

ВЪРХУ ИНТЕГРАЛИТЕ НА ДВИЖЕНИЕ НА ИДЕАЛЕН ФЛУИД ПРИ НАЛИЧИЕ НА КАРМАНОВИ ВИХРОВИ УЛИЦИ

Бл. Долапчиев и Ив. Чобанов

В досегашните разглеждания на Бенар-Кармановите вихрови улици се изследва или въпросът за устойчивостта им при различно нареждане на вихрите (симетрично, шахматно, асиметрично), или свързаният с него проблем за пресмятане на вихровото съпротивление върху препятствието, зад което е произлязла вихровата конфигурация [1—8].

Настоящата работа преследва друга цел: в нея се дават — с оглед на по-нататъшното им изследване — интегралите на диференциалните уравнения на движението на флуида, в който протича една двустранно безкрайна шахматна или симетрична вихрова конфигурация. В една друга следваща тук работа пък се разглеждат някои класи диференциални уравнения, свързани със системата диференциални уравнения на движение на флуида при наличие в него на такива вихрови конфигурации.

Както в досегашните изследвания на вихровите улици и сега се приема идеален флуид — несвиваем и невискозен, независимо от това, че физическата причина за генезиса на вихровата следа в реалния флуид е неговата вискозност.

Това приемане и създадената чрез него схема на явлението „вихрова улица“ налагат някои пиредварителни бележки, както върху употребения по-горе термин, така върху различието между математическата и физическата същност на разглежданата задача.

Теоретичното изследване на обстоятелствата, съпровождащи създаването и протичането на една вихрова улица във флуида, се предхожда от известни моделни допускания, които опростяват реалния физически процес и го правят по-удобен за математическо разглеждане. Изводите от приетия модел естествено съвсем не са задължителни за природата. И тук опитът, както и при всеки друг въпрос от физиката, има последната дума. Предимствата на приетия модел са доказани посредством многобройните проверки на досегашните теоретични резултати върху богат опитен материал, натрупан при работа, както във водни, така и във въздушни канали.

Известно е, че когато един реален флуид обтича някакво препятствие или последното се движи във флуида, зад препятствието

във флуида произлиза вихрообразуване. При специални условия на обтичане и вид на препятствието — най-често праволинейно обтичане с умерени скорости на цилиндър с ос, перпендикулярна на течението — вихровата следа се състои от две почти успоредни редици дискретни вихрови нишки, също перпендикулярни на течението, направлението на които редици е приблизително онова на скоростта на обтичането, респективно на движението на препятствието във флуида. За определеност по-нататък ще предполагаме, че флуидът обтича препятствието отляво надясно или което е същото, че препятствието се движи във флуида отлясно наляво. В този случай едната вихрова редица ще наричаме горна, а другата — долна. За приетата посока на обтичане вихрите от горната редица имат отрицателна циркулация, а тези от долната редица — положителна циркулация. Това ще рече, че посоката на въртене за вихрите от горната редица съвпада с посоката на движение на часовниковата стрелка, а за вихрите от долната редица — с обратната посока. Модулите на циркулациите на всички вихри са равни. Ако с γ означаваме циркулацията на даден вихър, то по-долу поставяме $\gamma = \Gamma'$ за вихрите от горната редица и $\gamma = -\Gamma'$ за вихрите от долната редица при $\Gamma' > 0$.

Опитът показва, че ако флуидът обтича препятствието, вихровата следа се движи във флуида с намалена скорост в сравнение със скоростта, с която тече флуидът. Също така, ако препятствието се движи във флуида, то увелича след себе си вихровата следа, която се движи също с намалена скорост в сравнение със скоростта на препятствието. Намалението на скоростта на вихровата следа се оказва и в двата случая почти едно и също. Такова движение на вихровата следа във флуида наричаме „протичане“ на вихровата следа във флуида. Понеже условията на обтичане на препятствието от флуида или на движението му във флуида могат да бъдат най-разнообразни, твърде различни могат да бъдат и образуваните вихрови следи. Експериментално явлението е изследвано добре, в широк диапазон от условия.

Така описаната вихрова следа наричаме именно вихрова улица.

При въпроси, свързани с генезиса на вихровата улица, т. е. с процеса на зараждането и откъсването от препятствието на отделните вихри и с поведението им близо до този момент, главно внимание се обръща на вихровата конфигурация в непосредствена близост по място и по време до препятствието. В този случай се приема моделът на „крайна улица“, т. е. улица, състояща се от краен брой вихри. При такъв род въпроси трябва обязательно да се държи сметка и за наличието на препятствие във флуида, тъй като то съществено влияе върху движението на флуида. Напротив, при въпроси, засягащи поведението на вихровата улица в зони, далеч от препятствието, абстрахирайки се от генезиса и от поведението ѝ в непосредствена близост на препятствието, пренебрегваме наличието му във флуида и за съществуването му държим сметка само до толкова, доколкото нему се дължи възникването на вихровата улица и нейното поддържане. В този случай за генезиса на улицата и за поведението ѝ близо до препятствието не се правят никакви пред-

положения. Сега препятствието се счита „отишло“ в безкрайност (достатъчно далеч). Така се стига до представата за двустранно безкрайна вихрова улица.

И тъй, геометричната конфигурация на една двустранно безкрайна вихрова улица е: две успоредни на направлението на обтичането редици от дискретни вихри, равноотдалечени един от друг и по двете редици.

Понеже разглеждаме плоскопаралелно течение, проблемът е двуизмерим. Ето защо оттук нататък вместо за вихрови нишки ще говорим за вихрови центрове в произволно избрана равнина, перпендикулярна на направлението на нишките. Разстоянието между двете вихрови редици ще означаваме с $2h$, а отдалечението на всеки два съседни вихъра от една и съща редица — с $2l$.

Ако вихрите от двете редици стоят точно един срещу друг, улицата се нарича симетрична; ако вихрите от едната редица са разположени точно срещу средата на вихрите от другата редица, улицата се нарича шахматна; улицата е асиметрична, когато не е нито симетрична, нито шахматна.

Отношението $\kappa = \frac{h}{l}$ се нарича параметър на вихровата улица.

При асиметрични улици само параметърът κ е недостатъчен, за да се определи конфигурацията. За такива улици се въвежда втори параметър $\lambda = \frac{d}{l}$, дето d е „отместването“ на симетричното нареждане на едната вихрова редица спрямо другата. Ето защо асиметричните вихрови улици се наричат още „двупараметрови“.

В разглежданията, които следват, ще третираме паралелно въпросите, аналогични за шахматни и симетрични улици. Поради „косото“ протичане на асиметричните вихрови улици [9] те не се разглеждат в настоящата работа.

В разглежданията, които следват, ще третираме паралелно въпросите, аналогични за шахматни и симетрични улици. Поради „косото“ протичане на асиметричните вихрови улици [9] те не се разглеждат в настоящата работа.

Преди да построим комплексния потенциал, нужен за извеждане на системата диференциални уравнения на движение на флуида при наличие на протичаща в него вихрова конфигурация, ще разгледаме някои общи положения, свързани с този потенциал, които играят важна роля в разглежданата задача, особено поради това, че съществува специална координатна система, спрямо която явлението е стационарно, т. е. скоростното състояние на флуида е постоянно с времето, що се касае за фиксирана точка от тази координатна система.

1. Връзка между комплексните потенциали при различни координатни системи

Нека успоредно на равнината α се движи идеален флуид, при което движение две произволни флуидни частици, намиращи се в даден момент върху една и съща вертикала към α , продължават да се намират през цялото време на движението също върху вертикала към α . Движението на произволна флуидна частица, а оттам и движението на флуида се определя от една страна с разстоянието ѝ до α , което е постоянно с времето при плоско-паралелното движение

на флуида, определено от равнината α , а от друга страна с движението в α на ортогоналната проекция върху α на разглежданата флуидна частица. Оттук плоско-паралелното течение на флуида е напълно определено с движението в α на ортогоналните проекции на всички флуидни частици върху α . Ето защо под флуидни частици занапред ще разбираме само намиращите се в α частици на флуида, а под флуид — съвкупността на тях частици.

Нека $Ox y$ и $\Omega \xi \eta$ са две еднакво ориентирани правоъгълни координатни системи в α и нека системата $[\Omega]$ се движи спрямо сравнителната система $[O]$ по закона

$$(1) \quad x_{\Omega} = x_{\Omega}(t), \quad y_{\Omega} = y_{\Omega}(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

дето x_{Ω} , y_{Ω} са координатите на Ω спрямо $[O]$, а φ е ъгълът, който положителната посока на Ox сключва с положителната посока на $\Omega \xi$. Като приемем $[O]$ и $[\Omega]$ за гаусови координатни системи в равнината α , съответно при координати $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$ на една и съща точка от нея, поради (1) получаваме

$$(2) \quad z = z_{\Omega} + \zeta e^{i\varphi},$$

дето z_{Ω} е координатата на Ω спрямо $[O]$.

Да допуснем, че движението на флуида притежава комплексен потенциал $f(z)$ спрямо $[O]$, т. е. такава аналитична функция $f(z)$ на z , за която

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{Re} \frac{df(z)}{dz}, \quad \frac{dy}{dt} = -\operatorname{Im} \frac{df(z)}{dz}$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df(z)}{dz}.$$

Тук с Re и Im са означени реалната и имагинерната част на съответните комплексни величини. Функцията $f(z)$ е определена с точност до константа спрямо z .

От (2) следва

$$\zeta = (z - z_{\Omega}) e^{-i\varphi} \quad \text{и} \quad \bar{\zeta} = (\bar{z} - \bar{z}_{\Omega}) e^{i\varphi},$$

следователно

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \frac{d\bar{z}}{dt} e^{i\varphi} - \frac{d\bar{z}_{\Omega}}{dt} e^{i\varphi} + (z - z_{\Omega}) i e^{i\varphi} \frac{d\varphi}{dt},$$

т. е.

$$(3) \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \frac{d\bar{z}}{dt} e^{i\varphi} - \frac{d\bar{z}_{\Omega}}{dt} e^{i\varphi} + i \frac{d\varphi}{dt} \bar{\zeta}.$$

Но поради

$$\frac{df(z)}{d\bar{\zeta}} = \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{d\bar{\zeta}} = \frac{dz}{dt} e^{i\varphi}$$

при $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$, от (3) следва

$$(4) \quad \zeta = \frac{i}{a\varphi} \left(\frac{df(z)}{dz} - \frac{d\zeta}{dt} - \frac{dz_0}{dt} e^{i\varphi} \right).$$

Ако допуснем, че движението на флуида притежава комплексен потенциал $\psi(\zeta)$ и спрямо $[O]$, вследствие на

$$(5) \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta},$$

получаваме от (4) изрази

$$(6) \quad \zeta = \frac{i}{a\varphi} \left(\frac{df(z)}{dz} - \frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta} - \frac{dz_0}{dt} e^{i\varphi} \right).$$

Дясната страна на (6) е аналитична функция на ζ , понеже такива са $\psi(\zeta)$, $f_1(\zeta) = f(z_0 + \zeta e^{i\varphi})$ (и следователно $\frac{d\psi(\zeta)}{d\zeta}$ и $\frac{df(z)}{dz}$) и константата $\frac{dz_0}{dt} e^{i\varphi}$ спрямо ζ . Лявата страна ζ , напротив, не е аналитична функция на ζ . Следователно равенството (6) е абсурдно.

Наопаки, ако $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ за даден момент или в даден интервал, от (3) и (5) следва

$$(7) \quad \psi(\zeta) = f(z) - \frac{dz_0}{dt} e^{i\varphi} \zeta$$

с точност до константа спрямо ζ ; равенството (7) е вярно съответно за дадения момент или в дадения интервал от време.

Прочее необходимото и достатъчно условие за съществуване на комплексен потенциал $\psi(\zeta)$ на движението на флуида спрямо системата $[O]$, която се движи съгласно закона (1) спрямо системата $[O]$, при допускането, че съществува комплексен потенциал $f(z)$ на движението на флуида спрямо $[O]$, е

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \text{ т. е. } \varphi(t) = \text{const.}$$

Ако това условие е изпълнено, $f(z)$ и $\psi(\zeta)$ са свързани със (7)

2. Суперпозиране на комплексни потенциали

а. Нека скоростта $\frac{dz}{dt}$ на произволна флуидна частица z е разложена на краен брой слагаеми $u_k(z)$, т. е.

