спрегнати в инволюцията Ω_j, когато точките (38) и (40) върху j са спрегнати в инволюцията ω_j, т. е. спрегнати относно Λ. Условието за това е $\Phi(X, X') = 0$. Като заместим следователно в полярната форма (30) вместо X_i и X'_i координатите (38) и (40), ще получим след очевидни преобразувания: точките (32) и (39) образуват точно тогава двойка на инволюцията Ω_j, когато е изпълнено условието

$$2a_0.\lambda\lambda' + a_1.(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + 2a_2.\mu\mu' = 0, \tag{41}$$

в което коефициентите a_i са:

$$a_0 = A_1 . y v - 2 \Lambda . \dot{y} y,$$

(42) $$a_1 = A_2 . y v - 2 \Lambda . (\dot{y} v + \dot{v} y),$$

$$a_2 = A_3 . y v - 2 \Lambda . \dot{v} v.$$

Именно (41) е търсеното уравнение на инволюцията Ω_j. В хомогенна форма то се написва

(43) $$\psi \lambda' = a_1 \lambda + 2 a_2 \mu, \quad \psi \mu' = -(2 a_0 \lambda + a_1 \mu)$$

и има детерминанта $4 a_0 a_2 - a_1^2 \neq 0$ при направеното предположение, че j не е тангента на Λ.

Да потърсим пресечните точки на абсолютната права j с повърхнината на Ли. Ако правата на $M(t)$ през такава пресечна точка сече g в точката (23), за пресечната точка можем да вземем представянето (24) при условието (25). Но понеже тази пресечна точка трябва да лежи върху j, нейната втора съставяща е o:

$$\alpha y + \beta v + \varrho (\lambda \dot{y} + \mu \dot{v}) = o.$$

Това условие поради $y v \neq 0$ е еквивалентно с двете уравнения, които се получават от него чрез умножение с y и с v:

(44) $$\beta . y v - \varrho (\lambda . \dot{y} y + \mu . \dot{v} y) = 0,$$

$$\alpha . y v + \varrho (\lambda . \dot{y} v + \mu . \dot{v} v) = 0.$$

Определяме оттук α и β и ги заместваме в (25). Получаваме уравнение

(45) $$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda \mu + a_2 \mu^2 = 0$$

за пресечните точки на j с Λ. Това е същото уравнение, което поради (41) ще даде двойните елементи на Ω_j върху g, ако j не е тангента на Λ. От това уравнение се установява дали j е нетангента, истинска тангента или образуваща на Λ.

Ако j не е тангента на Λ, съществуват инволюциите ω_j върху j и Ω_j върху g. Точките $\lambda(x,y)+\mu(u,v)$, $\lambda'(x,y)+\mu'(u,v)$ върху g образуват точно тогава обща двойка на инволюциите Ω и Ω_j, когато са изпълнени условията

(46) $$\varrho . \lambda \lambda' + \mu \mu' . \tau = 0,$$

(47) $$2 a_0 . \lambda \lambda' + a_1 (\lambda' \mu + \mu' \lambda) + 2 a_2 . \mu \mu' = 0.$$

Чрез изключване на λ' и μ' от (46) и (47) намираме, че точката $\lambda(x,y)+\mu(u,v)$ върху g заедно със съответната си в инволюцията Ω точно тогава образува двойка и на инволюцията Ω_j, когато λ, μ удовлетворяват уравнението

(48) $$a_1 \varrho . \lambda^2 + 2 (a_2 \varrho - a_0 \tau) . \lambda \mu - a_1 \tau . \mu^2 = 0.$$

За подкоренната величина при решаването на това квадратно уравнение имаме израза

(49) $$D = (a_2 \varrho - a_0 \tau)^2 + a_1^2 \varrho \tau.$$

Поради $a_1^2 - 0, \varrho\tau > 0, (a_2\varrho - a_0\tau)^2 > 0$ получаваме $D \geq 0$. И $D = 0$ точно тогава, когато двете събираеми са едновременно 0, т. е.

$$a_1 = 0,\ a_2\varrho - a_0\tau = 0. \tag{50}$$

В случая $D > 0$ уравнението (48) дава точно една двойка различни реални точки, която е обща за Ω и Ω_j. В случая $D = 0$ поради (50) уравнението (48) се удовлетворява за произволни стойности на λ и μ, т. е. инволюциите Ω и Ω_j съвпадат; в случая $D > 0$, разбира се, $\Omega_j \neq \Omega$.

За правата j по отношение на повърхнината Λ имаме следните възможности:

1) j не е тангента на Λ и $\Omega_j \neq \Omega$: $a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0$; $(a_2\varrho - a_0\tau)^2 + a_1^2\varrho\tau > 0$;

(51) 2) j не е тангента на Λ, но $\Omega_j = \Omega$: $a_0a_2 \neq 0$, $a_1 = 0$, $a_2\varrho - a_0\tau = 0$;

3) j е истинска тангента на Λ: $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$, $|a_0| + |a_2| \neq 0$;

4) j е образуваща на Λ: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

Във всеки от четирите случая дадените след двоеточието равенства и неравенства са необходимите и достатъчни условия, за да имаме този случай.

Аналогично пресечните точки на втората абсолютна права k с повърхнината Λ се определят от уравнението

$$\beta_0\lambda^2 + \beta_1\lambda\mu + \beta_2\mu^2 = 0, \tag{52}$$

където

$$\beta_0 = A_1 . x u - 2\ 1 . \dot{x} x,$$

$$\beta_1 = A_2 . x u - 2\ 1 . (\dot{x}u + \dot{u}x), \tag{53}$$

$$\beta_2 = A_3 . x u - 2\ 1 . \dot{u} u.$$

От уравнението (52) се намират условията, за да бъде k нетангента, истинска тангента, образуваща на Λ.

Ако k не е тангента на Λ, върху нея съществува инволюция ω_k на спрегнатите относно Λ точки, а върху правата g се дефинира (при очевидни означения) инволюция

$$\Omega_k = \pi\psi_k\omega_k\psi_k^{-1}\pi^{-1} \tag{54}$$

с уравнение

$$2\beta_0 . \lambda\lambda' + \beta_1(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + 2\beta_2 . \mu\mu' = 0 \tag{55}$$

или хомогенно

$$\psi\lambda' = \beta_1\lambda + 2\beta_2\mu,\quad \psi\mu' = -(2\beta_0\lambda + \beta_1\mu). \tag{56}$$

От (55) се вижда, че уравнението за двойните елементи на Ω_k е пак (52).

За правата k по отношение на повърхнината Λ имаме аналогичните на (51) възможности:

а) k не е тангента на Λ и $\Omega_k \neq \Omega$: $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 \neq 0$, $(\beta_2\varrho - \beta_0\tau)^2 + \beta_1^2\varrho\tau > 0$;

(57) б) k не е тангента на Λ, но $\Omega_k = \Omega$: $\beta_0 \beta_2 \neq 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \varrho - \beta_0 \tau = 0$;

в) k е истинска тангента на Λ: $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 = 0$, $|\beta_0| + |\beta_2| \neq 0$;

г) k е образуваща на Λ: $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$.

