

ЗА НЕРАЗЛОЖИМИТЕ ВЕКТОРИ НА НЯКОИ КОНУСИ

Т. Генчев

Ще казваме, че измеримото ядро $K(x, t)$ със сумируем квадрат, дефинирано почти навсякъде в квадрата $\Delta: a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$, е симетрично, когато равенството $K(x, t) = K(t, x)$ е удовлетворено почти навсякъде в Δ . Симетричното ядро $K(x, t)$ ще наричаме позитивно, когато е изпълнено неравенството $\int \int_{\Delta} K(x, t) p(x) p(t) dx dt \geq 0$,

каквато и да бъде дефинираната почти навсякъде в $[a, b]$ измерима функция $p(x)$, чийто квадрат е сумируем.

Нека L е конусът на непрекъснатите позитивни ядра, дефинирани в Δ . В L дефинираме координатна система, като полагаме

$$\Phi_{\mu\nu}(K) = \int \int_{\Delta} K(x, t) \varphi_{\nu}(x) \varphi_{\mu}(t) dx dt \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad \mu = 1, 2, 3, \dots,$$

където $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$ е пълна ортогонална и нормирана система от непрекъснати функции, дефинирани в $[a, b]$.

Да разгледаме линейния функционал $P(K) = \int_a^b K(x, x) dx$, дефиниран в L . Като вземем предвид, че $K(x, x) \geq 0$ (както веднага следва от позитивността на ядрото), заключаваме, че $P(K) \geq 0$. Ще покажем, че от $P(K) = 0$ следва $K(x, t) = 0$. За тази цел ще докажем неравенството $(3) \int \int_{\Delta} K^2(x, t) dx dt \leq (P(K))^2$ [1], което ще използваме многократно. Нека t_0 и x_0 ($x_0 > t_0$) са две вътрешни точки на $[a, b]$ и нека λ и μ са произволни числа. Нека $P_n(x)$ е произволна редица от непрекъснати функции, дефинирани в $[a, b]$, които притежават следните свойства*:

$$(1) \quad P_n(x) = 0 \quad \text{в интервалите} \quad a \leq x \leq t_0 - \frac{1}{n}, \quad t_0 + \frac{1}{n} \leq x \leq x_0 - \frac{1}{n} \quad \text{и} \\ x_0 + \frac{1}{n} \leq x \leq b;$$

* Ще даваме на n достатъчно големи стойности, такива, че интервалите, за които става дума, да имат най-много по една обща точка и $a \leq t_0 - \frac{1}{n} \leq b$ и $b \geq x_0 + \frac{1}{n}$.

$$(2) \quad \int_{t_0 - \frac{1}{n}}^{t_0 + \frac{1}{n}} P_n(x) dx = \lambda \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} P_n(x) dx = \mu;$$

$$(3) \quad P_n(x) \text{ не си мени знака в интервалите } \left[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n} \right] \text{ и } \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right].$$

Да означим с Δ'_n , Δ''_n , Δ'''_n квадратите

$$\begin{aligned} \Delta'_n: \quad & t_0 - \frac{1}{n} \leq x \leq t_0 + \frac{1}{n} \\ & t_0 - \frac{1}{n} \leq t \leq t_0 + \frac{1}{n} \\ \Delta''_n: \quad & x_0 - \frac{1}{n} \leq x \leq x_0 + \frac{1}{n} \\ & x_0 - \frac{1}{n} \leq t \leq x_0 + \frac{1}{n} \\ \Delta'''_n: \quad & t_0 - \frac{1}{n} \leq x \leq t_0 + \frac{1}{n} \\ & x_0 - \frac{1}{n} \leq t \leq x_0 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Понеже K е позитивно ядро, имаме

$$(4) \quad \int_{\Delta'_n} \int K(x, t) P_n(x) P_n(t) dx dt + \int_{\Delta''_n} \int K(x, t) P_n(x) P_n(t) dx dt \\ + 2 \int_{\Delta'''_n} \int K(x, t) P_n(x) P_n(t) dx dt \geq 0.$$

Ще покажем, че когато $n \rightarrow \infty$, имаме

$$(5) \quad \begin{aligned} \int_{\Delta'_n} \int K(x, t) P_n(x) P_n(t) dx dt &\rightarrow \lambda^2 K(t_0, t_0); \\ \int_{\Delta''_n} \int K(x, t) P_n(x) P_n(t) dx dt &\rightarrow \mu^2 K(x_0, x_0); \\ \int_{\Delta'''_n} \int K(x, t) P_n(x) P_n(t) dx dt &\rightarrow \lambda \mu K(x_0, t_0). \end{aligned}$$