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^n u_k(z),$$

всяка от които притежава комплексен потенциал $f_k(z)$, т. е.

$$\bar{u}_k(z) = \frac{df_k(z)}{dz}$$

Тогава имаме

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^n u_k(z) = \sum_{k=1}^n \frac{df_k(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^n f_k(z) = \frac{df(z)}{dz},$$

дето

$$f(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z).$$

Следователно комплексният потенциал притежава крайна адитивност.

б. Нека скоростта $\frac{dz}{dt}$ на произволна флуидна частица z е разложена на изброимо много слагаеми $u_k(z)$, т. е.

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z),$$

всяка от които притежава комплексен потенциал $f_k(z)$, т. е.

$$u_k(z) = \frac{df_k(z)}{dz}$$

Тогава имаме

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{df_k(z)}{dz}$$

Ако комплексните потенциалы $f_k(z)$ удовлетворяват

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{df_k(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

тъждествено, флуидното течение притежава комплексен потенциал

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z),$$

тъй като тогава

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df(z)}{dz}.$$

Известно е обаче, че (8) не е винаги в сила. Едно достатъчно условие за валидността на (8) е равномерната сходимост на реда, който фигурира в лявата му страна. Следователно комплексният потенциал притежава ограничена (от условието (8)) безкрайна адитивност.

Сега ще покажем, че комплексните потенциалы

$$\varphi_k(z) = \ln \frac{(z - z'_k)(z - \bar{z}''_k)}{(z - z''_k)(z - \bar{z}'_k)}$$

притежават безкрайна адитивност в случаите

$$(9) \quad \begin{cases} \zeta'_k = \frac{l}{2} + ih + 2kl = \zeta'_0 + 2kl, \\ \zeta''_k = -\frac{l}{2} - ih + 2kl = \zeta''_0 + 2kl \end{cases}$$

и

$$(10) \quad \begin{cases} \zeta'_k = ih + 2kl = \zeta'_0 + 2kl, \\ \zeta''_k = -ih + 2kl = \zeta''_0 + 2kl \end{cases}$$

при $l > 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. За целта е достатъчно да се установи равномерната сходимост на реда

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\zeta} \ln \frac{(\zeta - \zeta'_k)(\zeta - \zeta'_k)}{(\zeta - \zeta''_k)(\zeta - \zeta''_k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta'_k} + \frac{1}{\zeta - \zeta'_{-k}} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_k} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_{-k}} \right) \end{aligned}$$

в тия два случая.

Полагаме

$$g(\zeta) = \frac{1}{\zeta - \zeta'_0} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_0} + \alpha(\zeta).$$

Тогава

$$(12) \quad \begin{aligned} g(\zeta + 2l) &= \frac{1}{\zeta - (\zeta'_0 - 2l)} - \frac{1}{\zeta - (\zeta''_0 - 2l)} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\zeta - (\zeta'_k - 2l)} + \frac{1}{\zeta - (\zeta'_{-k} - 2l)} - \frac{1}{\zeta - (\zeta''_k - 2l)} - \frac{1}{\zeta - (\zeta''_{-k} - 2l)} \right] \\ &= \frac{1}{\zeta - \zeta'_{-1}} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_{-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\zeta - \zeta'_{k-1}} + \frac{1}{\zeta - \zeta'_{-k-1}} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_{k-1}} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_{-k-1}} \right] \\ &= \frac{1}{\zeta - \zeta'_{-1}} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_{-1}} + \frac{1}{\zeta - \zeta'_0} - \frac{1}{\zeta - \zeta'_{-1}} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_0} + \frac{1}{\zeta - \zeta''_{-1}} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\zeta - \zeta'_k} + \frac{1}{\zeta - \zeta'_{-k}} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_k} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_{-k}} \right] \\ &= \frac{1}{\zeta - \zeta'_0} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_0} + \alpha(\zeta) = g(\zeta), \end{aligned}$$

т. е. и в двата случая $g(\zeta)$ е периодична функция на ζ с период, ненадминаващ $2l$. Ето защо достатъчно е да докажем равномерната сходимост на $\alpha(\zeta)$ само за $\operatorname{Re} \zeta \leq l$.

В случая (9) най-напред ще докажем, че

$$(13) \quad \beta(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta'_k} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_k} \right)$$

е равномерно сходящ ред за $\operatorname{Re} \zeta \leq l$. Наистина при

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \zeta'_k = \xi'_k + i\eta'_k, \quad \zeta''_k = \xi''_k + i\eta''_k$$

за $k = 1, 2, 3, \dots$ имаме

$$\frac{1}{\zeta - \zeta'_k} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_k} = \frac{\zeta'_k - \zeta''_k}{(\zeta'_k - \zeta)(\zeta''_k - \zeta)} = \frac{\xi'_k - \xi''_k}{(\xi'_k - \xi)(\xi''_k - \xi)}$$

Но за $k = 2, 3, \dots$ са в сила неравенствата

$$(14) \quad \xi'_k - \xi \geq \xi'_k - \xi = \frac{l}{2} + 2kl - l = 2kl - \frac{l}{2} > 2kl - \frac{3}{2}l > 0$$

и

$$(15) \quad \xi''_k - \xi \geq \xi''_k - \xi = \frac{l}{2} + 2kl - l = 2kl - \frac{3}{2}l > 0.$$

Следователно имаме

$$(16) \quad \frac{1}{\xi'_k - \xi} - \frac{1}{\xi''_k - \xi} \leq \left(\frac{1}{2kl - \frac{3}{2}l} \right)^2 - \left(\frac{1}{4l^2 \left(k - \frac{3}{4} \right)^2} \right)^2 < \frac{1}{4l^2 (k-1)^2},$$

с което е доказана равномерната сходимост на реда (13).

Аналогично се доказва равномерната сходимост и на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta'_k} - \frac{1}{\zeta - \zeta''_k} \right)$$

за $\operatorname{Re} \zeta < l$, откъдето вече следва и равномерната сходимост на реда $\alpha(\zeta)$.

В случая (10) доказателството на равномерната сходимост на реда $\alpha(\zeta)$ се извършва по същия начин, като ζ'_k и ζ''_k се заменят съгласно (10) вместо съгласно (9). При същите означения се убеждаваме във верността на твърдението за (13), като сега вместо (14) и (15) имаме

$$\xi'_k - \xi \geq \xi'_k - \xi \geq 2kl - l > 2kl - 2l = 2l(k-1),$$

$$\xi''_k - \xi \geq \xi''_k - \xi \geq 2kl - l > 2kl - 2l = 2l(k-1).$$

Неравенството (16) е в сила и сега, откъдето следва равномерната сходимост на реда $\beta(\zeta)$ и в този случай. Провеждането на останалата част от доказателството е очевидно.

3. Комплексни потенциални при равномерни трансляции по реалната ос

Под „собствено движение“ на флуида ще разбираме онова състояние на движение или покой на флуида, при което взаимните разстояния на две произволни флуидни частици остават постоянни с времето, което ще рече: движение или покой на флуида като твърдо тяло.

Известно е, че наличието на вихър във флуида нарушава собственото движение на самия флуид. Вихърът индуцира върху всяка флуидна частица допълнителна скорост към „собствената скорост“ на флуидната частица, т. е. към оная скорост, която тя притежава вследствие на собственото движение на флуида. Тази допълнителна скорост зависи от разстоянието на флуидната частица до вихровия център и от интензитета (циркулацията) на последния. Ще я наричаме „индуцирана скорост“ за отличие от собствената скорост на флуидната частица. Следователно действителната скорост на всяка флуидна частица спрямо дадена координатна система е сума от собствената и от индуцираната скорост на флуидната частица спрямо тази координатна система.

Ако във флуида протича една двустранно безкрайна вихрова улица, индуцираната скорост на произволна флуидна частица, дължима на всички, безбройно много вихри на улицата, се намира посредством граничен сумационен процес, чиято сходимост предлежи да бъде доказана. Резултантната скорост на флуидната частица, дължима на наличието на вихровата улица във флуида, ще наричаме индуцирана от вихровата улица върху флуидната частица скорост. Действителната скорост на флуидната частица спрямо дадена координатна система е пак сума от собствената скорост на флуидната частица и от индуцираната върху нея от вихровата улица скорост.

Аналогично на случая, когато във флуида е налице един единствен вихър и при наличие на една вихрова улица във флуида се нарушава собственото му движение, като всяка негова частица започва да се движи по някакви характерни за нея закон и траектория на движението. Вследствие на това взаимните разстояния между флуидните частици в равнината α се изменят с времето. Разглеждането на такова течение е обект на настоящото изучаване.

При безкрайните вихрови улици се доказва съществуването на ненулева самоиндукция на вихровата улица, което означава, че вихровата улица съобщава ненулева резултантна индукционна скорост на всеки свой вихър. Спрямо координатна система, неизменно свързана със собственото движение (със собствения покой) на флуида, самоиндукционната скорост $\bar{U}$ е еднаква за всичките вихри от улицата и е правопротивоположна на собствената скорост V на флуида, при което

$$(17) \quad V > U > 0$$

за шахматни и симетрични улици. Ако улицата е двупараметрова самоиндукционната скорост $\bar{W}$ е комплексна, което именно има за резултат косото протичане на такава улица във флуида [9].

Нека OXY , $\Omega\xi\eta$ и oxy са три еднакво ориентирани правоъгълни координатни системи в равнината α , които се движат една спрямо друга съгласно закона

$$(18) \quad Z = \zeta + (V - U)t = z + Vt,$$

дето Z , ζ и z са комплексните координати на произволна точка от α спрямо гаусовите системи $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$, при което е в сила (17).

Движението на флуида при протичаща в него шахматна или симетрична вихрова улица ще отнасяме към тия координатни системи.

За един наблюдател, неизменно свързан с препятствието, системата $[O]$ е неподвижна. Такъв наблюдател ще схваща действителното движение на флуида отнесено към тази координатна система. За наблюдател, неизменно свързан с вихровата улица, е неподвижна системата $[\Omega]$. Такъв наблюдател ще схваща действителното движение на флуида като отнесено към тази координатна система. Спрямо $[\Omega]$ препятствието се движи отдясно наляво със скорост $V-U$. Най-после за наблюдател, неизменно свързан със собственото движение на флуида, е неподвижна координатната система $[o]$. За такъв наблюдател действителното движение на флуида се описва спрямо тази координатна система. Препятствието се движи спрямо $[o]$ със скорост V отдясно наляво, а улицата — със скорост U също отдясно наляво.

Спрямо $[\Omega]$ са постоянни с времето афиксите на вихрите; на-против, спрямо $[O]$ същите се движат със скорост $V-U$ отляво надясно, а спрямо $[o]$ — със скорост U отдясно наляво. Координатите на произволна флуидна частица са постоянни с времето спрямо системата $[o]$ дотолкова, доколкото не е налице индукционното влияние на вихрите от улицата спрямо флуидните частици. С други думи, собственото движение на флуида спрямо $[o]$ има скорост нула. Ако препятствието се премахне — което е равносилно с анулирането на индукционното действие на вихровата улица върху флуида, — последният ще се намира спрямо системата $[o]$ в покой.

Не е случайно, че за описване движението на флуида при наличие на протичаща в него двустранно безкрайна вихрова улица се избират именно координатните системи $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$, свързани с релацията (18); това отговаря на действителното положение на наблюдателя спрямо природното явление и опитните постановки. На това обстоятелство не се обръща достатъчно внимание в литературата, поради което понякога изводите или не са съвсем точни, или са недостатъчно ясно аргументирани. На този пункт ще се върнем по-късно.

Ако при движението на флуида в α съществува някой от комплексните потенциали: $F(Z)$ спрямо $[O]$, $\varphi(\zeta)$ спрямо $[\Omega]$ или $f(z)$ спрямо $[o]$, то съгласно (7) и (18) съществуват и останалите два комплексни потенциала, при което са в сила зависимостите

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi(\zeta) = F(Z) - (V-U)\zeta, \\ f(z) = F(Z) - Vz; \end{cases}$$

$$(20) \quad \begin{cases} F(Z) = \varphi(\zeta) + (V-U)Z, \\ f(z) = \varphi(\zeta) - Uz; \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} F(Z) = f(z) + VZ, \\ \varphi(\zeta) = f(z) + U\zeta. \end{cases}$$

Ако в горните връзки заменим някоя от величините Z , ζ или z с една от останалите величини съгласно (18), получаваме проти-

воречие, което е само привидно, понеже то се изразява в присъствието на едно допълнително по отношение на (19), (20) или (21) събираемо, което не зависи съответно от величините Z , ζ или z , но зависи от t , следователно това събираемо е постоянно спрямо тези величини, а комплексният потенциал е определен с точност до константа.