Лесно е да се види, че

(58) $$|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0, \quad |\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0.$$

Наистина ако бихме имали напр. $|\alpha_0| + |\beta_0| = 0$, т. е. $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, то от тези две уравнения

$$\alpha_0 = A_1 . yv - 2\Lambda . \dot{y} y = 0,$$

$$\beta_0 = A_1 . xu - 2\Lambda . \dot{x} x = 0$$

поради

$$\begin{vmatrix} yv & -\dot{y} y \\ xu & -\dot{x} x \end{vmatrix} = \dot{y} y . xu - \dot{x} x . yv = \varrho \neq 0,$$

следващо от (17), ще получим $A_1 = 0$, $2\Lambda = 0$; второто равенство обаче ще противоречи на (27). По същия начин се изключва и $\alpha_2 + \beta_2 = 0$.

От неравенствата (58) следва: поне една от абсолютните прави не е образуваща на Λ.

Наистина, ако и двете абсолютни прави бяха образуващи на Λ, от (51) и (57) [случаи 4) и г)] ще имаме

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$$

в противоречие с (58). Впрочем лесно е да се види и геометрически, че j и k не могат да бъдат едновременно образуващи на Λ.

За производните $\dot{x}$, $\dot{u}$, $\dot{y}$, $\dot{v}$ поради линейната независимост на x, u и на y, v ще имаме уравнения от вида

(59) $$\dot{x} = a_1 x + a_2 u, \qquad \dot{y} = b_1 y + b_2 v,$$

$$\dot{u} = a_3 x + a_4 u, \qquad \dot{v} = b_3 y + b_4 v,$$

където $a_1, \ldots, b_4$ са еднократно гладки скаларни функции на t в T. От (59) чрез диференциране намираме

$$\ddot{x} = (\dot{a}_1 + a_1^2 + a_2 a_3) x + (\dot{a}_2 + a_1 a_2 + a_2 a_4) u,$$

(60) $$\ddot{u} = (\dot{a}_3 + a_1 a_3 + a_3 a_4) x + (\dot{a}_4 + a_2 a_3 + a_4^2) u,$$

$$\ddot{y} = (\dot{b}_1 + b_1^2 + b_2 b_3) y + (\dot{b}_2 + b_1 b_2 + b_2 b_4) v,$$

$$\ddot{v} = (\dot{b}_3 + b_1 b_3 + b_3 b_4) y + (\dot{b}_4 + b_2 b_3 + b_4^2) v.$$

От (59) и (60) се намират разните произведения $\dot{u} x$, $\dot{y} v$, $\ddot{y} \dot{y}$, ..., които фигурират в изразите за ϱ, σ, τ, Λ, A_i, α_i, β_i. Всички

тези величини се изразяват чрез осемте скаларни функции $a_1, \ldots, b_4$ и техните производни $\dot{a}_1, \ldots, \dot{b}_4$. Например по (16) получаваме

$$\varrho = (a_2 - b_2).xu.yv, \quad \tau = (b_3 - a_3).xu.yv,$$
$$\sigma = (b_1 - a_1 + a_4 - b_4).xu.yv. \tag{61}$$

Тъй като според (22_1) $\sigma = 0$, намираме $b_1 - a_1 = b_4 - a_4$. Ако означим общата стойност на тези две разлики с f, имаме

$$b_1 = a_1 + f, \; b_4 = a_4 + f, \tag{62}$$

където f е еднократно гладка скаларна функция на t в T. Поради условието (22_2) и (61) имаме

$$(a_2 - b_2)(b_3 - a_3) > 0 \qquad \text{за } t \in T. \tag{63}$$

За величините α_i, β_i се получават изрази:

$$\alpha_0 = [\dot{f}(a_2 - b_2) - (\dot{a}_2 - \dot{b}_2) f + (a_2 - b_2)(f^2 - a_2 a_3 - b_2 b_3 + 2 a_3 b_2)].xu.(yv)^2 + (a_1 - a_4)(a_2 - b_2) f.xu.(yv)^2,$$

$$\alpha_1 = [-(b_3 - a_3)(\dot{a}_2 - \dot{b}_2) + (a_2 - b_2)(\dot{b}_3 - \dot{a}_3) + 2 f(a_2 b_3 - a_3 b_2)].xu.(yv)^2 + 2(a_1 - a_4)(a_2 - b_2)(b_3 - a_3).xu.(yv)^2,$$

$$\alpha_2 = [(b_3 - a_3)\dot{f} - (\dot{b}_3 - \dot{a}_3) f + (b_3 - a_3)(f^2 - a_2 a_3 - b_2 b_3 + 2 a_2 b_3)].xu.(yv)^2 - (a_1 - a_4)(b_3 - a_3) f.xu.(yv)^2, \tag{64}$$

$$\beta_0 = [(a_2 - b_2)\dot{f} - (\dot{a}_2 - \dot{b}_2) f - (a_2 - b_2)(f^2 - a_2 a_3 - b_2 b_3 + 2 a_2 b_3)].(xu)^2.yv + (a_1 - a_4)(a_2 - b_2) f.(xu)^2.yv,$$

$$\beta_1 = \alpha_1 . \begin{matrix} xu \\ yv \end{matrix},$$

$$\beta_2 = [(b_3 - a_3)\dot{f} - (\dot{b}_3 - \dot{a}_3) f - (b_3 - a_3)(f^2 - a_2 a_3 - b_2 b_3 + 2 a_3 b_2)] (xu)^2 yv - (a_1 - a_4)(b_3 - a_3) f.(xu)^2.yv.$$

С тези стойности за α_i, β_i намираме

$$\beta_2 \varrho - \beta_0 \tau = (\alpha_2 \varrho - \alpha_0 \tau) . \begin{matrix} xu \\ yv \end{matrix}. \tag{65}$$

Ако комбинираме четирите възможности (51) за положението на j спрямо Λ с четирите възможности (57) за положението на k спрямо Λ, получаваме следните съществено различни случаи: I. [1а)]; II. [1б) или 2а)]; III. [1в) или 3а)]; IV, [1г) или 4а)]; V. [2б)]; VI. [2в) или 3б)]; VII. [2г) или 4б)]; VIII. [3в)]; IX. [3г) или 4в)]; X. [4г)].

Например случаите 1б) и 2а) от II не се различават геометрически. При 1б) j не е тангента на Λ и $\Omega_j \neq \Omega$, k не е тангента и $\Omega_k = \Omega$; при 2а) обратно, k не е тангента и $\Omega_k \neq \Omega$, j не е тангента

и $\Omega_j=\Omega$. Разменени са само ролите на j и k. Аналогично само разменяне на ролите на j и k имаме и в двата подслучая на III, IV, VI, VII, IX.

Всъщност случаят X, в който всяка от правите j, k би била образуваща на Λ, е невъзможен геометрически; това получихме вече като резултат от неравенствата (58). И редица други случаи са също невъзможни, именно II, IV, VI, IX, X. Да докажем невъзможността им.

II. За образец да вземем подслучая 1б). Сега поради (51) и (57) имаме

$$(\alpha_2\varrho-\alpha_0\tau)^2+\alpha_1^2\varrho\tau>0;\ \beta_1=0,\ \beta_2\varrho-\beta_0\tau=0.$$

Тогава

$$0=(\beta_2\varrho-\beta_0\tau)^2+\beta_1^2\varrho\tau=[(\alpha_2\varrho-\alpha_0\tau)^2+\alpha_1^2\varrho\tau]\begin{pmatrix}x&u\\y&v\end{pmatrix}^2>0. \tag{66}$$

Получихме противоречието $0>0$. При това са използувани (64_5) и (65). Аналогично противоречие се получава и в 2а).