И трите граници се намират по един и същи начин. Затова ще намерим само третата от тях.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Понеже $K(x, t)$ е непрекъснатата, стига n да бъде достатъчно голямо, ще имаме $|K(x_0, t_0) - K(x, t)| \leq \varepsilon$ за всяка точка от Δ'''_n . Тогава

$$\begin{aligned}
& \left| \int \int_{\Delta_n'''} K(x, t) P_n(x) P_n(t) dx dt - \lambda \mu K(x_0, t_0) \right| \\
& \left| \int \int_{\Delta_n'''} [K(x, t) - K(x_0, t_0)] P_n(x) P_n(t) dx dt \right| \\
& \leq \int \int_{\Delta_n'''} |K(x, t) - K(x_0, t_0)| P_n(x) P_n(t) dx dt \leq \epsilon, \lambda, \mu
\end{aligned}$$

С това съотношенията (5) са доказани. Като оставим $n \rightarrow \infty$ в (4), получаваме

$$(6) \quad \lambda^2 K(x_0, x_0) + 2\lambda\mu K(x_0, t_0) + \mu^2 K(t_0, t_0) \geq 0.$$

Понеже λ и μ са произволни числа, заключаваме, че квадратичната форма (6) не си мени знака и следователно $K^2(x_0, t_0) \leq K(x_0, x_0) K(t_0, t_0)$. Като вземем предвид, че x_0 и t_0 са произволни вътрешни точки на $[a, b]$ и че $K(x, t)$ е непрекъсната, получаваме $K^2(x, t) \leq K(x, x) K(t, t)$ за всяка точка $(x, y) \in \Delta$. Като интегрираме това неравенство, получаваме

$$(3) \quad \int \int_{\Delta} K^2(x, t) dx dt \leq (P(K))^2.$$

От доказаното неравенство (3) следва, че щом $P(K) = 0$, то $K(x, t) \equiv 0$. Най-после от неравенството на Коши—Буняковски имаме

$$(\Phi_{\mu, \nu}(K))^2 \leq \int \int_{\Delta} K^2(x, t) dx dt \int_a^b \varphi_{\nu}^2(x) dx \int_a^b \varphi_{\mu}^2(t) dt \leq (P(F))^2, \text{ т. е.}$$

$$|\Phi_{\mu, \nu}(K)| \leq P(K) \quad \nu = 1, 2, \dots \quad \mu = 1, 2, \dots$$

Не е трудно да се види, че конусът L не е затворен относно нормата P .

Въпреки това той има неразложими елементи относно P . Поточно, вярна е следната теорема:

Ядрото $K(x, t)$, принадлежащо на L , е тогава и само тогава неразложимо, когато има вида $u(x)u(t)$, където $u(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана в $[a, b]$.

Доказателство. Нека $K \in L$ и $K(x, t) \not\equiv 0$. Разлагаме $K(x, t)$ по следния начин: $K(x, t) = (K(x, t) - K_1(x, t)) + K_1(x, t)$, където

$$K_1(x, t) = \left(\int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \right) \left(\int_a^b K(x, t) \psi(x) dx \right).$$

Тука $\psi(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана в $[a, b]$, подчинена на единственото условие $0 < \int \int_{\Delta} K(x, t) \psi(x) \psi(t) dx dt < 1$. Такава

функция има, защото $K(x, t) \not\equiv 0$. Очевидно е, че $K_1(x, t) \in L$. Ще покажем, че и $K(x, t) - K_1(x, t) \in L$. Наистина, нека $p(x)$ е произволна непрекъсната функция, дефинирана в $[a, b]$. Ако положим

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt,$$

имаме

$$\begin{aligned} \int_J \int_J K_1(x, t) p(x) p(t) dx dt &= \left(\int_a^b \varphi(x) p(x) dx \right)^2 \\ &= \left(\int_J \int_J K(x, t) \psi(t) p(x) dx dt \right)^2 \\ &= \int_J \int_J K(x_1, t) p(x) p(t) dx dt \int_J \int_J K(x, t) \psi(x) \psi(t) dx dt \\ &\quad \int_J \int_J K(x, t) p(x) p(t) dx dt, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_J \int_J (K(x, t) - K_1(x, t)) p(x) p(t) dx dt \geq 0.$$

Последното неравенство получихме с помощта на неравенството

$$\begin{aligned} &\left(\int_J \int_J K(x, t) p(x) q(t) dx dt \right)^2 \int_J \int_J K(x, t) p(x) p(t) dx dt \\ &\quad \times \int_J \int_J K(x, t) q(x) q(t) dx dt, \end{aligned}$$

валидно за произволни позитивни ядра със сумируем квадрат. Понеже P е линейна норма, $K(x, t) = (K(x, t) - K_1(x, t)) + K_1(x, t)$ е разлагане и по норма.