Например, ако в първата зависимост на (19) заменим ζ с Z на основание на (18), ще получим

$$\varphi(\zeta) = F(Z) - (V-U)[Z - (V-U)t] - F(Z) - (V-U)Z + (V-U)^2t$$

или

$$F(Z) = \varphi(\zeta) + (V-U)Z - (V-U)^2t.$$

Последният израз стои формално в изясненото по-горе привидно противоречие с първата зависимост на (20).

4. Построяване на комплексните потенциали при наличие на вихрова улица

Тук пресмятаме и едновременно с това доказваме съществуването на комплексните потенциали $F(Z)$, $\varphi(\zeta)$ и $f(z)$ на движението на флуида спрямо $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$ при наличие на протичаща в него шахматна и симетрична вихрова улица. Това може да се извърши по два начина:

а. Директно за всеки от комплексните потенциали $F(Z)$, $\varphi(\zeta)$ и $f(z)$, като вземем под внимание, че комплексният потенциал на флуида спрямо всяка от системите $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$ е сума от „собствения потенциал“ на флуида, т. е. от потенциала на собственото движение на флуида спрямо избраната сравнителна система, и от „индукционния потенциал“ на флуида, т. е. от потенциала на индуцираното от вихровата улица движение на флуида спрямо същата сравнителна система. Това сумиране на потенциалите може да бъде извършено поради доказаната в т. 2 крайна адитивност на комплексния потенциал.

б. С помощта на връзките (19), (20), (21), след като по изложения в а. начин сме намерили комплексния потенциал на движението на флуида спрямо коя да е от системите $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$.

Ние ще постъпим по втория начин, като най-напред пресметнем потенциала $f(z)$, който съвпада с индукционния потенциал на движението на флуида спрямо системата $[o]$, понеже спрямо тази система флуидът няма собствено движение, а следователно и собствен потенциал.

Както е известно, вихър с комплексна координата z_0 и циркуляция γ индуцира върху произволна флуидна частица с комплексна координата $z \neq z_0$ в $[o]$ скорост с комплексен потенциал

$$-\frac{i\gamma}{2\pi} \ln(z-z_0).$$

Нека z'_0 и z''_0 са вихрите

$$(22) \quad \begin{cases} z'_0 = \frac{l}{2} - Ut + ih, \\ z''_0 = -\frac{l}{2} - Ut - ih, \end{cases}$$

(индексът ' показва, че се касае за вихър от горната редица, а индексът '' — за вихър от долната редица). т. е. ония вихри, които при $t=0$ имат спрямо системата $[o]$ координати $\frac{l}{2}$, h и $-\frac{l}{2}$, $-h$. Тази двойка вихри ще наречем основна. Под k -та двойка вихри, при $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ще разбираме двойката вихри

$$\begin{cases} z'_k = z'_0 + 2kl, \\ z''_k = z''_0 + 2kl. \end{cases}$$

При това означение основната двойка е нулевата двойка.

Произволна флуидна частица получава от $(2p+1)$ -те двойки вихри с $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p$ индуцирана скорост, чийто потенциал поради крайната адитивност е

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-p}^p \left[\frac{i\Gamma'}{2\pi} \ln(z - z'_k) - \frac{i\Gamma'}{2\pi} \ln(z - z''_k) \right] = \frac{i\Gamma'}{2\pi} \sum_{k=-p}^p \ln \frac{z - z'_k}{z - z''_k} \\ &= \frac{i\Gamma'}{2\pi} \ln \prod_{k=-p}^p \frac{z - z'_k}{z - z''_k} = \frac{i\Gamma'}{2\pi} \ln \prod_{k=-p}^p \frac{z - z'_0 - 2kl}{z - z''_0 - 2kl} \\ &= \frac{i\Gamma'}{2\pi} \ln \frac{z - z'_0}{z - z''_0} \prod_{k=1}^p \frac{(z - z'_0 - 2kl)(z - z'_0 + 2kl)}{(z - z''_0 - 2kl)(z - z''_0 + 2kl)} \\ &= \frac{i\Gamma'}{2\pi} \ln \frac{z - z'_0}{z - z''_0} \prod_{k=1}^p \frac{(z - z'_0)^2 - (2kl)^2}{(z - z''_0)^2 - (2kl)^2} \\ &= \frac{i\Gamma'}{2\pi} \ln \frac{z - z'_0}{z - z''_0} \prod_{k=1}^p \frac{1 - \left(\frac{z - z'_0}{2kl} \right)^2}{1 - \left(\frac{z - z''_0}{2kl} \right)^2}. \end{aligned}$$

Да припомним, че положихме $\gamma = -\Gamma'$ за вихрите от горната редица и $\gamma = \Gamma'$ за вихрите от долната редица.

В случая безкрайната адитивност на потенциалите, дължими на всички, безбройно много двойки вихри от улицата, е гарантирана с даденото в т. 2 доказателство за равномерната сходимост на реда (11), или което е същото вследствие на (18), на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \ln \frac{(z - z'_k)(z - z'_{-k})}{(z - z''_k)(z - z''_{-k})}.$$

Следователно произволна невихрова флуидна частица z получава от двустранно безкрайната шахматна вихрова улица индуцирана скорост с комплексен потенциал

$$f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z - z'_0}{z - z''_0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{z - z'_0}{2kl}\right)^2}{1 - \left(\frac{z - z''_0}{2kl}\right)^2}$$

спрямо [o]. С помощта на познатата релация

$$x \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{x}{k\pi} \right)^2 \right] = \sin x$$

потенциалът $f(z)$ приема вида

$$(23) \quad f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l}(z - z'_0)}{\sin \frac{\pi}{2l}(z - z''_0)}$$

Като вземем под внимание (18), (21) и (23) при

$$(24) \quad \begin{cases} Z'_0 = \frac{l}{2} + (V-U)t + ih, \\ Z''_0 = -\frac{l}{2} + (V-U)t - ih \end{cases}$$

и

$$(25) \quad \begin{cases} \zeta'_0 = \frac{l}{2} + ih, \\ \zeta''_0 = -\frac{l}{2} - ih, \end{cases}$$

получаваме

$$(26) \quad F(Z) = VZ + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l}(Z - Z'_0)}{\sin \frac{\pi}{2l}(Z - Z''_0)}$$

и

$$(27) \quad \varphi(\zeta) = U\zeta + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l}(\zeta - \zeta'_0)}{\sin \frac{\pi}{2l}(\zeta - \zeta''_0)}.$$

По такъв начин са намерени комплексните потенциали $F(Z)$, $\varphi(\zeta)$ и $f(z)$ спрямо системите [O], [Ω] и [o] за протичаща във флуида шахматна улица.

За двустранно безкрайна симетрична улица (при същите означения $F(Z)$, $\varphi(\zeta)$ и $f(z)$) комплексният потенциал $f(z)$ се получава по същия начин, но с

$$(28) \quad \begin{cases} z'_0 = -Ut + ih, \\ z''_0 = -Ut - ih \end{cases}$$

вместо с (22). Сега на (24) и (25) съответствуват релациите

$$(29) \quad \begin{cases} Z'_0 = (V-U)t + ih, \\ Z''_0 = (V-U)t - ih \end{cases}$$

и (10). По такъв начин и за симетричната вихрова улица се намират потенциалите (26), (27) и (23) спрямо координатните системи съответно $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$. Да отбележим, че безкрайната адитивност на комплексните потенциали е доказана и в този случай с установената в т. 2 равномерна сходимост на съответния ред.

Получените горе изрази за комплексните потенциали (26), (27) и (23) съответно спрямо системите $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$ както за случая на шахматна, така и за случая на симетрична вихрова улица, протичаща във флуида, могат да се обединят в следната обща формула

$$(30) \quad \lambda(u) = \mu u + \frac{iI'}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l}(u - u'_0)}{\sin \frac{\pi}{2l}(u - u''_0)}$$

(26) се получава от (30) при $\mu = V$ и $u = Z$; (27) се получава от (30) при $\mu = U$ и $u = \zeta$; (23) се получава от (30) при $\mu = 0$ и $u = z$. Потенциалът $\lambda(u)$ може да се представи още във вида

$$(31) \quad \lambda(u) = \mu u + \frac{iI'}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l} \left(u - \frac{l}{2} - ih + \beta t \right)}{\sin \frac{\pi}{2l} \left(u + \frac{l}{2} + ih + \beta t \right)}$$

за случая на шахматна улица; $F(Z)$ се получава от (31) при $u = Z$, $\beta = (U - V)t$; $\varphi(\zeta)$ — при $u = \zeta$, $\beta = 0$; $f(z)$ — при $u = z$, $\beta = U$. Аналогично представяне на $\lambda(u)$ е възможно и за случая на симетрична улица.

Б. Диференциални уравнения на движението на произволна флуидна невихрова частица

Съгласно дефиницията на комплексния потенциал диференциалните уравнения на движението на произволна флуидна частица, която не е вихров център, спрямо някоя координатна система, при наличие на протичаща във флуида шахматна или симетрична вихрова улица се получават от комплексния потенциал на движението на флуида, спрямо тази координатна система, като комплексният потенциал се деривира спрямо комплексния аргумент. Получената производна представлява конюгованата стойност на комплексната скорост на въпросната флуидна частица спрямо същата координатна система. Диференциалните уравнения на движението на флуидната частица се съставят, както е известно, като производните на координатите ѝ спрямо времето се приравняват съответно с реалната и имагинерната част на комплексната скорост на флуидната частица.

а. Шахматна улица

Диференциалните уравнения на движението на флуида спрямо системата $[O]$ се получават по посочения горе начин от комплек-

сния потенциал (26). Деривирайки $F(Z)$ спрямо Z и вземайки предвид зависимостите (24), получаваме

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \frac{dF(Z)}{dZ} = V + \frac{i\Gamma}{4l} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2l} (Z - Z'_0) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2l} (Z - Z''_0) \right\} \\ &= V + \frac{i\Gamma}{4l} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2l} \left[X - \frac{l}{2} - (V - U)t + i(Y - h) \right] \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2l} \left[X + \frac{l}{2} - (V - U)t + i(Y + h) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Като съобразим известното тъждество

$$\operatorname{ctg}(\alpha + i\beta) = \frac{\sin 2\alpha - i \operatorname{sh} 2\beta}{\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\alpha},$$

намираме от (32) изрази

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= V + \frac{i\Gamma}{4l} \left\{ \frac{-\cos \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t] - i \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y - h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y - h) - \sin \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t] - i \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y + h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y + h) + \sin \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t]} \right\}, \end{aligned}$$

откъдето получаваме

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V + \frac{\Gamma}{4l} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y - h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y - h) - \sin \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y + h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y + h) + \sin \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t]} \right\}, \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{\Gamma}{4l} \cos \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t] \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y - h) - \sin \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y + h) + \sin \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t]} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Диференциалните уравнения на движението на произволна невихрова флуидна частица ζ или z съответно спрямо $[\Omega]$ или $[o]$ се получават по същия начин от [27] на основание на (25) или от (23) на основание на (22). Те са съответно

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = U + \frac{\Gamma}{4l} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (\eta - h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta - h) - \sin \frac{\pi \xi}{l}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (\eta + h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta + h) + \sin \frac{\pi \xi}{l}} \right\}, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{\Gamma}{4l} \cos \frac{\pi \xi}{l} \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta - h) - \sin \frac{\pi \xi}{l}} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta + h) + \sin \frac{\pi \xi}{l}} \right\} \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\Gamma}{4l} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (y - h)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (y - h) - \sin \frac{\pi}{l} (x + Ut)} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (y + h)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (y + h) + \sin \frac{\pi}{l} (x + Ut)} \right\}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{4l} \cos \frac{\pi}{l} (x + Ut) \left\{ - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (y - h) - \sin \frac{\pi}{l} (x + Ut)} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (y + h) + \sin \frac{\pi}{l} (x + Ut)} \right\}. \end{cases}$$

Уравненията (34) и (35) могат да се получат и от (33) така: за (34) съобразяваме, че е в сила

$$Z = \zeta + (V - U)t, \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + V - U,$$

т. е.