IV. Разглеждаме подслучая 1г), в който според (51) и (57) имаме

$$(\alpha_2\varrho-\alpha_0\tau)^2+\alpha_1^2\varrho\tau>0;\quad \beta_0=\beta_1=\beta_2=0.$$

И сега чрез равенството (66) получаваме същото противоречие.

VI. Да третираме подслучая 2в), в който по (51) и (57) имаме

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2\varrho-\alpha_0\tau=0,\ \beta_1^2-4\beta_0\beta_2=0,\ |\beta_0|+|\beta_2|\neq 0. \tag{67}$$

От $\alpha_1=0$ според (64_5) получаваме $\beta_1=0$ и (67_3) дава $\beta_0\beta_2=0$. От тук или $\beta_0=0$, или $\beta_2=0$. Ако $\beta_0=0$, (67_4) показва, че $\beta_2\neq 0$. От друга страна по (65)

$$0=\alpha_2\varrho-\alpha_0\tau=\begin{vmatrix}y&v\\x&u\end{vmatrix}.(\beta_2\varrho-\beta_0\tau)=\begin{vmatrix}y&v\\x&u\end{vmatrix}.\varrho.\beta_2\neq 0$$

и имаме противоречието $0\neq 0$. Ако пък $\beta_2=0$, от (67_4) имаме $\beta_0\neq 0$ и по-нататък

$$0=\alpha_2\varrho-\alpha_0\tau=\begin{vmatrix}y&v\\x&u\end{vmatrix}.(\beta_2\varrho-\beta_0\tau)=-\begin{vmatrix}y&v_1\\x&u\end{vmatrix}.\tau.\beta_0\neq 0,$$

т. е. същото противоречие.

IX. Вземаме подслучая 3г), в който според (51) и (57):

$$\alpha_1^2-4\alpha_0\alpha_2=0,\quad |\alpha_0|+|\alpha_2|\neq 0,\quad \beta_0=\beta_1=\beta_2=0. \tag{68}$$

От $\beta_1=0$ според (64_5) получаваме и $\alpha_1=0$, следователно $\alpha_0\alpha_2=0$ и или $\alpha_0=0$ или $\alpha_2=0$. Като вземем предвид

$$0=\beta_2\varrho-\beta_0\tau=\frac{x\ u}{y\ v}.(\alpha_2\varrho-\alpha_0\tau),$$

и в двата случая получаваме противоречие по същия начин както в VI.

Да предположим сега, че е налице някой от случаите I, III, VIII. При това за определеност от III разглеждаме подслучая 1 в).

I, III 1 в). И в двата тези случая правата j не е тангента на Λ и съответната инволюция $\Omega_j \neq \Omega$. Върху правата g получаваме две *различни* инволюции Ω и Ω_j и едната от тях — Ω — е елиптична. Известно е от проективната геометрия, че тогава съществува точно една обща двойка на двете инволюции; двете точки на двойката са различни и реални. Тези две точки върху g, както знаем, се намират чрез квадратното уравнение (48) (с $D > 0$) и са инвариантно свързани с роя; наричаме ги основни точки на роя върху правата му g.

Ако приемем, че определящите точки (x, y), (u, v) за правата g от роя не са произволни, а основните точки, ще трябва от (43) при $\lambda = 1$, $\mu = 0$ да получим $\lambda' = 0$. Оттук следва $a_1 = 0$.

И тъй, в случаите I, III 1 в), ако върху правата g вземем за определящи точки (x, y), (u, v) основните точки, ще имаме

$$\sigma = 0, \quad a_1 = 0, \tag{69}$$

$$\varrho\tau > 0, \tag{70}$$

$$a_0 a_2 \neq 0, \quad a_2 \varrho - a_0 \tau \neq 0 \tag{71}$$

за всяко $t \varepsilon T$. Това са условията от (51) за случая 1), освен това (22) и намереното $a_1 = 0$.

VIII. Сега правите j и k са истински тангенти на Λ; имаме

$$a_1^2 - 4 a_0 a_2 = 0, \quad a_0 + a_2 \neq 0 \quad \text{за} \quad t \varepsilon T. \tag{72}$$

Да прекараме през единствената обща точка на j и Λ образуващата от спрегнатия рой $M(t)$ на Ли и нека тя пресича правата g в точката $\lambda(x, y) + \mu(u, v)$; двойката (λ, μ) е именно единственото решение на уравнението (45). Получената точка $\lambda(x, y) + \mu(u, v)$ върху g и нейната спрегната в инволюцията Ω са различни реални точки върху g, инвариантно свързани с роя. Тях наричаме сега I и II основна точка на роя върху g. Поради (72) уравнението (45) става

$$(a_1 \lambda + 2 a_2 \mu)^2 = 0 \text{ или } (2 a_0 \lambda + a_1 \mu)^2 = 0 \tag{73}$$

според това, дали $a_2 \neq 0$, или $a_0 \neq 0$, и от него лесно се намира I основна точка; II основна точка ще получим след това от I основна точка чрез уравненията на инволюцията Ω

$$\psi \lambda^* = -\tau \mu, \quad \psi \mu^* = \varrho \lambda, \tag{74}$$

следващи от (21) при $\sigma = 0$. Тъй като определящата точка (x, y) върху g е първата основна точка, уравнението (45) трябва да се удовлетворява за $\lambda = 1$, $\mu = 0$ и това дава $a_0 = 0$. Тогава от (72) получаваме $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$.

И тъй в случая VIII, ако върху правата g вземем за определящи точки (x, y) и (u, v) съответно I и II основна точка, ще имаме

$$\sigma = 0, \quad a_1 = 0 \tag{69}$$

$$\varrho\tau > 0 \tag{70}$$

$$a_0 = 0, \quad a_2 \neq 0 \tag{75}$$

за $t \varepsilon T$. Да подчертаем, че и тук са в сила условията (69), (70) и (71_2) както в случаите I, III 1 в).

Окончателно получихме, че в случаите I, III 1 в), VIII върху правата g на роя имаме две различни реални, инвариантно свързани с роя основни точки. И ако ги вземем за определящи точки (x, y) и (u, v) върху g, функциите $x(t), \ldots, v(t)$ удовлетворяват за всяко $t \varepsilon T$ условията (69), (70), (71_2).