Нека $K(x, t)$ е неразложим елемент. Тогава $\lambda K(x, t) = K_1(x, t)$ т.е. $\lambda K(x, t) = \varphi(x) \varphi(t)$. Числото λ е различно от нула, защото иначе получаваме $\varphi^2(x) \equiv 0$ и $\int_J \int_J K(x, t) \psi(x) \psi(t) dx dt = 0$, което е невъзможно. И така $K(x, t) = \frac{1}{\lambda} \varphi(x) \varphi(t)$.

Остава да докажем, че всички ядра от този вид ($\varphi(x) \not\equiv 0$) са неразложими.

Нека

$$\varphi_0(x) \varphi_0(t) = K_1(x, t) + K_2(x, t) \quad K_1 \in L, \quad K_2 \in L.$$

В такъв случай

$$\begin{aligned} \int_J \int_J (K_1(x, t) + K_2(x, t))^2 dx dt &= \int_J \int_J (\varphi_0(x) \varphi_0(t))^2 dx dt \\ &= \left(\int_a^b \varphi_0(x) \varphi_0(x) dx \right)^2 = \left(\int_a^b (K_1(x, x) + K_2(x, x)) dx \right)^2; \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} &\left[\left(\int_a^b K_1(x, x) dx \right)^2 - \int_J \int_J K_1^2(x, t) dx dt \right] + \left[\left(\int_a^b K_2(x, x) dx \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \int_J \int_J K_2^2(x, t) dx dt \right] + 2 \left[\int_a^b K_1(x, x) dx \int_a^b K_2(x, x) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_J \int_J K_1(x, t) K_2(x, t) dx dt \right] = 0. \end{aligned}$$

Първите две разлики са неотрицателни. Ще покажем, че и третата е неотрицателна. Наистина

$$\begin{aligned} & \left(\int_1 \int K_1(x, t) K_2(x, t) dx dt \right)^2 \\ & \leq \int_1 \int K_1^2(x, t) dx dt \int_1 \int K_2^2(x, t) dx dt \leq \left(\int_a^b K_1(x, x) dx \right)^2 \\ & \quad \left(\int_a^b K_2(x, x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

Това ни дава право да твърдим, че и трите изрази в скобите са нули. В частност $\int_1 \int K_1(x, t) K_2(x, t) dx dt = \int_a^b K_1(x, x) dx \int_a^b K_2(x, x) dx$ и следователно $\left(\int_1 \int K_1(x, t) K_2(x, t) dx dt \right)^2 = \int_1 \int K_1^2(x, t) dx dt \times \int_1 \int K_2^2(x, t) dx dt$, от което следва, че $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$ са линейно зависими.

С това теоремата е доказана.

От направените разсъждения е ясно, че неразложимите елементи на L могат да се характеризират по следния начин: елементът $K(x, t)$ от L е неразложим тогава и само тогава, когато

$$\int_1 \int K^2(x, t) dx dt = \left(\int_a^b K(x, x) dx \right)^2.$$

Като използваме част от казаното досега, ще построим нов конус L_1 , който ще бъде компактен и ще съдържа конуса L . Както при построяването на L_1 , така и при дефинирането и изучаването на нормата ще се ползуваме широко от разсъжденията на проф. Тагамлици, направени в работата му по допълване на регулярни конуси до свръхслабо компактни [2].

Нека L_1 е множеството на позитивните измерими симетрични ядра със сумируем квадрат, дефинирани почти навсякъде в J , които могат да се представят като свръхслаба граница на ограничена по норма редица $\{K_n\}$ от елементи на L .

Координатната система в L_1 ще дефинираме както в L , т.е.

$\Phi_{\mu, \nu}(K) = \int_1 \int K(x, t) \varphi_{\mu}(x) \varphi_{\nu}(t) dx dt$ ($\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ е същата система от функции, която използвахме при дефиницията на базата в L).