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dX}{dt} - (V - U), \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{dY}{dt}.$$

От

$$Z - Z_0 = \zeta - \zeta_0, \quad Z - Z_0'' = \zeta - \zeta_0''$$

получаваме

$$X - (V - U)t = \xi, \quad Y \mp h = \eta \mp h.$$

Последните стойности заместваме в (33) и получаваме (34). За (35) съобразяваме, че е в сила

$$Z = z + Vt, \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{dz}{dt} + V,$$

т. е.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} - V, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt}.$$

От

$$Z - Z_0 = z - z_0, \quad Z - Z_0'' = z - z_0''$$

получаваме

$$X - (V - U)t = x + Ut, \quad Y \mp h = y \mp h.$$

Последните стойности заместваме в (33) и получаваме (35).

По аналогичен начин, разбира се, може да се извърши и преход от (34) към (35) и изобщо във всяка двойка от (33), (34) и (35).

6. Симетрична улица

Аналогично на пресмятанията в а., като държим сметка за (26), (27) и (23), на основание на (29), (10) и (28) получаваме съответно следните диференциални уравнения за движението на произволна невихрова флуидна частица спрямо системите $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$ при протичане във флуида на една симетрична вихрова улица:

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V + \frac{\Gamma}{4l} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y-h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y-h) - \cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t]} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y+h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y+h) - \cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t]} \right\}, \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{\Gamma}{4l} \sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] \left\{ \frac{-1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y-h) - \cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t]} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y+h) - \cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t]} \right\}; \end{aligned} \right.$$

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= U + \frac{\Gamma}{4l} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (\eta-h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta-h) - \cos \frac{\pi}{l} \xi} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (\eta+h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta+h) - \cos \frac{\pi}{l} \xi} \right\}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\Gamma}{4l} \sin \frac{\pi}{l} \xi \left\{ \frac{-1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta-h) - \cos \frac{\pi}{l} \xi} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta+h) - \cos \frac{\pi}{l} \xi} \right\}; \end{aligned}$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\Gamma}{4l} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (y-h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (y-h) - \cos \frac{\pi}{l} (x+Ut)} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (y+h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (y+h) - \cos \frac{\pi}{l} (x+Ut)} \right\}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\Gamma}{4l} \sin \frac{\pi}{l} (x+Ut) \left\{ \frac{-1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (y-h) - \cos \frac{\pi}{l} (x+Ut)} + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (y+h) - \cos \frac{\pi}{l} (x+Ut)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Забележка. Ако се приеме наличието на стабилна шахматна вихрова улица във флуида, за която е изпълнено условието за стабилност на Карман

$$(39) \quad \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l} = 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2},$$

диференциалните уравнения на движението (33), (34), (35) стават съответно

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = V + \frac{I'}{\sqrt{2l}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} Y \sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - 1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} Y - \left\{ \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} Y + \sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] \right\}^2}, \\ \frac{dY}{dt} = \frac{I'}{\sqrt{2l}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} Y \cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t]}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} Y - \left\{ \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} Y + \sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] \right\}^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = U + \frac{I'}{\sqrt{2l}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta \sin \frac{\pi}{l} \xi - 1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta - \left(\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta + \sin \frac{\pi}{l} \xi \right)^2}; \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{I'}{\sqrt{2l}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \cdot \cos \frac{\pi}{l} \xi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta - \left(\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta + \sin \frac{\pi}{l} \xi \right)^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{I'}{\sqrt{2l}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} y \cdot \sin \frac{\pi}{l} (x+Ut) - 1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} y - \left[\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} y + \sin (x+Ut) \right]^2}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{I'}{\sqrt{2l}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} y \cdot \cos \frac{\pi}{l} (x+Ut)}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} y - \left[\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} y + \sin (x+Ut) \right]^2}. \end{cases}$$

Преди да пристъпим към получаване на интегралите на системите диференциални уравнения на движението на флуида (33, 34, 35) и (36, 37, 38), да направим някои бележки от общ характер. Ако

$$\Phi(z) = g(x, y) + ih(x, y)$$

е комплексният потенциал на течението спрямо произволна координатна система $[S]$, в случай че такъв потенциал съществува, комплексната скорост $\frac{dz}{dt}$, както вече се изтъкна, е

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \frac{d\Phi(z)}{dz} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} + i \frac{\partial h(x,y)}{\partial x},$$

а диференциалните уравнения на движението са

$$(40) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$$

Интегрирането на системата (40) е свързано, общо взето, с големи трудности, дължими между другото и на явното присъствие на времето t в нея. Една комбинация, която понякога води директно до целта, се състои в елиминацията на dt , т. е. в извеждането на уравнението

$$(41) \quad \frac{dx}{dy} = - \frac{\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}}$$

В някои случаи, въпреки че t явно фигурира в дясната страна на (41), елементарното интегриране на това уравнение може да се осъществи по един естествен път, без да се използва комплексният потенциал в една или друга форма. За такъв пример служат специалните случаи на диференциални уравнения от вида (41), които ще получим в следващата точка (рикатиеви уравнения) и чието интегриране се дава по-късно.

Поради

$$(42) \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = - \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

от (41) получаваме

$$\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} dy = 0,$$

т. е. линиите на тока

$$(43) \quad h(x,y) = \text{const.}$$

Очевидно е, че интегралът (43) на линиите на тока в стационарния случай съвпада с интеграла на уравнението (41), получен чрез непосредствено интегриране.

Вторият интеграл на системата (40) ще се получи от интеграла на уравнението (41) и от едно от уравненията на системата (40).

6. Рикатиеви диференциални уравнения, свързани със системата на движението

Сега ще покажем, че от системите диференциални уравнения (33, 34, 35) и (36, 37, 38) на движението на произволна невихрова флуидна частица при протичаща във флуида шахматна, респ. симетрична вихрова улица, се получават рикатиеви диференциални уравнения от един и същ тип съответно за случая на шахматна и симетрична вихрова конфигурация.

Като интегрираме с квадратури тези два типа рикатиеви диференциални уравнения в т. 7, получаваме първите интеграли на разглежданите две тройки системи диференциални уравнения на движението. Известно е обаче, че при стационарния случай — движение на флуида спрямо системите $[\Omega]$ — тези първи интеграли могат да се получат и директно чрез приравняване на имагинерната част на съответния комплексен потенциал с константа. Така се получават изобщо линиите на тока при движението на флуида, които при стационарния режим на течение са едновременно и траектории на флуидните частици, т. е. първи интеграли на системата диференциални уравнения на движението. Напротив, при нестационарните случаи на сравнителни системи $[O]$ и $[o]$ линиите на тока не са първи интеграли на системите диференциални уравнения на движението, т. е. те не са и траектории на флуидните частици. Обстоятелството обаче, че рикатиевите диференциални уравнения са от един и същ тип за (33, 34, 35), съответно за (36, 37, 38), позволява известната от стационарния случай чрез комплексния потенциал $\phi(z)$ квадратура на еднотипното рикатиево диференциално уравнение съответно за системите (33, 34, 35) или за системите (36, 37, 38) да се разшири целесъобразно и за нестационарните случаи, чрез което и за тези случаи могат да се получат първи интеграли на системите диференциални уравнения на движението чрез квадратури.

Разбира се, ако са известни първите интеграли на системите диференциални уравнения на движението на флуида при наличие в него на шахматни и симетрични вихрови улици за стационарните случаи, първите интеграли на системите диференциални уравнения на движението за нестационарните случаи могат да се получат от предните и чрез линейна трансформация поради (18).

За шахматния, респ. за симетричния случай въпросните рикатиеви диференциални уравнения се получават по следния начин:

а. Шахматна улица

Първото уравнение на (33) написваме във вида

$$\frac{d}{dt} [X - (V - U)t] = U + \frac{\Gamma}{4l} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y - h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y - h) - \sin \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t]} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y + h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y + h) + \sin \frac{\pi}{l} [X - (V - U)t]} \right\}.$$

Чрез субституцията

$$X' = X - (V - U)t, \quad Y' = Y$$

системата (33) става

$$(44) \quad \frac{dX'}{dt} = \frac{\Gamma}{4l} \frac{A + \frac{4Ul}{\Gamma} C}{C}, \quad \frac{dY'}{dt} = \frac{\Gamma}{4l} \cos \frac{\pi}{l} X' \cdot \frac{B}{C},$$

дето

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y' - h) \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y' + h) + \sin \frac{\pi}{l} X' \right] \\ &\quad - \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (Y' + h) \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y' - h) - \sin \frac{\pi}{l} X' \right] \\ &= 2 \sqrt{1 + c^2} \left[\sin \frac{\pi}{l} X' \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} Y' - c \right], \end{aligned}$$

$$B = \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y' + h) + \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y' - h) = 2 \sqrt{1 + c^2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} Y',$$

$$\begin{aligned} C &= \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y' - h) - \sin \frac{\pi}{l} X' \right] \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y' + h) + \sin \frac{\pi}{l} X' \right] \\ &= \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} Y' + c^2 - \sin^2 \frac{\pi}{l} X' - 2c \sin \frac{\pi}{l} X' \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} Y', \end{aligned}$$

при

$$(45) \quad c = \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} h.$$

Чрез разделяне на уравненията на системата (44) получаваме

$$\begin{aligned} \frac{dX'}{dY'} &= \frac{2 \sqrt{1 + c^2} \left[\sin \frac{\pi}{l} X' \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} Y' - c \right]}{2 \sqrt{1 + c^2} \cos \frac{\pi}{l} X' \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} Y'} \\ &+ \frac{\frac{4Ul}{\Gamma} \left[\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} Y' + c^2 - \sin^2 \frac{\pi}{l} X' - 2c \sin \frac{\pi}{l} X' \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} Y' \right]}{2 \sqrt{1 + c^2} \cos \frac{\pi}{l} X' \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} Y'}, \end{aligned}$$

което при

$$(46) \quad a = - \frac{2U}{\sqrt{1 + c^2} \Gamma}$$

и

$$(47) \quad \alpha = \sin \frac{\pi}{l} X', \quad \beta = \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} Y'$$

става

$$(48) \quad \frac{da}{d\beta} = \frac{a}{1 + \beta^2} \alpha^2 + \frac{(1 + 2ac)\beta}{1 + \beta^2} \alpha - \frac{a + c + ac^2 + a\beta^2}{1 + \beta^2}.$$

По същия начин съответно от (34) и (35), но с

$$(49) \quad \alpha = \sin \frac{\pi}{l} \xi, \quad \beta = \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta$$

вместо с (47) и с

$$\alpha = \sin \frac{\pi}{l} (x + Ut), \quad \beta = \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} y$$

вместо с (47) пак получаваме (48) с (45) и (46).