3. Инвариантно нормиране на основните точки; естествен параметър и диференциални инварианти на роя. Ще продължим общото изследване на случаите I, III, VIII. Да предположим, че за основните точки извършим пренормиране, т. е. за тях вземем относно K_0 вместо координатните четворки (x, y), (u, v) нови координатни четворки $(\bar{x}, \bar{y})$, $(u, \bar{v})$, като

$$x = \lambda x, \quad y = \lambda y, \quad u \quad \mu u, \quad v = \mu v. \tag{76}$$

Тук λ и μ са скаларни двукратно гладки функции на t в T със стойности $\neq 0$. При това пренормиране коефициентите $a_1, \ldots, b_4$ се трансформират по формулите

$$\bar{a}_1 = a_1 + \dot{\lambda}\lambda^{-1}, \quad \bar{a}_2 = a_2 \lambda \mu^{-1}, \quad \bar{a}_3 = a_3 \mu \lambda^{-1}, \quad \bar{a}_4 = a_4 + \dot{\mu}\mu^{-1}, \quad \bar{f} = f, \tag{77}$$

$$\bar{b}_1 = b_1 + \dot{\lambda}\lambda^{-1}, \quad \bar{b}_2 = b_2 \lambda \mu^{-1}, \quad \bar{b}_3 = b_3 \mu \lambda^{-1}, \quad \bar{b}_4 = b_4 + \dot{\mu}\mu^{-1}.$$

Ако изберем в (76) λ и μ да бъдат функциите

$$\lambda = \lambda_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1 dt\right), \quad \mu = \mu_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_4 dt\right), \tag{78}$$

т. е. за основните точки вземем нови координатни четворки

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1 dt\right).(x, y), \quad (u, \bar{v}) = \mu_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_4 dt\right).(u, v) \tag{79}$$

спрямо K_0, то при тези нови четворки ще имаме поради (77)

$$\bar{a}_1 = 0, \quad \bar{a}_4 = 0.$$

Както знаем от [1]—[3], въведеното нормиране на двете основни точки е до постоянен множител инвариантно. На подробностите, дадени там, няма да се спираме.

Отсега нататък ще предполагаме, че основните точки са зададени относно K_0 със *специалните* четворки (79). Обаче за простота тези нови четворки ще означаваме пак с (x, y), (u, v); също така съответните на тези четворки коефициенти в уравненията за производните ще означаваме пак $a_1, \ldots, b_4$. Нашето приемане означава, че предполагаме валидността на условията

$$a_1 = 0, \quad a_4 = 0 \quad \text{за} \quad t \varepsilon T. \tag{80}$$

Формулите (59) за производните стават

(81) $$\dot{x}=a_2 u, \qquad \dot{y}=f y+\dot{b}_2 v,$$
$$\dot{u}=a_3 x, \qquad \dot{v}=b_3 y+f v.$$

За коефициентите α_0, α_2, β_0, β_2 от (64) намираме

(82)
$$\alpha_0=[\dot{f}(a_2-b_2)-(\dot{a}_2-\dot{b}_2)f+(a_2-b_2)(f^2-a_2 a_3-b_2 b_3 + 2 a_3 b_2)].xu.(yv)^2$$
$$\alpha_2=[\dot{f}(b_3-a_3)-(\dot{b}_3-\dot{a}_3)f+(b_3-a_3)(f^2-a_2 a_3-b_2 b_3 +2 a_2 b_3)]\,.\,xu\,.\,(yv)^2,$$
$$\beta_0\ [\dot{f}(a_2-b_2)-(\dot{a}_2-\dot{b}_2)f-(a_2-b_2)(f^2-a_2 a_3-b_2 b_3 +2 a_2 b_3)]\,.\,(xu)^2.yv,$$
$$\beta_2=[\dot{f}(b_3-a_3)-(\dot{b}_3-\dot{a}_3)f-(b_3-a_3)(f^2-a_2 a_3\quad b_2 b_3 +2 a_3 b_2]\,.\,(xu)^2\,.\,yv.$$

Условието $\alpha_1=0$ от (69_2) сега съгласно (64) поради $a_1=a_4=0$. става

(83) $$(a_2-b_2)(\dot{b}_3-\dot{a}_3)-(b_3-a_3)(\dot{a}_2-\dot{b}_2)+2f(a_2 b_3-a_3 b_2)=0 \quad \text{за } t\varepsilon T.$$

От (64_5) е ясно, че то изразява и

(84) $$\beta_1=0.$$

От пренормиранията (76) сега, щом искаме основните точки да бъдат представени със специалните четворки, остават само онези, при които λ и μ са постоянни; това знаем от [1]—[3]. Трансформационните формули за оставащите коефициенти според (77) ще бъдат следните:

(85) $$\bar{a}_2=a_2\lambda\mu^{-1},\ \bar{a}_3=a_3\mu\lambda^{-1},\ \bar{f}=f,$$
$$\bar{b}_2=b_2\lambda\mu^{-1},\ \bar{b}_3=b_3\mu\lambda^{-1}.$$

Тогава, разбира се, и

(86) $$(\bar{a}_2-\bar{b}_2)=(a_2-b_2)\lambda\mu^{-1},\ (\bar{b}_3-\bar{a}_3)=(b_3-a_3)\mu\lambda^{-1},$$
$$(\bar{a}_2-\bar{b}_2)(\bar{b}_3-\bar{a}_3)=(a_2-b_2)(b_3-a_3).$$

При двукратно гладка смяна на параметъра t с нов параметър t^* чрез

$$t=t(t^*)$$

за коефициентите се получават трансформационни формули

(87) $$a_2^*=a_2\frac{dt}{dt^*},\ a_3^*=a_3\frac{dt}{dt^*},\ b_2^*=b_2\frac{dt}{dt^*},\ b_3^*=b_3\frac{dt}{dt^*},\ f^*=f\frac{dt}{dt^*}.$$

Оттук

$$(a_2^*-b_2^*)(b_3^*-a_3^*)=(a_2-b_2)(b_3-a_3)\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^2.$$

Като вземем предвид, че по (61) и (70) двете страни на това равенство са положителни числа, намираме за положителните квадратни корени

$$(88)\qquad \sqrt{(a_2^*-b_2^*)(b_3^*-a_3^*)} = \varepsilon \sqrt{(a_2-b_2)(b_3-a_3)}\cdot\frac{dt}{dt^*},\quad \varepsilon=\operatorname{sgn}\frac{dt}{dt^*}.$$

Тази трансформационна формула заедно с (86), което показва D-инвариантността на $\sqrt{(a_2-b_2)(b_3-a_3)}$, ни подсеща, че можем да въведем като инвариантен (естествен) параметър на роя величината

$$(89)\qquad s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(a_2-b_2)(b_3-a_3)}\,dt.$$

Присъствието на квадратен корен тук въвежда, разбира се, ориентиране на роя. Два параметъра t и t^* създават едно и също ориентиране на роя ($s^*=s$ при една и съща начална права) при $\frac{dt}{dt^*}>0$ и противоположни ориентировки при $\frac{dt}{dt^*}<0$ ($s^*=-s$ при една и съща начална права).

Оттук нататък ще предполагаме, че роят е отнесен не спрямо произволен параметър t, а спрямо инвариантния си параметър s, мерен от някаква права на роя. Съответните коефициенти в уравненията за производните ще означаваме обаче пак с $a_1, a_2, \ldots, f$; производните относно s ще бележим с $'$ вместо с $\cdot$ Нашето приемане за s означава валидността на равенството

$$(90)\qquad (a_2-b_2)(b_3-a_3)=1 \quad \text{за} \quad s\varepsilon\Sigma.$$

Тук Σ е интервалът, в който се мени новият параметър s. Формулите (81) за производните сега стават

$$(91)\qquad \begin{aligned} x' &= a_2 u, & y' &= f y + b_2 v,\\ u' &= a_3 x, & v' &= b_3 y + f v, \end{aligned}$$

като между коефициентите съществува връзката (83), написана сега

$$(92)\qquad (a_2-b_2)(b_3'-a_3')-(b_3-a_3)(a_2'-b_2')+2f(a_2b_3-a_3b_2)=0 \quad \text{за} \quad s\varepsilon\Sigma.$$