За стабилните шахматни вихрови улици, за които, както отбелязахме, е в сила условието за стабилност (39), получаваме от (46)

$$a = - \frac{lU}{\sqrt{2I'}}.$$

и (48) сега става

$$(50) \quad \frac{da}{d\beta} = \frac{a}{1+\beta^2} \alpha^2 + \frac{(1+2a)\beta}{1+\beta^2} \alpha - \frac{1+2a+a\beta^2}{1+\beta^2}.$$

6. Симетрична улица

Сега използваме от системата (37), която написваме във вида

$$(51) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{I'}{4l} \frac{A' + \frac{4lU}{I} C'}{C'}, \quad \frac{d\eta}{dt} = - \frac{I'}{4l} \sin \frac{\pi}{l} \xi \frac{B'}{C'}$$

при (45). Тук сме въвели означенията

$$\begin{aligned} A' &= \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (\eta - h) \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta + h) - \cos \frac{\pi}{l} \xi \right] \\ &\quad - \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} (\eta + h) \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta - h) - \cos \frac{\pi}{l} \xi \right] \\ &= 2c \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \cos \frac{\pi}{l} \xi - \sqrt{1+c^2} \right], \\ B' &= \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta + h) - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta - h) = 2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta, \\ C' &= \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta - h) - \cos \frac{\pi}{l} \xi \right] \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta + h) - \cos \frac{\pi}{l} \xi \right] \\ &\quad \cdot c^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta + \cos^2 \frac{\pi}{l} \xi - 2 \sqrt{1+c^2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \cos \frac{\pi}{l} \xi. \end{aligned}$$

Чрез разделяне на уравненията (51) получаваме

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\eta} &= \frac{2c \left[\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} \xi - \sqrt{1+c^2} \right]}{-2c \sin \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta} \\ &\quad + \frac{\frac{4lU}{I} \left[c^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta + \cos^2 \frac{\pi}{l} \xi - 2 \sqrt{1+c^2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \cos \frac{\pi}{l} \xi \right]}{-2c \sin \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta}, \end{aligned}$$

което при

$$(52) \quad \alpha' = \cos \frac{\pi}{l} \xi, \quad \beta' = \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta$$

и

$$(53) \quad a' = - \frac{2lU}{cI}$$

дава

$$(54) \quad \frac{d\alpha'}{d\beta'} = \frac{\alpha'}{1-\beta'^2} - \frac{(1+2\alpha')\sqrt{1+c^2}\beta'}{1-\beta'^2} \alpha' + \frac{\alpha'c^2 + \sqrt{1+c^2} + \alpha'\beta'^2}{1-\beta'^2}.$$

По същия начин съответно от (36) и (38), но при

$$\alpha' = \cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t], \quad \beta' = \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} Y$$

вместо (52) и при

$$\alpha' = \cos \frac{\pi}{l} (x + Ut), \quad \beta' = \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} y$$

вместо (52), получаваме пак при (53) същото рикатиево диференциално уравнение (54), както и трябва да се очаква, поради линейната зависимост (18) между Z , z и z .

7. Линии на тока

Както отбелязахме в т. 6, поради това, че рикатиевите диференциални уравнения (48) и (54) са от един и същ тип, за получаването на първите интеграли на диференциалните уравнения (33, 34, 35) и (36, 37, 38) на движението на флуида е естествено да използваме квадратурите на линиите на тока в стационарния случай.

Тук ще получим всички линии на тока, т. е. и за нестационарните случаи, с което ще покажем, че срещаната в литературата единствена фамилия криви за линиите на тока представлява специален случай измежду твърде разнообразните фамилии криви за линиите на тока, когато тези линии се схващат от наблюдатели свързани с различни сравнителни системи.

а. Шахматна улица

Линиите на тока при движението на флуида спрямо системата $[O]$ се получават от

$$\operatorname{Im} F(Z) = \text{const.}$$

или поради (26) и

$$(55) \quad \ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

от

$$(56) \quad VY + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2l} (Z-Z')}{\sin \frac{\pi}{2l} (Z-Z'')} = \text{const.}$$

Като се вземе под внимание (24), се получава

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2l} (Z-Z')^2}{\sin \frac{\pi}{2l} (Z-Z'')} = \frac{\sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y-h)}{-\sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y+h)},$$

отдето уравненията на търсената фамилия линии на тока стават

$$(57) \quad VY + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y-h)}{-\sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y+h)} = \text{const.}$$

Съвършено аналогично получаваме и линиите на тока при движението на флуида спрямо системите $[Q]$ и $[o]$ от

$$\operatorname{Im} \varphi(\zeta) = \text{const.}$$

чрез (27) и от

$$\operatorname{Im} f(z) = \text{const.}$$

чрез (23). Те са съответно

$$(58) \quad U\eta + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{l} \xi - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta-h)}{-\sin \frac{\pi}{l} \xi - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta+h)} = \text{const.}$$

и

$$(59) \quad \frac{\sin \frac{\pi}{l} (x+Ut) - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (y-h)}{-\sin \frac{\pi}{l} (x+Ut) - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (y+h)} = \text{const.}$$

6. Симетрична улица

Линиите на тока на движението на флуида спрямо системата $[O]$ се получават от

$$\operatorname{Im} F(Z) = \text{const.}$$

или поради (26) и (55) от (56). Като се вземе под внимание (29), се получава

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2l} (Z-Z'_0)}{\sin \frac{\pi}{2l} (Z-Z''_0)} = \frac{\cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y-h)}{\cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y+h)},$$

откъдето уравненията на търсената фамилия стават

$$(60) \quad VY + \frac{\Gamma}{4l} \ln \frac{\cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y-h)}{\cos \frac{\pi}{l} [X - (V-U)t] - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (Y+h)} = \text{const.}$$

Съвършено аналогично получаваме и линиите на тока при движението на флуида спрямо системите $[Q]$ и $[o]$. Те са съответно

$$(61) \quad U\eta + \frac{\Gamma}{4l} \ln \frac{\cos \frac{\pi}{l} \xi - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta-h)}{\cos \frac{\pi}{l} \xi - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} (\eta+h)} = \text{const.}$$

$$(62) \quad \frac{\cos \frac{\pi}{l}(x+Ut) - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l}(y-h)}{\cos \frac{\pi}{l}(x+Ut) - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l}(y+h)} = \text{const.}$$

Единствената фамилия криви, представлящи линиите на тока за шахматни стабилни улици, срещана в литературата, съответствува на случая (59); при (39) на (59) може да се даде видът

$$(63) \quad \sin \frac{\pi}{l}(x+Ut) + \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} y = C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} y$$

при

$$C_1 = \sqrt{2} \frac{C-1}{C+1},$$

ако константата отдясно на (59) сме означили с C . Наистина тези криви се получават и от (57) при $V=0$, и от (58) при $U=0$, но тези формални полагания са лишени от физичен смисъл.

Че не е без значение строгото разграничение на случаите (57), (58) и (59), следва преди всичко от обстоятелството, че линиите на тока (58) и (61) са първи интеграли на системите диференциални уравнения (34) и (37) на движението на флуида спрямо стационарните координатни системи $[\Omega]$ за разлика от линиите на тока (57) и (59), респ. (60) и (62), които не са първи интеграли на системите диференциални уравнения (33) и (35), респ. (36) и (38) на движението на флуида спрямо нестационарните координатни системи $[O]$ и $[o]$. Ето защо е нужно да сме наясно по въпроса, към коя сравнителна координатна система трябва да отнесем дадена фамилия линии на тока.

Трябва да се има предвид освен това и механичното значение на линиите на тока, които са фотографска снимка на картината на течение при дадено положение на наблюдателя, т. е. при точно определена сравнителна система. Наистина касае се за следното: при движение на флуид с протичаща в него вихрова улица, повърхността на който е покрита с лекоподвижни частици, приемани за модели на флуидните частици, тази повърхност се снима при късо, но крайно (различно от нула) време на експонацията. Образите на тия частици върху плаката представят приблизително линейните елементи на траекториите им, например в началния момент на снимането. Както е известно, в стационарния случай тия линейни елементи обвиват траекториите на съответните частици за разлика от нестационарните случаи, при които обвивките на линейните елементи, т. е. линиите на тока, не съвпадат с траекториите им. Последните се получават при едно непрекъснато снимане.

Понеже времето на експонацията е крайно, а не нула, за вида на снетите образи, поне теоретично, е от значение движението на фотографическия апарат спрямо флуида, т. е. координатната система, към която е отнесено движението на флуида. В това се състои принципиалната механична страна на въпроса за различието между (57), (58), (59), респ. между (60), (61), (62). На това обстоя-

телство в литературата не се обръща достатъчно внимание и читателят често изобщо не може да се ориентира спрямо каква координатна система се отнася движението на флуида. Освен това в литературата почти никога не се дават указания за опитната постановка по отношение положението на фотоапарата [10]. Че последното е от значение при по-точни измервания, личи от текстовите указания в авторитетните лекции на L. Prandtl [11] (таблица 24, фиг. 16).

В допълнение да дадем някои непосредствени изводи относно кривите (57), (58), (59).

Вижда се преди всичко, че кривите (57) са променливи с времето, що се отнася до фиксирана точка Z_0 от $[O]$ с период

$$(64) \quad T = \frac{2l}{V-U}$$

за t . Тъй като $V-U$ е скоростта, с която вихровата улица се движи спрямо системата $[O]$, а от (64) следва $2l = T(V-U)$, ясно е, че T е времето, необходимо за придвижване на улицата отляво надясно спрямо $[O]$ на разстояние $2l$, след което улицата заема същото геометрично положение спрямо $[O]$, както преди T , и има същото скоростно състояние.

Вижда се също, че кривите (57) са периодични с период $2l$ по отношение на X при фиксирано t , т. е. за наблюдател, свързан с $[O]$, що се отнася до валидността на (57), картината на кривите се повтаря след преместването му на разстояние $2l$ по оста OX .

Поради периодичността на (57) спрямо t и X достатъчно е да разгледаме кривите от фамилията (57) в интервала $\left[0, \frac{2l}{V-U}\right]$ за t и в интервала $\left[\frac{l}{2}, \frac{l}{2} + 2l\right]$ за X .

Фамилията (57) при фиксирано t е симетрична спрямо правата

$$X = \frac{l}{2} + (V-U)t$$

поради

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{l} [X + a - (V-U)t] &= \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{l}{2} + a \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{l}{2} - a \right) = \sin \frac{\pi}{l} [X - a - (V-U)t], \end{aligned}$$

а при фиксирано X — спрямо

$$t = \frac{X - \frac{l}{2}}{V-U}$$

поради

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)(t+a)] &= \sin \frac{\pi}{l} \left[\frac{l}{2} - (V-U)a \right] \\ &= \sin \frac{\pi}{l} \left[\frac{l}{2} + (V-U)a \right] = \sin \frac{\pi}{l} [X - (V-U)(t-a)].\end{aligned}$$

Казаното за фамилията (57) важи дословно и за (59) при замяна на $X, Y, V-U$ с $x, y, -U$. Що се отнася до фамилията (58), видяхме, че тя не зависи от t , в което се състои ограничението за (58) в горните изводи.

8. Еквипотенциални линии

С оглед на пресмятането на количествата флуидни маси, протичащи през сечения, нормални към равнината на течението, на който въпрос ще се върнем допълнително на друго място, а главно поради известни аналогии с рикатиевите диференциални уравнения (48) и (54), да се спрем накратко върху еквипотенциалните линии при движението на флуида с протичаща в него шахматна или симетрична вихрова улица. При това ще разгледаме само стационарния случай вследствие на очевидните аналогии с останалите случаи поради (18) и (19) — (21).

а. Шахматна улица.

Диференциалното уравнение на еквипотенциалните линии може да се получи, като се използва условието за ортогоналност на тия криви към линиите на тока, чието диференциално уравнение параметрично се представя със системата (34). Като изразим условието за ортогоналност, получаваме

$$\begin{aligned}d\eta &= \sin \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta - c - a \left[\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta + c^2 - \sin^2 \frac{\pi}{l} \xi - 2c \sin \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta \right] \\ d\xi &= - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \cos \frac{\pi}{l} \xi\end{aligned}$$

или при (49)

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{a(1+\beta^2+c^2-\alpha^2-2c\alpha\beta)+c-\alpha\beta}{1-\alpha^2}$$

Така получаваме рикатиевото диференциално уравнение

$$(65) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{a}{1-\alpha^2} \beta^2 - \frac{(1+2ac)a}{1-\alpha^2} \beta + \frac{a+c+a^2-c^2-\alpha^2}{1-\alpha^2},$$

аналог на (48) с (49). Сравнението на (65) с (54) показва интересния факт, че рикатиевото диференциално уравнение на еквипотенциалните линии при наличие на шахматна улица във флуида и рикатиевото диференциално уравнение за линиите на тока при наличие на симетрична улица във флуида са от един и същ тип.

б. Симетрична улица

Еквипотенциалните линии спрямо $[\Omega]$ получаваме по аналогичен начин от (37). При (52) и (53) имаме последователно

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \cos \frac{\pi}{l} \xi - \sqrt{1+c^2} + \frac{2lU}{c\Gamma} (\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta + \cos^2 \frac{\pi}{l} \xi)}{\sin \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta}$$

и

$$\frac{-2\sqrt{1+c^2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \cos \frac{\pi}{l} \xi + c^2}{\sin \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta}$$

$$\frac{d\beta'}{d\alpha'} = \frac{\alpha'\beta' - \sqrt{1+c^2} - \alpha'(\beta'^2 + \alpha'^2 - 2\sqrt{1+c^2}\alpha'\beta' + c^2)}{\alpha'^2 - 1},$$

т. е.

$$(66) \quad \frac{d\beta'}{d\alpha'} = \frac{\alpha'}{1-\alpha'^2} \beta'^2 - \frac{1+2\sqrt{1+c^2}\alpha'\alpha'}{1-\alpha'^2} \beta' + \frac{\sqrt{1+c^2} + \alpha'c^2 + \alpha'\alpha'^2}{1-\alpha'^2}.$$

Рикатиевото диференциално уравнение (66) е от същия тип, както и уравнението (65), т. е. еквипотенциалните линии на течението при наличие на шахматна и на симетрична вихрова улица във флуида имат рикатиново диференциално уравнение от един и същ тип.

Поради това формално обстоятелство ще намерим крайните уравнения на еквипотенциалните линии само в случая на шахматна улица. При симетричната улица се работи напълно аналогично, но не бива да се забравя, че връзките (49) и (52) са различни.

Известно е, че еквипотенциалните линии могат да се получат, като се приравни с константа реалната част на комплексния потенциал, в случая на потенциала (27).

Поради

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

търсените криви са

$$U\xi - \frac{l}{2\pi} \operatorname{Arg} \lambda = \operatorname{const} = C,$$

дето

$$\lambda = \frac{\sin \frac{\pi}{2l} (\zeta - \zeta'_0)}{\sin \frac{\pi}{2l} (\zeta - \zeta''_0)}.$$

Оттук

$$\operatorname{Arg} \lambda = \frac{2\pi}{l} (U\xi - C), \quad \operatorname{tg} \operatorname{Arg} \lambda = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{l} (U\xi - C).$$

Поради

$$\operatorname{tg} \operatorname{Arg} z = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$$

$$\mu = \frac{\sin z_1}{\sin z_2} = \frac{\sin (x_1 + iy_1)}{\sin (x_2 + iy_2)} = \frac{\sin x_1 \cos iy_1 + \cos x_1 \sin iy_1}{\sin x_2 \cos iy_2 + \cos x_2 \sin iy_2}$$

и

$$\sin iy_1 = i \operatorname{sh} y_1, \quad \cos iy_1 = \operatorname{ch} y_1 \text{ и пр.}$$

получаваме

$$\mu = \frac{\sin x_1 \sin x_2 \operatorname{ch} y_1 \operatorname{ch} y_2 + \cos x_1 \cos x_2 \operatorname{sh} y_1 \operatorname{sh} y_2}{\sin^2 x_2 \operatorname{ch}^2 y_2 + \cos^2 x_2 \operatorname{sh}^2 y_2} + \frac{i(\sin x_2 \cos x_1 \operatorname{sh} y_1 \operatorname{ch} y_2 - \sin x_1 \cos x_2 \operatorname{ch} y_1 \operatorname{sh} y_2)}{\sin^2 x_2 \operatorname{ch}^2 y_2 + \cos^2 x_2 \operatorname{sh}^2 y_2}$$

и

$$\operatorname{tg} \operatorname{Arg} \mu = \frac{\cos x_1 \sin x_2 \operatorname{sh} y_1 \operatorname{ch} y_2 - \sin x_1 \cos x_2 \operatorname{ch} y_1 \operatorname{sh} y_2}{\sin x_1 \sin x_2 \operatorname{ch} y_1 \operatorname{ch} y_2 + \cos x_1 \cos x_2 \operatorname{sh} y_1 \operatorname{sh} y_2} = \frac{\operatorname{tg} x_2 \operatorname{cth} y_2 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{cth} y_1}{1 + \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{cth} y_1 \operatorname{cth} y_2}$$

Тогава

$$\operatorname{tg} \operatorname{Arg} \lambda = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2l} \left(\xi + \frac{l}{2} \right) \operatorname{cth} \frac{\pi}{2l} (\eta + h) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2l} \left(\xi - \frac{l}{2} \right) \operatorname{cth} \frac{\pi}{2l} (\eta - h)}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2l} \left(\xi + \frac{l}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2l} \left(\xi - \frac{l}{2} \right) \operatorname{cth} \frac{\pi}{2l} (\eta + h) \operatorname{cth} \frac{\pi}{2l} (\eta - h)}$$

или

$$\operatorname{tg} \operatorname{Arg} \lambda = \frac{1+p}{1-p} \frac{1+qr}{q+r} + \frac{1-p}{1+p} \frac{1-qr}{q-r} = \frac{1 - \frac{1+p}{1-p} \frac{1-p}{1+p} \frac{1+qr}{q+r} \frac{1-qr}{q-r}}{1 - \frac{1+p}{1-p} \frac{1-p}{1+p} \frac{1+qr}{q+r} \frac{1-qr}{q-r}} = \frac{(1+p^2)(1+qr)(q-r) + (p-1)^2(1-qr)(q+r)}{(1-p^2)(q^2-r^2-1+q^2r^2)} = - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta}{\cos \frac{\pi \xi}{l}} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{l} \operatorname{sh} \frac{\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}}$$

при

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{2l} = p, \operatorname{cth} \frac{\pi \eta}{2l} = q, \operatorname{cth} \frac{\pi h}{2l} = r.$$

Поради (45) имаме

$$\operatorname{tg} \operatorname{Arg} \lambda = \left(c \sin \frac{\pi \xi}{l} - \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta \right) \frac{1}{\cos \frac{\pi}{l} \xi \sqrt{1+c^2}}$$

Следователно търсеното крайно уравнение на екипотенциалните линии е

$$(67) \quad \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta = c \sin \frac{\pi}{l} \xi - \sqrt{1+c^2} \cos \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{tg} \frac{2\pi}{l} (U\xi - c).$$

9. Интеграли на системата на движението

Съгласно бележката от края на т. 5 интегралите на рикатиените диференциални уравнения (48) с (45), (46) и (49) за шахматната улица и на рикатиевите диференциални уравнения (54) с (45), (52) и (53) за симетричната улица са (58), респ. (61), т. е. пак съ-

гласно същата бележка (58) и (61) са първи интеграли на системата диференциални уравнения на движението на флуида при наличие на протичаща в него шахматна, респ. симетрична вихрова улица, когато движението е отнесено спрямо стационарната координатна система $[\Omega]$.

От (58) за шахматния случай получаваме

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{l} \xi - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \sqrt{1+c^2} + c \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta &= -e^{\frac{4\pi}{l}(C-U\eta)}, \\ \sin \frac{\pi}{l} \xi + \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \sqrt{1+c^2} + c \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta & \end{aligned}$$

или поради (49)

$$\begin{aligned} \alpha - \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} + c\beta &= -e^{\frac{4\pi}{l}(C-U\eta)}, \\ \alpha + \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} + c\beta & \end{aligned}$$

т. е.

$$\alpha = -c\beta + \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} \frac{1 - e^{\frac{4\pi}{l}(C-U\eta)}}{1 + e^{\frac{4\pi}{l}(C-U\eta)}},$$

или

(68)

$$\alpha = -c\beta + \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} \operatorname{th}(W+C_1),$$

при

$$(69) \quad W = \frac{2\pi U}{l} \eta - \sqrt{1+c^2} a \ln(\beta + \sqrt{1+\beta^2}), \quad C_1 = -\frac{2\pi}{l} C.$$

Второто уравнение на системата (34) може да се напише във вида

$$(70) \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{l \sqrt{1+c^2}}{2l} \cos \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta - \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta + c^2 - \sin^2 \frac{\pi}{l} \xi - 2c \sin \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta + c^2 - \sin^2 \frac{\pi}{l} \xi}.$$

Въз основа на

$$\begin{aligned} \delta &= \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta + c^2 - \sin^2 \frac{\pi}{l} \xi - 2c \sin \frac{\pi}{l} \xi \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta \\ &= \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta (1+c^2) - \left(\operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta \cdot c + \sin \frac{\pi}{l} \xi \right)^2 \end{aligned}$$

и (68) получаваме

$$\delta = (1+c^2) \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta - (1+c^2) \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta \cdot \operatorname{th}^2(W+C_1),$$

т. е.

$$\delta = (1+c^2)(1+\beta^2) \frac{1}{\operatorname{ch}^2(W+C_1)}.$$

Следователно от (68) и (70) намираме

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\varepsilon l \sqrt{1+c^2} \operatorname{ch}^2(W+C_1) \sqrt{1-\alpha^2}}{2l (1+c^2) \sqrt{1+\beta^2}}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Променливите в последното уравнение могат да се разделят, откъдето получаваме

$$\frac{d\beta}{\text{ch}^2(W+C_1) \sqrt{1 - [c\beta - \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} \text{th}(W+C_1)]^2}} = \frac{\varepsilon \pi I' dt}{2I^2 \sqrt{1+c^2}}.$$

Прочее вторият интеграл на системата (34) е

$$(71) \quad \int \frac{d\beta}{\text{ch}^2(W+C_1) \sqrt{1 - [c\beta - \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} \text{th}(W+C_1)]^2}} = \frac{\varepsilon \pi I' t}{2I^2 \sqrt{1+c^2}} + C_2.$$

В случая на симетрична улица намираме втория интеграл на системата на движението по същия начин.

Законът на движението на произволна невихрова флуидна частица в случая на шахматна улица се дава спрямо стационарната координатна система $[Q]$ от системата уравнения (58) и (71). Законът на движение спрямо нестационарните координатни системи $[O]$, $[o]$ може да се получи или съгласно забележката от началото на т. 6, или от системата (58), (71) въз основа на трансформациите (18).

Да отбележим, че интегралът, фигуриращ в лявата страна на (71) изобщо (при произволни условия на обтичане и пр.), не се изразява с елементарни функции, защото при специални стойности на константите той става елиптичен. Наистина, ако означим този интеграл с $I(\sqrt{2}a, C_1)$, в стабилния случай (39) имаме

$$\begin{aligned} I(\sqrt{2}a, C_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}a} \int \frac{d \text{th}(W+C_1)}{\sqrt{1 - \left[\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \sqrt{2} \text{th}(W+C_1) \right]^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}a} \int \frac{d \text{th}(W+C_1)}{\sqrt{1 - \text{th}^2 \frac{W}{\sqrt{2}a} - \left[\text{th} \frac{W}{\sqrt{2}a} + \sqrt{2} \text{th}(W+C) \right]^2}}, \end{aligned}$$

което при

$$\text{th } W = \theta, \text{ th } C_1 = \omega$$

в случая $\sqrt{2}a = 1$ дава

$$I(1, C_1) = (1 - \omega^2) \int \frac{d\theta}{(1 + \omega\theta) \sqrt{(1 - \theta^2)(1 + \omega\theta)^2 - [\theta(1 + \omega\theta) + \sqrt{2}(\omega + \theta)]^2}},$$

значи горното твърдение е установено.

Допълнително ще се върнем върху ефективното изследване на системата (58), (71) и свързаните с него хидродинамични изводи.

10. Директно интегриране на системата на движението

В т. 7 и 9 бяха получени интегралите (58), (71) на системата (34) диференциални уравнения на движението на флуида при наличие на протичаща в него шахматна вихрова улица, когато това движение се отнася спрямо координатната система $[\Omega]$, и беше отбелязано как могат да се интегрират съответните системи (33) и (35) за случаите на координатни системи $[O]$ и $[o]$. За целта съществено беше използван първият интеграл (58), произтичащ от комплексния потенциал (27), или по-кратко казано, интегралът на комплексния потенциал. С други думи, за да се стигне до закона на движението на флуида, биде получена чрез деривирание на потенциала $q(z)$ системата диференциални уравнения на движението $\frac{dq(z)}{dz}$ и обратно, пръв интеграл на същата система се извлече непосредствено от $q(z)$, т. е. премина се през линиите на тока. Този подход обаче, както вече изрично се подчерта, е приложим само когато при движението на флуида съществува координатна система, спрямо която режимът на течение е стационарен. В противен случай този метод е неприложим, защото интегралът на комплексния потенциал не съществува. Поради това в случая се налага директно интегриране на системата диференциални уравнения на движението.