При направените предположения — $(x, y), (u, v)$ са *специални* четворки на *основните* точки на роя и параметър е *инвариантният* s — изключени са P-смените, а от D-смените остават само (76) с постоянни λ, μ, при които трансформационните формули са (85). От тях виждаме, че величините

$$(93)\qquad A=b_3(a_2-b_2)=\frac{v'v.(y'y.xu-x'x.yv)}{xu.(yv)^2},$$

$$B=b_2(b_3-a_3)=\frac{y'y.(u'u.yv-v'v.xu)}{xu.(yv)^2},\quad f=b_1-a_1=\frac{y'v.xu-x'u.yv}{xu.yv}$$

са D- и P-инварианти на роя. По-точно при преориентиране на роя величините A и B си запазват и знака, а величината f го променя. Да припомним, че в тези формули (x, y), (u, v) са специални четворки на основните точки. Що се касае до B-инвариантността на тези величини, тя може да се провери лесно, както е правено в аналогични случаи в [1]—[3]. Същественото е, че в тях фигурират само *произведения* $v'v, \ldots, yv$. И тъй: A, B, f са абсолютни диференциални инварианти на нашия елиптичен рой прави. Ние ще означим

$$a_2 - b_2 = \varphi, \quad b_3 - a_3 = \psi, \tag{94}$$

като, разбира се, имаме коефициентите при специалните координатни четворки на основните точки и при инвариантния параметър. От (90) следва тогава

$$b_2 = a_2 - \varphi, \quad b_3 = a_3 + \frac{1}{\varphi}, \tag{95}$$

а (93) дават

$$b_2 = B \cdot \varphi, \quad b_3 = \frac{A}{\varphi} \tag{96}$$

Така окончателно коефициентите a_2, a_3, b_2, b_3 се изразяват чрез φ и инвариантите A, B:

$$a_2 = (B+1)\varphi, \quad a_3 = \frac{A-1}{\varphi}, \quad b_2 = B\varphi, \quad b_3 = \frac{A}{\varphi}. \tag{97}$$

Формулите (91) на Френе придобиват вид

$$\begin{aligned} x' &= (B+1)\varphi \cdot u, & y' &= f \cdot y + B\varphi \cdot v, \\ u' &= \frac{A-1}{\varphi} \cdot x, & v' &= \frac{A}{\varphi} \cdot y + f \cdot v. \end{aligned} \tag{98}$$

Функцията φ се изразява чрез инвариантите. Като заместим в условието (92) изразите (97), получаваме

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = (A+B)f, \tag{99}$$

отдето чрез интегриране следва

$$\varphi = \varphi_0 \exp \int_0^s (A+B) f \cdot ds. \tag{100}$$

Тук φ_0 е постоянно число $\neq 0$. Ако заместим в (98) тази стойност на φ, в коефициентите на уравненията (98) за производните ще участвуват само инвариантите A, B, f. Освен тях имаме само константата $\varphi_0 \neq 0$. Нейното присъствие е във връзка с все още възможните пренормирания (76) с постоянни числа $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$.

Със стойностите (97) и

$$a_1 = a_4 = 0, \quad b_1 = b_4 = f \tag{101}$$

лесно намираме по (61) и (64):

$$\varrho = \varphi \,.\, x\,u \,.\, y\,v, \quad \sigma = 0, \quad \tau = \varphi^{-1} \,.\, x\,u \,.\, y\,v,$$

(102)

$$\alpha_0 = q\,(P+R) \,.\, x\,u \,.\, (y\,v)^2, \qquad \beta_0 \quad \varphi\,(Q-R) \,.\, (x\,u)^2 \,.\, y\,v,$$

$$\alpha_1 = 0, \qquad \beta_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = q^{-1}(P+R) \,.\, x\,u \,.\, (y\,v)^2, \qquad \beta_2 = q^{-1}(Q+R) \,.\, (x\,u)^2 \,.\, y\,v,$$

където

(103) $$P = f + (f^2+1), \quad Q = f - (f^2+1), \quad R \quad (A+B)(f^2+1).$$

По-нататък

$$\alpha_1^2 - 4\,\alpha_0\,\alpha_2 = 4\,(R^2 - P^2) \,.\, (x\,u)^2 \,.\, (y\,v)^4,$$

(104) $$\beta_1^2 - 4\,\beta_0\,\beta_2 = 4\,(R^2 - Q^2) \,.\, (x\,u)^4 \,.\, (y\,v)^2,$$

$$\alpha_2\,\varrho - \alpha_0\,\tau = 2\,R \,.\, (x\,u)^2 \,.\, (y\,v)^3,$$

$$\beta_2\,\varrho - \beta_0\,\tau = 2\,R \,.\, (x\,u)^3 \,.\, (y\,v)^2.$$

Тъй като в разглежданите случаи I, III, VIII в сила е, както знаем, условието (71_2), т. е. $\alpha_2\,\varrho - \alpha_0\,\tau \neq 0$, трябва да имаме

(105) $$R \neq 0 \quad \text{или} \quad A+B \neq 0 \quad \text{за} \quad t \varepsilon T.$$

По начина, изложен в [1], може да се установи, че е с т е с т в е н и т е у р а в н е н и я

(106) $$A = A(s), \quad B = B(s), \quad f \quad f(s)$$

на роя при условието (105) определят роя еднозначно до B-колинеации в пространството. Значи при дадени функции A, B, f на s, дефинирани в някакъв интервал, съдържащ във вътрешността си $s=0$, и удовлетворяващи в него (105), съществуват безбройно много елиптични роеве, от някой от типовете I, III, VIII, за които s е естествен параметър и дадените функции A, B, f са точно въведените три диференциални инварианти.

Да видим по-точно кога се получават различните типове. За тази цел използуваме таблици (51) и (57) и вземаме предвид (102) и (104). И сега се установява (което знаем), че случаите II, IV, VI, IX са невъзможни, понеже водят до абсурда $R=0$ и $R \neq 0$. А случаите V, VII, X са невъзможни, понеже водят до $R=0$ в противоречие със (105).

С л у ч а й I [= I a)] имаме точно тогава, когато

(107) $$R^2 - P^2 \neq 0, \quad R^2 - Q^2 \neq 0, \quad R \neq 0 \quad \text{за} \quad t \varepsilon T.$$

Знаем, че сега и двете прави j, k са нетангенти на повърхнината Λ на Ли и двете инволюции Ω_j, Ω_k са отлични от Ω. Лесно е да се види, че Ω_j и Ω_k са *различни* инволюции. Наистина според (46), (55) сега (при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$) техните уравнения са

(108)

$$\alpha_0\,\lambda\lambda' + \alpha_2\,\mu\mu' = 0,$$

$$\beta_0\,\lambda\lambda' + \beta_2\,\mu\,\mu' = 0.$$

Двете инволюции ще съвпадат точно тогава, когато $\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 = 0$. От (102) обаче намираме

$$\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 = 2(P-Q)R = 4(f^2+1)R(xu)^3(yv)^3$$

и очевидно $\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 \neq 0$ поради $1+f^2 \neq 0$, $R \neq 0$, $xu \neq 0$, $yv \neq 0$. Полученото неравенство показва, че инволюциите са различни.

Общата двойка на инволюциите Ω_j и Ω, т. е. двойката на основните точки, е двойка и на Ω_k. Наистина сега основните точки (x, y) и (u, v) се получават при $\lambda = 1$, $\mu = 0$ и $\lambda' = 0$, $\mu' = 1$; но (108_2) показва, че наистина тези две точки образуват двойка и на Ω_k. Тъй че основните точки в случая I могат да се намират не само чрез инволюцията Ω_j, но и чрез инволюцията Ω_k.

Случай III, подслучай 1 в), имаме точно тогава, когато

(109) $$R^2 - P^2 \neq 0,\ R^2 - Q^2 = 0,\ R \neq 0 \quad \text{за} \quad t \varepsilon T.$$

Правата j не е тангента на Δ и $\Omega_j \neq \Omega$, а правата k е истинска тангента на Δ. За допирната точка на k до Δ имаме от (108_2) уравнение $\beta_0\lambda^2 + \beta_2\mu^2 = 0$ и според това, дали $Q-R=0$, $Q+R \neq 0$, или $Q-R \neq 0$, $Q+R=0$, получаваме, че основната точка (x, y), респ. (u, v), е пресечна точка на g с онази права от спрегнатия рой $M(t)$ на Ли, която минава през допирната точка на k до Δ.

Случай III, подслучай 3 а), имаме точно тогава, когато

(110) $$R^2 - P^2 = 0,\ R^2 - Q^2 \neq 0,\ R \neq 0 \quad \text{за} \quad t \varepsilon T.$$

Правата j е истинска тангента на Δ, правата k не е тангента и инволюцията Ω_k е отлична от Ω. Основните точки образуват обща двойка на инволюциите Ω_k и Ω и едната от тях е пресечна точка на g с онази права от спрегнатия рой $M(t)$ на Ли, която минава през допирната точка на j до Δ.

Случай VIII [$=3$ в)] имаме точно тогава, когато

(111) $$R^2 - P^2 = 0,\ R^2 - Q^2 = 0,\ R \neq 0 \quad \text{за} \quad t \varepsilon T.$$

Двете абсолютни прави са истински тангенти на Δ. За величините P и Q имаме

$$P = \varepsilon R,\ Q = \eta R \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ \eta = \pm 1).$$

Тъй като обаче $P - Q = 2(f^2+1) > 0$, следва $\eta = -\varepsilon$, така че

$$P = \varepsilon R,\ Q = -\varepsilon R.$$

От (108) намираме уравненията за допирните точки на правите j и k до повърхнината Δ:

$$q^2(\varepsilon - 1)\lambda^2 + (\varepsilon + 1)\mu^2 = 0,$$

$$q^2(\varepsilon + 1)\lambda^2 + (\varepsilon - 1)\mu^2 = 0.$$

При $\varepsilon = +1$ допирната точка на j е $\lambda = 1$, $\mu = 0$, а на k — $\lambda = 0$, $\mu = 1$; при $\varepsilon = -1$ допирната точка на j е $\lambda = 0$, $\mu = 1$, а на k — $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Значи сега основните точки върху g са пресечните точки на g с онези прави от спрегнатия рой $M(t)$ на Ли, които минават през допирните точки на j и k до повърхнината Δ.

• **4. Двата изключени случая.** Остава да разгледаме случаите V[=2б)] и VII[2г) или 4б)]. В случая V двете абсолютни прави не са тангенти на повърхнината Δ, така че съществуват инволюциите Ω_j, Ω_k, но и двете тези инволюции съвпадат с Ω. В случая VII едната от абсолютните прави не е тангента (в случая 2г) — j, в случая 4б) — k), но съответната ѝ инволюция върху g съвпада с Ω, а другата абсолютна права е образуваща на Δ. Сега не могат да се намерят върху g основни точки по начина, приложен за случаите I, III, VIII. Наистина тъй като всяка от инволюциите Ω_j, Ω_k съвпада (доколкото съществува) с Ω, не е определена единствена обща двойка на Ω и една от тези инволюции, чиито точки да вземем за основни. От друга страна никоя от абсолютните прави не е истинска тангента на повърхнината Δ, та да можем да изберем за първа основна точка пресечната точка на g с правата на роя $M(l)$ през допирна точка до Δ на някоя от абсолютните прави, а за втора основна точка — спрегнатата на първата в инволюцията Ω.

От таблиците (51) и (57) намираме условията за сега разглежданите случаи:

V 2б): $a_0 a_2 \neq 0,\ a_1 = 0,\ a_2 \varrho - a_0 \tau = 0,\ \beta_0 \beta_2 \neq 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 \varrho - \beta_0 \tau = 0$;

VII 2г): $a_0 a_2 \neq 0,\ a_1 = 0,\ a_2 \varrho - a_0 \tau = 0,\ \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$;

VII 4б): $a_0 = a_1 = a_2 = 0,\ \beta_0 \beta_2 \neq 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 \varrho - \beta_0 \tau = 0$.

Вижда се, че във всички тези случаи имаме изпълнени условията

$$a_1 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 \varrho - \beta_0 \tau = a_2 \varrho - a_0 \tau = 0, \tag{112}$$

които със стойностите (64) на a_i, β_i са

$$\begin{aligned}[(b_3 - a_3)(\dot{a}_2 - \dot{b}_2) - (a_2 - b_2)(\dot{b}_3 - \dot{a}_3) - 2(a_1 - a_4)(a_2 - b_2)(b_3 - a_3)] \\ - 2f[a_2 b_3 - a_3 b_2] = 0,\end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}f[(b_3 - a_3)(\dot{a}_2 - \dot{b}_2) - (a_2 - b_2)(\dot{b}_3 - \dot{a}_3) - 2(a_1 - a_4)(a_2 - b_2)(b_3 - a_3)] \\ + 2(a_2 - b_2)(b_3 - a_3)[a_2 b_3 - a_3 b_2] = 0.\end{aligned}$$

Това са две линейни хомогенни уравнения относно изразите, заградени в средни скоби; детерминантата им е

$$2[(a_2 - b_2)(b_3 - a_3) + f^2] > 0$$

поради (63). Тогава следва

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0, \tag{114}$$

$$(b_3 - a_3)(\dot{a}_2 - \dot{b}_2) - (a_2 - b_2)(\dot{b}_3 - \dot{a}_3) - 2(a_2 - b_2)(b_3 - a_3)(a_1 - a_4) = 0.$$

Ясно е, че тези условия са еквивалентни със (112).

Ако положим

$$\sqrt{\frac{a_2 - b_2}{b_3 - a_3}} = \theta > 0, \tag{115}$$

условието (114_2) може да се напише така:

(116) $$\dot{\theta}=(a_1-a_4)\,\theta.$$

Ние ще докажем, че в разглежданите случаи V и VII всички прави на нашия елиптичен рой принадлежат на една елиптична линейна конгруенция от прави, която съдържа двете абсолютни прави. За краткост ще използуваме комплексните числа, като ще си мислим, че *реалното* проективно пространство P_3 е вложено в едно *комплексно* проективно пространство C_3. От нашия рой обаче ще продължаваме да разглеждаме само реалните прави.