Пример за такава хидродинамична задача, аналогична на разглежданата, е намирането на закона на движението на флуида при наличие на протичаща в него вихрова улица, когато препятствието е на крайно разстояние, т. е. на едностранно безкрайна вихрова улица. При тази задача не съществува координатна система, спрямо която режимът на течение е стационарен. Следователно за решаването ѝ не може да бъде използван интегралът на комплексния потенциал: линиите на тока не са траектории на флуидните частици спрямо никоя координатна система.

В края на т. 5 отбелязахме, че в някои случаи и на стационарен режим на течение системата на движение може да се интегрира по един естествен път, без да се използва комплексният потенциал в една или друга форма. Оказа се (и при нашето първоначално разглеждане ние следвахме именно този път), че и тук случаят е такъв: системата (34) се интегрира с квадратури директно, стига върху изведеното от нея рикатиево диференциално уравнение (48) да се приложи един резултат на J. Halm [12] (1906), който намираме в известния справочник на E. Kamke [13], цитиран оттук нататък с ЕК.

В т. 6 получихме от системите (33, 34, 35) рикатиевото диференциално уравнение (48) за шахматна улица и от системите, (36, 37, 38) — рикатиевото диференциално уравнение (54) за симетрична улица. Формалната аналогия между (48) и (54) веднага се хвърля на очи.

Известно е от теорията на диференциалните уравнения, че общото рикатиево диференциално уравнение

$$(72) \quad y' - f_1(x)y^2 + f_2(x)y + f_3(x)$$

може да се преобразува посредством трансформацията

$$(73) \quad u(x) = e^{-\int f_1(x)y(x)dx + \frac{1}{2} \int f_4(x)dx}$$

с

$$(74) \quad f_4(x) = - \left\{ \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + f_2(x) \right\}$$

в линейното хомогенно диференциално уравнение от втори ред

$$(75) \quad u'' + \left[f_1(x)f_3(x) - \frac{1}{4} f_4^2(x) - \frac{1}{2} f_4'(x) \right] u = 0.$$

Уравнението (75) е еквивалентно с уравнението (72) в този смисъл, че всеки интеграл на (72) се трансформира чрез (73) в нетривиален интеграл на (75) и обратно, на всеки нетривиален интеграл на (75) посредством обратна трансформация на (73) отговаря интеграл на (72).

За уравнението (48) имаме

$$f_1(\beta) = \frac{a}{1+\beta^2}, \quad f_2(\beta) = \frac{(1+2ac)\beta}{1+\beta^2}, \quad f_3(\beta) = -\frac{a+c+ac^2+a\beta^2}{1+\beta^2},$$

отдето

$$f_4(\beta) = \frac{(1-2ac)\beta}{1+\beta^2}, \quad f_4'(\beta) = (1-2ac) \frac{1-\beta^2}{(1+\beta^2)^2}.$$

Тогава (75) в нашия случай добива вида

$$u'' + \left[-\frac{a(a+c+ac^2+a\beta^2)}{(1+\beta^2)^2} - \frac{1}{4} \frac{(1-2ac)^2\beta^2}{(1+\beta^2)^2} + \frac{2ac-1}{2} \frac{1-\beta^2}{(1+\beta^2)^2} \right] u = 0$$

или

$$(76) \quad 4(1+\beta^2)^2 u'' + (\lambda\beta^2 + \lambda - 3) u = 0$$

при

$$(77) \quad \lambda = 1 - 4a^2(1+c^2).$$

Уравнението (76) е свързано с цитираната по-горе работа на J. Halm и е интегрирано от последния с квадратури. По ЕК (уравнение 2.385) уравнението

$$(78) \quad 4(x^2+1)^2 y'' + (ax^2+a-3)y = 0$$

има общ интеграл за $a > 1$

$$y = (1+x^2)^{\frac{1}{4}} [C_1 \cos X + C_2 \sin X],$$

дето

$$X = \frac{1}{2} \sqrt{a-1} \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

За $a < 1$ величините $a-1$, $\cos$, $\sin$ следва да се заменят съответно с $1-a$, ch , sh .

В нашия случай поради (77) имаме

$$\lambda < 1 \text{ и } \frac{1-\lambda}{2} = -a \sqrt{1+c^2},$$

понеже $a < 0$ съгласно (46). При въведените от нас означения следователно общият интеграл на уравнението (76) е

$$(79) \quad u = (1+\beta^2)^{\frac{1}{2}} (C_1 \operatorname{ch} B + C_2 \operatorname{sh} B),$$

$$(80) \quad B = -a \sqrt{1+c^2} \ln(\beta + \sqrt{1+\beta^2}).$$

Трансформацията (73) е произведение на трите трансформации

$$(81) \quad \begin{cases} y_1(x) = f_1(x)y(x), \\ y_2(x) = e^{\int y_1(x) dx}, \\ u(x) = y_2(x) e^{\frac{1}{2} \int f_1(x) dx} \end{cases}$$

Обратните трансформации на (81) и по-специално обратните на последните две трансформации на (81), позволяват по известния интеграл (79) на Halm'овото диференциално уравнение (78) да се намери общият интеграл на рикатиевото диференциално уравнение (48). В нашия случай при възприетите означения имаме съответно

$$y_2(\beta) = (1+\beta^2)^{\frac{ac}{2}} (C_1 \operatorname{ch} B + C_2 \operatorname{sh} B),$$

$$y_1(\beta) = \frac{a}{1+\beta^2} \left[c\beta \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} \frac{C_1 \operatorname{sh} B + C_2 \operatorname{ch} B}{C_1 \operatorname{ch} B + C_2 \operatorname{sh} B} \right]$$

и

$$(82) \quad y(\beta) = a = -c\beta + \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} \frac{C_1 \operatorname{sh} B + C_2 \operatorname{ch} B}{C_1 \operatorname{ch} B + C_2 \operatorname{sh} B}.$$

Случая $C_1 = C_2 = 0$ изключваме, понеже търсим нетривиален интеграл на (76).

За $C_1 - C_2 \neq 0$ от (82) получаваме

$$a = -c\beta + \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2},$$

т. е. при (49)

$$\sin \frac{\pi}{l} \xi = -c \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} \eta + \sqrt{1+c^2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta.$$

Но тогава имаме

$$(1+c^2) \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{l} \eta = \left(\sin \frac{\pi}{l} \xi + \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} \eta \right)^2,$$

т. е. в този случай знаменателите на (33, 34, 35) се анулират, поради което също го изключваме. Касае се за флуидни частици,

които са вихрови центрове. Поради същата причина изключваме и случая $C_1 = -C_2 \neq 0$.

При $C_1^2 \neq C_2^2$, (82) става

$$\alpha = -c\beta + \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+\beta^2} \operatorname{th}(B+C)$$

при подходяща комбинация на интеграционните константи. Но последното уравнение е идентично с интеграла (68) с (69) на линиите на тока, т. е. с интеграла на комплексния потенциал, както и трябва да се очаква съгласно забележката от края на т. 5.

Очевидно е, от друга страна, че познаването на интеграла (68) на комплексния потенциал за рикатиевото диференциално уравнение (48) ни дава решението на Halm'овото диференциално уравнение (76) на базата на хидродинамични съображения, като се използва трансформацията (73). Този подход, т. е. преходът от рикатиеви диференциални уравнения с известни интеграли към съответните линейни хомогенни диференциални уравнения от втори ред, еквивалентни на първите в казания по-горе смисъл, е отправната точка на разглежданията ни в една друга работа.

11. Директно получаване на екипотенциалните линии

Аналогично на разглежданията в т. 10, гдето линиите на тока бяха получени, без да се използва комплексният потенциал, тук ще получим екипотенциалните линии на движението на флуида при наличие на протичаща в него шахматна вихрова улица също директно, т. е. пак без да използваме комплексния потенциал.

Диференциалното уравнение на екипотенциалните линии получихме, като използвахме диференциалното уравнение (41) на линиите на тока и изразихме условието за ортогоналност между тези две фамилии криви. Имаме при същите означения

$$(83) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \quad \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$$

или

$$(84) \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} dx - \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} dy = 0.$$

Поради (42) получаваме от (84)

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} dy = 0,$$

т. е.

$$g(x, y) = \text{const.}$$

Очевидно е и тук, че интегралът на потенциалните линии в стационарния случай ще съвпада с интеграла на диференциалното уравнение (83), получен чрез непосредствено интегриране.

За уравнението (65) при означенията на т. 10 имаме

$$f_1(a) = \frac{a}{1-a^2}, f_2(a) = -\frac{(1+2ac)a}{1-a^2}, f_3(a) = \frac{a+c+ac^2-aa^2}{1-a^2},$$

откъдето

$$f_4(a) = \frac{(2ac-1)a}{1-a^2}, f_4'(a) = \frac{(2ac-1)(1+a)^2}{(1-a^2)^2}$$

Тогава (75) в този случай добива вида

$$4(1-a^2)^2 u'' + [\alpha^2(1-4a^2-4a^2c^2) + 4a^2 + 4a^2c^2 + 2]\mu = 0$$

или

$$(85) \quad 4(1-a^2)^2 u'' + [\lambda \alpha^2 + 3 - \lambda] u = 0$$

при (77).

Уравнението (85) е формален аналог на Halm'овото диференциално уравнение (76) или, което е същото, на (78). Обстоятелството, че познаваме интеграла (67) на рикатието диференциално уравнение (65) на екипотенциалните линии чрез комплексния потенциал, ни дава възможност да намерим общия интеграл на уравнението (85) чрез трансформацията (73). Имаме от (67) поради (47)

$$\beta = ca - \sqrt{1+c^2} \sqrt{1-a^2} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{l} [U\xi - C].$$

Тогава (73) дава

$$u(a) = e^{-\int_{1-a^2}^a [ca - \sqrt{1+c^2} \sqrt{1-a^2} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{l} [U\xi - C]] da} + \frac{1}{2} \int \frac{(2ac-1)a da}{1-a^2}$$

$$= D(1-a^2)^{\frac{1}{4}} e^{-\int \operatorname{tg} \frac{2\pi}{l} [U\xi - C] a^{\frac{2\pi}{l}} [U\xi - C]}$$

(86)

$$= D(1-a^2)^{\frac{1}{4}} \cos \frac{2\pi}{l} (U\xi - C) = (1-a^2)^{\frac{1}{4}} (D_1 \cos E + D_2 \sin E),$$

гдето D_1 и D_2 са интеграционни константи, а

$$(87) \quad E = -a \sqrt{1+c^2} \operatorname{arcsin} a.$$

Интересна е аналогията между (86) с (87) и (79) с (80). Нека отбележим, че тук е даден общият интеграл на (85) само за случая $\lambda < 1$. Случаите $\lambda = 1$ са разгледани в следващата ни работа.

Обратно, ако е известен общият интеграл на (85), крайното уравнение на екипотенциалните линии може да се получи от него чрез метода на обратната трансформация на (73), илюстриран в т. 10.

Да обърнем внимание на това, че (85) може да се превърне чрез известна трансформация в такъв частен случай на хипергеометричното диференциално уравнение $H(\alpha, \beta, \gamma; y, x) = 0$ (означение по ЕК, уравнение 2.260), а именно $\alpha + \beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$, за който е известен интегралът на $H(\alpha, \beta, \gamma; y, x) = 0$ в затворена форма. Ето защо общият интеграл на (85) може да се счита познат.

В допълнение на забележката от края на т. 10 пак обръщаме внимание върху същественото използване на комплексния потен-

циал за интегрирането на (85) на базата на хидродинамични съображения. Освен това диференциалното уравнение (85) се получава и от рикатиевото уравнение (54) на линиите на тока при симетрични улици и от рикатиевото уравнение (66) на екипотенциалните линии пак при симетрични улици.