В пространството C_3 проективностите Π и Ω имат общи двойни точки, които са конюговани имагинерно. Те се получават от уравнението $\varrho\,\lambda^2+\tau\,\mu^2$ или

(117) $$\theta^2\,\lambda^2+\mu^2=0.$$

Решенията са $\lambda_1=i$, $\mu_1=\theta$; $\lambda_2=-i$, $\mu_2=\theta$, така че двойните елементи са точките

(118) $$(p_\varepsilon,\ q_\varepsilon)=\varepsilon\,i(x,y)+\theta(u,v),\quad \varepsilon=\pm 1$$

върху g. Безкрайните прави през (p_1, q_1) и (p_{-1}, q_{-1}) нека са g_1, g_{-1}. Техните безкрайни точки са: (p_1, o), (p_{-1}, o) върху j и (o, q_1), (o, q_{-1}) върху k. За тях имаме

(119) $$p_\varepsilon=\varepsilon\,i\,.\,x+\theta\,.\,u,\quad q_\varepsilon=\varepsilon\,i\,.\,y+\theta\,.\,v.$$

Ще докажем, че четирите точки (p_ε, o), (o, q_ε), които зависят от t, сега са постоянни. Тогава ще бъдат постоянни и правите g_1, g_{-1}. Понеже точките (p_1, o), (p_{-1}, o) са конюговани, също (o, q_1) и (o, q_{-1}), и правите g_1 и g_{-1} ще бъдат имагинерно конюговани. Когато t се мени в T и правата g описва роя, тя винаги ще пресича тези две постоянни имагинерно конюговани прави. Следователно g винаги ще принадлежи на елиптичната линейна конгруенция прави с оси g_1 и g_{-1}. А че тази конгруенция съдържа абсолютните прави, е ясно, понеже те пресичат осите.

За да докажем, че $p_\varepsilon=p_\varepsilon(t)$ е постоянна при изменянето на t в T, необходимо и достатъчно е да докажем, че е изпълнено условието

(120) $$p_\varepsilon\,\dot{p}_\varepsilon=0\quad \text{за}\quad t\varepsilon T.$$

Намираме

$$\dot{p}_\varepsilon=\varepsilon\,i\,.\,\dot{x}+\dot{\theta}\,.\,u+\theta\,.\,\dot{u},$$

$$p_\varepsilon\,\dot{p}_\varepsilon=\dot{x}\,x+\varepsilon\,i\,\dot{\theta}\,.\,x\,u-\varepsilon\,i\,\theta\,.\,\dot{u}\,x-\varepsilon\,i\,\theta\,.\,\dot{x}\,u-\theta^2\,.\,\dot{u}\,u.$$

Заместваме тук стойностите на $\dot{x}\,x,\ldots,\ \dot{u}\,u$, които се получават от (59), и намираме

$$p_\varepsilon\,\dot{p}_\varepsilon=[-(a_2+\theta^2\,a_3)+\varepsilon\,i\,(\dot{\theta}+a_4\,\theta-a_1\,\theta)]\,.\,x\,u.$$

Поради реалността на a_i, ε, θ, $\dot{\theta}$, $x\,u$ ясно е, че p_ε ще бъде точно тогава постоянна, когато

(121) $$a_2+\theta^2\,a_3=0,\quad \dot{\theta}=(a_1-a_4)\,\theta\quad \text{за}\quad t\varepsilon T.$$

В нашите случаи второто равенство е изпълнено поради (116).

Освен това

$$a_2+\theta^2 a_3=a_2+\frac{a_2-b_2}{b_3-a_3}\,a_3=\frac{a_2 b_3-a_3 b_2}{b_3-a_3}$$

и следователно (121_1) е също удовлетворено поради (114). И тъй, двете точки (p_1, o), (p_{-1}, o) са наистина постоянни върху j.

Аналогично за q_ε намираме

$$q\varepsilon\,\dot{q}_\varepsilon=[-(b_2+\theta^2 b_3)+\varepsilon i\,(\dot{\theta}+b_4\theta-b_1\theta)].y\,v.$$

Точките (o, q_ε) ще бъдат точно тогава постоянни, когато

(122) $$b_2+\theta^2 b_3=0,\ \dot{\theta}=(b_1-b_4)\theta \quad \text{за} \quad t\varepsilon T.$$

В нашите случаи намираме

$$b_2+\theta^2 b_3=\frac{a_2 b_3-a_3 b_2}{b_3-a_3}=0$$

поради (114). От друга страна $b_1-b_4=a_1-a_4$ съгласно (62) и условието (122_2) става идентично със (116), което е изпълнено. Следователно и точките (o, q_ε) върху k са постоянни. С това е установено, че правите на роя принадлежат на една елиптична линейна конгруенция, съдържаща абсолютните прави.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Петканчин. Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия, Год. на Соф. унив., физ.-мат. фак., т. 48 (1953 54), кн. 1 (мат. и физ.), ч. I, стр. 33—67.
2. B. Petkantschin. Parabolische Regelscharen in der zweiachsigen Geometrie, Comptes Rendus de l'Acad. Bulg. des Sciences, t. 8, 1 (1955), p. 1—4.
3. Б. Петканчин. Параболични роеве прави в двуосната геометрия, Год. на Соф. унив., физ.-мат. фак., т. 49 (1954 55), кн. 1 (мат. и физ.), ч. I, стр. 48 84
4. Б. Петканчин. Роеве изотропни прави в елиптичното пространство, Известия на Мат. инст. при БАН, т. I, кн. 2 (1954), стр. 171 198.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПРЯМЫХ В БИАКСИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Б. Петканчин

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье изучается дифференциальная геометрия эллиптических однопараметрических систем прямых биаксиальной геометрии; при этом используются содержащиеся в наших статьях [1], [2], [3], [4] понятия, обозначения и результаты.

Пусть конечная прямая $g=g(t)$ определенна двумя точками $(x(t), y(t))$ и $(u(t), v(t))$. При изменении действительного параметра t в некотором интервале T прямая $g(t)$ образует однопараметрическая система G конечных прямых. Точки, лежащие на прямых системы, образуют линейчатую поверхность Γ. Система G называется эллиптической, если для каждой прямой системы выполняется условие

$$\sigma^2-4\varrho\tau<0,$$

где ϱ, σ, τ имеют значения (16).

Пусть P произвольная точка прямой g системы; если P' — точка пересечения прямой g с бесконечной прямой касательной плоскости к Γ в точке P, то соответствие $P\to P'$ является проективностью Π. В нашем случае проективность Π — эллиптическая. Мы обозначаем через Ω эллиптическую инволюцию, коммутирующую с проективностью Π.

С каждой прямой $g=g(t)$ системы G связана инвариантным образом поверхность Ли $\Delta=\Delta(t)$ системы. Эта поверхность второго порядка проходит через g и в каждой точке g имеет ту же касательную плоскость как Γ. Несодержащую $g(t)$ систему образующих поверхности Δ обозначаем через $M(t)$.

Если первая абсолютная прямая j биаксиального пространства не является касательной поверхности $\Delta(t)$ для прямой $g(t)$, на $g(t)$ можно определить и другую инволюцию Ω_j следующим образом. Мы называем точку Q^* на $g(t)$ соответствующей точке Q на $g(t)$, если касательные плоскости к поверхности Δ в точках Q и Q^* пересекают прямую j в двух точках, сопряженных относительно Δ. Соответствие $Q\to Q^*$ является инволюцией Ω_j. Аналогичным способом можно определить и инволюцию Ω_k на $g(t)$.

Оказывается, что геометрически возможны следующие случаи:

I. Абсолютные прямые j и k не касаются к Λ и для соответствующих инволюций Ω_j и Ω_k имеем $\Omega_j \neq \Omega$, $\Omega_k \neq \Omega$.

III. Одна из абсолютных прямых не касается к Λ и соответствующая из инволюций Ω_j, Ω_k не совпадает с Ω; другая абсолютная прямая является истинной касательной к Λ.

VIII. Обе абсолютные прямые являются истинными касательными к Λ.

V. Обе абсолютные прямые не касаются к Λ, но $\Omega_j = \Omega_k = \Omega$.

VII. Одна из абсолютных прямых не касается к Λ и соответствующая ей из инволюций Ω_j, Ω_k совпадает с Ω; другая абсолютная прямая лежит на Λ.

В случаях I, III, VIII одним и тем же аналитическим способом можно определить на $g(t)$ две действительные инвариантные основные точки. В случае I основные точки образуют единственную общую пару трех инволюций Ω, Ω_j, Ω_k. В случае III опять основные точки образуют общую пару инволюции Ω и той из инволюций Ω_l, Ω_k, которая существует. Одна из основных точек является тоже точкой пересечения прямой $g(t)$ с той прямой системы $M(t)$, которая проходит через точку касания к поверхности Λ одной из абсолютных прямых. В случае VIII обе основные точки являются точками пересечения прямой $g(t)$ с теми прямыми системы $M(t)$, которые проходят через точки касания обеих абсолютных прямых.

В случаях I, III, VIII мы находим для системы G: 1) специальные координатные четверки (x, y), (u, v) для основных точек; 2) инвариантный параметр s системы. Уравнения для производных имеют вид

$$x' = (B+1)\varphi . u, \qquad y' = f . y + B\tau . v,$$

(98)

$$u' = \frac{A-1}{\tau} . x, \qquad v' = \frac{A}{\tau} . y + f . v.$$

Здесь функции $A = A(s)$, $B = B(s)$, $f = f(s)$ являются инвариантами системы, а

$$\tau = \tau_0 . \exp \int_0^s (A+B) f . ds;$$

$\tau_0 \neq 0$ есть постоянное число.

В случаях V и VII все прямые системы G принадлежат некоторой фиксированной эллиптической линеарной конгруэнции прямых, проходящей через две абсолютные прямые.

ELLIPTISCHE REGELSCHAREN IN DER ZWEIACHSIGEN GEOMETRIE

B. Petkantschin

ZUSAMMENFASSUNG

Im vorliegenden Beitrag wird die Differentialgeometrie der elliptischen Regelscharen in der zweiachsigen Geometrie untersucht; dabei wurden Begriffe, Bezeichnungen und Ergebnisse aus den Arbeiten [1] [2], [3], [4] des Verfassers verwendet.

Die endliche Gerade $g=g(t)$ sei durch die beiden Punkte $(x(t), y(t))$ und $(u(t), (v(t))$ bestimmt. Bei Änderung des reellen Parameters t in einem Intervall T beschreibt die Gerade $g(t)$ eine Regelschar G., Die auf den Geraden von G liegenden Punkte bilden eine Regelfläche Γ. Die Regelschar G wird elliptisch genannt, falls für jede Gerade derselben die Bedingung

$$\sigma^2 - 4\varrho\tau < 0$$

erfüllt ist; dabei haben ϱ, σ, τ die Werte (16).

Es sei P ein beliebiger Punkt auf der Geraden $g(t)$ der Regelschar; falls P' der Schnittpunkt der Geraden g mit der unendlichen Geraden der Berührungsebene von Γ im Punkte P ist, findet man, daß die Zuordnung $P \to P'$ eine Projektivität Π darstellt. In unserem Falle ist Π eine elliptische Projektivität. Wir bezeichnen mit Ω die mit Π kommutative elliptische Involution.

Mit der Geraden $g=g(t)$ der Regelschar G ist invariant die Lie-Fläche $\Lambda=\Lambda(t)$ der Regelschar verbunden. Diese Fläche 2. Ordnung enthält g und hat in jedem Punkte von g dieselbe Berührungsebene wie Γ. Das $g(t)$ nicht enthaltende Erzeugendensystem der Fläche Λ sei mit $M(t)$ bezeichnet.

Falls die erste absolute Gerade j des zweiachsigen Raumes keine Tangente der Fläche Λ ist, läßt sich folgendermaßen auf g noch eine Involution Ω_j definieren. Dem Punkte Q auf $g(t)$ wird ein Punkt Q^* auf $g(t)$ durch die Forderung zugeordnet, daß die Berührungsebenen der Fläche Γ in den Punkten Q und Q^* die Gerade j in zwei bez. Λ konjugierten Punkten schneiden. Die Zuordnung $Q \to Q^*$ ist die zu definierende Involution Ω_j. In entsprechender Weise läßt sich eine Involution Ω_k auf k definieren.

Es ergeben sich folgende geometrisch mögliche Fälle:

I. Die absoluten Geraden j, k berühren Λ nicht und die ihnen entsprechenden Involutionen Ω_j und Ω_k sind von Ω verschieden.

III. Eine der absoluten Geraden berührt die Fläche Λ nicht und die ihr entsprechende von den Involutionen Ω_j, Ω_k ist von Ω verschieden; die andere absolute Gerade ist eigentlich eine Tangente der Fläche Λ.

VIII. Die beiden absoluten Geraden sind eigentlich Tangenten der Fläche Λ.

VII. Eine der absoluten Geraden berührt Λ nicht und die ihr entsprechende von den Involutionen Ω_j, Ω fällt mit Ω zusammen, die andere absolute Gerade liegt auf Λ.

V. Die beiden absoluten Geraden berühren Λ nicht, aber $\Omega_j = \Omega_k = \Omega$.

In den Fällen I, III, VIII lassen sich in einheitlicher analytischer Weise zwei reelle invariante Grundpunkte auf $g(t)$ definieren. Im Falle I bilden die Grundpunkte das einzige gemeinsame Paar der drei Involutionen Ω_j, Ω_k, Ω. Im Falle III bilden die Grundpunkte wiederum das einzige gemeinsame Paar der Involution Ω und derjenigen von den Involutionen Ω_j, Ω_k, die existiert. Einer der Grundpunkte ist zugleich der Schnittpunkt der Geraden $g(t)$ mit derjenigen Geraden der Regelschar $M(t)$, welche durch den Berührungspunkt einer von den absoluten Geraden hindurchgeht. Im Falle VIII sind die beiden Grundpunkte die Schnittpunkte der Geraden $g(t)$ mit denjenigen Geraden der Regelschar $M(t)$, welche durch die Berührungspunkte der beiden absoluten Geraden hindurchgehen.

In den Fällen I, III, VIII finden wir für die Regelschar G: 1) spezielle Koordinatenquadrupel (x, y), (u, v) für die Grundpunkte; 2) einen invarianten Parameter s. Die Ableitungsgleichungen lauten

$$x' = (B+1)\varphi . u, \qquad y' = f . y + B\varphi . v,$$

(98)

$$u' = \frac{A-1}{\varphi} \cdot x, \qquad v' = \frac{A}{\varphi} . y + f . v.$$

Hierin sind $A = A(s)$, $B = B(s)$, $f = f(s)$ Invarianten der Regelschar und

$$\varphi = \varphi_0 . \exp \int_0^s (A+B) f . ds;$$

$\varphi_0 \neq 0$ ist eine konstante Zahl.

In den Fällen V und VII liegen alle Geraden der Regelschar G in einer festen elliptischen linearen Linienkongruenz, die auch die beiden absoluten Geraden enthält.