Постъпила на 10. 7. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. T. h. v. Kármán. Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1911—12): H. Rubach. Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes, Phys. Zeitschr. 13 (1912)
2. J. I. Synge. Mathematical Investigation of the Thrust Experienced by a Cylinder in a Current, the Motion being Periodic, Proc. Roy. Irish Acad. (1927).
3. B. I. Dolaptschiew. Über die Stabilität der Karmanschen Wirbelstrasse, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937)
— Störungsbewegungen (Bahnen) der einzelnen Wirbel der Karmanschen Wirbelstrasse, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938).
4. Н. Е. Кочин. О неустойчивости вихревых цепочек Кармана, Доклады акад. наук СССР, н. с., 24 (1939).
5. A. W. Maue. Zur Stabilität der Karmanschen Wirbelstrasse, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940).
6. Б. л. Долапчиев. Обобщающий прием определения устойчивости произвольно расположенных вихревых дорожек, Доклады акад. наук СССР, н. с., 17 (1951);
— Применение способов Н. Е. Кочина к исследованию состояния равновесия двухпараметровых вихревых дорожек, Доклады акад. наук СССР, н. с., 78 (1951);
Об устойчивости и косом протекании двухпараметровых вихревых дорожек, Доклады акад. наук СССР, н. с., 98 (1954).
7. А. А. Космодемьянский. К проблеме вихревого сопротивления, Уч. записки МГУ, 7 (1937);
— Некоторые вопросы аэродинамической теории сопротивления, Уч. записки МГУ, 46 (1940).
8. Б. л. Долапчиев. О приближенном определении вихревого сопротивления, Доклады акад. наук СССР, н. с. 98 (1954).
9. Б. л. Долапчиев. Двупараметрови вихрови улици. Год. Соф. унив. 39, ч. I (1942);
— Върху косото протичане на вихровите улици, Год. Соф. унив. 43, ч. I (1947).
10. R. Fuchs, L. Hopf u. Fr. Seewald. Aerodynamik, Bd. II (1935), S. 253—254.
11. L. Prandtl u. O. Tietjens, Hydro- und Aeromechanik, Bd. II (1931).
12. J. Halm. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 41 (1906), p. 673.
13. E. Kamke. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I (1951).

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ФЛЮИДА В ПРИСУТСТВИИ КАРМАНОВЫХ ВИХРЕВЫХ ДОРОЖЕК

Б. Л. Долапчиев, И. В. Чобанов

РЕЗЮМЕ

До сих пор, при изучении Кармановых вихревых дорожек, исследовали или вопрос о их устойчивости, или же проблему вихревого сопротивления над препятствием, производящим дорожку.

В настоящей работе устанавливаются законы плоскопараллельного движения флюида в присутствии протекающей в нем двусторонне бесконечной шахматной или симметричной вихревой конфигурации.

Движение флюида отнесено к трем сравнительным координатным системам, которые являются неизбежными по причине физического естества вопроса и положения наблюдателя по отношению к явлению. Система $[O]$ связана с препятствием, система $[\Omega]$ — с вихревой дорожкой, а система $[o]$ — с собственным движением флюида.

Устанавливается, что необходимое и достаточное условие существования комплексного потенциала течения флюида по отношению к сравнительной координатной системе $[\Sigma]$, движущейся согласно данному закону по отношению к системе $[S]$, при предположении, что такой потенциал по отношению к последней системе существует, состоит в том, чтобы движение $[\Sigma]$ по отношению к $[S]$ было трансляционным; кроме того, установлена связь (7) между двумя потенциалами в последнем случае. Таким образом получены зависимости (19, 20, 21) между комплексными потенциалами: $F(Z)$ по отношению к $[O]$, $\varphi(\zeta)$ по отношению к $[\Omega]$ и $f(z)$ по отношению к $[o]$. При помощи последних и соотношений (18) совершается переход между этими потенциалами.

Введение сравнительных систем $[O]$, $[\Omega]$ и $[o]$ вносит, с одной стороны, четкость и точность в рассуждениях, благодаря чему устраняется допускаемая обычно в литературе о вихревых дорожках нестрогость и связанная с нею неточность при исчислении элементов движения, а с другой стороны подчеркивает специальную роль стационарной сравнительной системы $[\Omega]$ для математического решения проблем, связанных с двусторонне бесконечными вихревыми дорожками.

Построен при помощи суперпонирувания элементарных потенциалов отдельных вихревых пар комплексный потенциал $f(z)$ дву-

сторонне бесконечной вихревой дорожки в шахматном и симметричном расположении, и по методу равномерной сходимости приведено доказательство бесконечной аддитивности элементарных потенциалов, обеспечивающей то обстоятельство, что формально полученное выражение относительно $f(z)$ действительно является потенциалом течения. При помощи (21) получены и остальные комплексные потенциалы.

Посредством этих потенциалов найдены системы дифференциальных уравнений движения флюида (33, 34, 35) и (36, 37, 38) за исключением сингулярных вихревых точек. Используя в стационарных случаях интегралы (58, 61) комплексного потенциала (линии тока), т. е. первые интегралы системы движения, совершаются вторые квадратуры этих систем. Вторые интегралы вообще не выражаются элементарными функциями, так как при специальных условиях течения получаются гиперэллиптические интегралы, вследствие чего законы движения получаются в неявном виде.

При помощи одного результата J. Halm'a [12] возможно и прямое интегрирование систем дифференциальных уравнений движения в случае протекающей в флюиде шахматной вихревой дорожки. Оказывается, что из этих систем можно получить однотипное дифференциальное уравнение Riccati (48) за все три координатные системы, которое, преобразованное в линейное гомогенное дифференциальное уравнение второго порядка приводит к решению Halm'ом дифференциальному уравнению 2.385 [13], при той же самой связи между имеющимися в нем константами. Факт этот делает возможным найти общий интеграл дифференциального уравнения Riccati (48), т. е. первых интегралов систем движения и после этого снова совершить указанным выше способом вторую квадратуру. Наоборот, посредством известного из комплексного потенциала общего интеграла дифференциального уравнения Riccati получается также решение дифференциального уравнения Halm'a на основании указанных гидродинамических соображений.

Из системы дифференциальных уравнений движения, при наличии симметричных дорожек, получается также однотипное дифференциальное уравнение Riccati для всех трех сравнительных координатных систем, для которого соответствующее линейное гомогенное дифференциальное уравнение второго порядка (85) является формальным аналогом дифференциального уравнения (76) Halm'a. Интеграл (85) в ЕК [13] не указан. Этот интеграл также получается на основании упомянутых выше гидродинамических соображений (посредством линии тока). (58) получается не только для линии тока в случае симметричных дорожек, но и для эквипотенциальных линий течения флюида как при шахматной, так и при симметричной вихревой конфигурации.

Этот подход, т. е. переход от дифференциальных уравнений Riccati с известными интегралами к соответствующим линейным гомогенным дифференциальным уравнениям второго порядка является отправным пунктом нашего рассмотрения в одной из следующих работ, относящейся к некоторым классам дифференциальных уравнений.

ÜBER DIE INTEGRALE DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DER FLÜSSIGKEIT UM EINE KARMANSCHES WIRBELSTRASSE

Bl. Dolaptschiew, Iw. Tschobanow

ZUSAMMENFASSUNG

In den bisherigen Untersuchungen der Karmanschen Wirbelstraßen wurde entweder das Stabilitätsproblem, oder das Problem der Widerstandsbestimmung behandelt. In der vorliegenden Arbeit werden dagegen die Flüssigkeitsbewegungsgesetze gesucht, die in Anwesenheit einer zweiseitig unendlichen, schachbrettartigen oder symmetrischen Wirbelkonfiguration gelten.

Die Flüssigkeitsbewegung wird auf drei Koordinatensysteme bezogen, die der physikalischen Natur und der Lage des Beobachters in bezug auf die Erscheinung entsprechen. Das System $[O]$ ist mit dem umflossenen Hindernis verbunden, das System $[\Omega]$ mit der Wirbelstraße und das System $[o]$ mit der eigenen Flüssigkeitsbewegung.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des komplexen Potentials der Flüssigkeitsströmung bezüglich des Systems $[\Sigma]$, welches sich nach einem vorgeschriebenen Gesetz in bezug auf das System $[S]$ bewegt, unter der Voraussetzung, daß ein solches Potential in bezug auf das letztere existiert, besteht darin, daß die Bewegung des Systems $[\Sigma]$ gegen das System $[S]$ eine Translation sei. Dabei wird noch die Relation (7) zwischen beiden Potentialen im letzteren Falle gefunden. So werden die Beziehungen (19, 20, 21) zwischen den drei komplexen Potentialen: $F(Z)$ in bezug auf das System $[O]$, $\varphi(z)$ auf $[\Omega]$ und $f(z)$ — auf $[o]$ erhalten. Mit ihrer Hilfe und der Relation (18) wird der Übergang zwischen $F(Z)$, $\varphi(z)$ und $f(z)$ realisiert.

Durch die Einführung der benannten Bezugssysteme wird einerseits Genauigkeit und Klarheit der Betrachtungen erzielt und damit die oft in der Literatur über Wirbelstraßen vorkommende Unexaktheit und die dadurch entstandenen Fehler vermieden und andererseits auf die spezielle Rolle des stationären Bezugssystems $[\Omega]$ für die mathematische Behandlung der mit den zweiseitig unendlichen Wirbelstraßen verbundenen Probleme hingewiesen.

Es wird durch Superposition der Elementarpotentiale der einzelnen Wirbelpaare einer zweiseitig unendlichen Wirbelstraße in schachbrettartiger oder in symmetrischer Anordnung das komplexe Potential $f(z)$

konstruiert, wobei durch die Methode der gleichmäßigen Konvergenz ein Beweis für die unendliche Additivität der Elementarpotentiale gegeben, und dadurch gewährleistet wird, daß der formal konstruierte Ausdruck $f(z)$ tatsächlich ein Strömungspotential ist. Mit Hilfe von (21) werden noch die übrigen komplexen Potentiale $F(Z)$ und $q(z)$ gegeben.

Durch diese Potentiale werden die Systeme (33, 34, 35) und (36, 37, 38) von Bewegungsgleichungen der Flüssigkeitsteilchen, ausschließlich der singulären Wirbelzentren, gefunden. Durch Benutzung der Integrale (58) und (65) des komplexen Potentials (Stromlinien) bei den stationären Fällen, d. h. der ersten Bewegungsintegrale sind dann noch die zweiten Quadraturen erhalten. Die zweiten Bewegungsintegrale lassen sich im allgemeinen nicht durch elementare Funktionen ausdrücken, da man bei speziellen Strömungsbedingungen hyperelliptische Integrale erhält; infolgedessen sind die gesuchten Bewegungsgesetze in impliziter Form gegeben.

Ein Ergebnis von J. Halm [12] gestattet auch die direkte Integration der Bewegungssysteme bei Anwesenheit in der Flüssigkeitsströmung einer schachbrettartigen Wirbelstraße. Es erwies sich, daß in diesem Falle aus den Bewegungssystemen eine eintypige Riccatische Differentialgleichung (48) für alle drei Bewegungssysteme erhalten wurde. Diese, in eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung transformierte Riccatische Differentialgleichung führt auf die von Halm gelöste Differentialgleichung 2.386 [13], zurück und zwar bei genau derselben Relation zwischen den in der Halmschen Differentialgleichung vorhandenen Konstanten. Diese Tatsache gestattet die Ermittlung des allgemeinen Integrals der Riccatischen Differentialgleichung (48), d. h. der ersten Integrale des Bewegungssystems und dann auf die erwähnte Weise auch die zweite Quadratur der Bewegungssysteme.

Umgekehrt, man kommt auf Grund der erwähnten hydrodynamischen Erwägungen, durch das aus dem komplexen Potentiale erhaltene allgemeine Integral der Riccatischen Differentialgleichung (48) auf die Lösung der Halmschen Differentialgleichung.

Aus den Bewegungssystemen bei symmetrischen Anordnungen der Wirbelstraßen wird für alle drei Bewegungssysteme wieder eine eintypige Riccatische Differentialgleichung (54) erhalten, deren entsprechende homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (85) ein formales Analogon zur Halmschen Differentialgleichung (76) darstellt. Das Integral von (85) ist in EK [13] nicht angegeben. Dieses wird ebenso auf Grund der erwähnten hydrodynamischen Berücksichtigungen durch die Stromlinien gewonnen. Die Gleichung (58) wird nicht nur für die Stromlinien bei symmetrischer Anordnung der Wirbelstraße, sondern auch für die Äquipotentiallinien der Strömung sowohl bei schachbrettartigen, als auch bei symmetrischen Wirbelkonfigurationen erhalten.

Dieses Verfahren, d. h. der Übergang von den Riccatischen Differentialgleichungen mit bekannten Integralen zu den entsprechenden linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist der Ausgangspunkt der nächstfolgenden Arbeit, der Verfasser, die sich auf eine Klasse von Differentialgleichungen bezieht.