Нека $K \in L_1$. Тогава съществува свръхслабо сходяща редица от ядра $K_1, K_2, K_3, \dots \rightarrow K$, $K_n \in L$, за която $P(K_n) \leq A$. Такива редици ще наричаме фундаментални. Две фундаментални редици ще

наричаме конфинални, когато имат една и съща свръхслаба граница. Нека $S(K)$ е множеството на всички конфинални редици, клонещи свръхслабо към K , за които $\lim_{n \rightarrow \infty} P(K_n)$ съществува. Дефинираме норма в L_1 по следния начин: $P_1(K) = \inf_{n \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} P(K_n))$:

$\{K_n\} \in S(K)$. Очевидно е, че $P_1(K) \geq 0$. Ще покажем, че функционалът P_1 е изпъкнал. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и нека $\{K_{1n}\} \in S(K_1)$, $\{K_{2n}\} \in S(K_2)$ са такива, че $P(K_{1n}) \leq P_1(K_1) + \varepsilon$, $P(K_{2n}) \leq P_1(K_2) + \varepsilon$. Тогава $\{K_{1n} + K_{2n}\} \in S(K_1 + K_2)$ и $P(K_{1n} + K_{2n}) \leq P_1(K_1) + P_1(K_2) + 2\varepsilon$. С граничен преход получаваме $\lim_{n \rightarrow \infty} P(K_{1n} + K_{2n}) \leq P_1(K_1) + P_1(K_2) + 2\varepsilon$.

Като вземем предвид, че $P(K_1 + K_2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(K_{1n} + K_{2n})$, заключаваме, че $P_1(K_1 + K_2) \leq P_1(K_1) + P_1(K_2) + 2\varepsilon$, откъдето следва $P_1(K_1 + K_2) \leq P_1(K_1) + P_1(K_2)$, понеже $\varepsilon > 0$ е произволно.

Равенството $P_1(\lambda K) = \lambda P_1(K)$ ($\lambda \geq 0$) е очевидно. Непосредствено от дефиницията на P_1 следва съществуването на фундаментална редица $\{K_n\}$, за която $\lim_{n \rightarrow \infty} P(K_n) = P_1(K)$. За такива редици ще казваме, че апроксимират K добре.

Ще покажем, че щом $P_1(K) = 0$, то $K(x, t) = 0$ почти навсякъде в Δ . Такива ядра ще считаме неразлични от нула и ще пишем $K = 0$. Предварително ще докажем неравенствата $|\Phi_{\mu\nu}(K)| \leq P_1(K)$. Нека $\{K_n\}$ апроксимира K добре. Като оставим $n \rightarrow \infty$ в неравенството $|\Phi_{\mu\nu}(K_n)| \leq P(K_n)$ (ν, μ — произволни, но фиксирани), получаваме $|\Phi_{\mu\nu}(K)| \leq P_1(K)$, откъдето следва, че ако $P_1(K) = 0$, то и $K = 0$.

Остана да проверим дали P_1 е полунепрекъсната отдолу. Нека $K_1, K_2, K_3 \dots$ свръхслабо клони към K , $K_n \in L_1$, $K \in L_1$, $P_1(K_n) \leq A$. Ще покажем, че и $P_1(K) \leq A$. Щом $K_n \in L_1$, може да се намери редица $\{K_{ns}\}$ от елементи на L , която свръхслабо клони към K_n и $P(K_{ns}) \leq A + \varepsilon$, каквото и да бъде положителното ε . Например всяка редица, която апроксимира K добре, от известно място нататък има това свойство. Стига s да бъде достатъчно голямо, ще бъдат изпълнени и неравенствата $|\Phi_{\mu\nu}(K_{ns} - K_n)| \leq \frac{1}{n}$ при $\mu \leq n$, $\nu \leq n$ (тези неравенства са краен брой). Нека $K_{ns_n} \in L$ има и това свойство. Така получихме редицата $\{K_{ns_n}\}$, която свръхслабо клони към K . Това се вижда от неравенствата

$$|\Phi_{\mu\nu}(K_{ns_n} - K)| = |\Phi_{\mu\nu}(K_{ns_n} - K_n) + \Phi_{\mu\nu}(K_n - K)| \leq \frac{1}{n} + |\Phi_{\mu\nu}(K_n - K)|.$$

Тук ν и μ са произволни, но фиксирани и $n \geq \mu, n \geq \nu$. Но $P(K_{ns_n}) \leq A + \varepsilon$. Избираме подредица $\{K'_{ns_n}\}$, за която $\lim_{n \rightarrow \infty} P(K'_{ns_n})$ съществува. Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} P(K'_{ns_n}) \leq A + \varepsilon$ и следователно $P_1(K) \leq A + \varepsilon$. Понеже $\varepsilon > 0$ е произволно, заключаваме, че $P_1(K) \leq A$.

С това е доказано, че функционалът P_1 е норма на конуса L_1 . Ще покажем, че L_1 е компактен относно тази норма.

Нека

(7) $K'_1, K'_2, K'_3, \dots$ е ограничена по норма редица от елементи на L_1 . Ще покажем, че от нея може да се избере свръхслабосходяща подредица, чиято граница принадлежи на L_1 .

Действително, понеже $K'_n \in L_1$, може да се намери $K'_{ns_n} \in L$, за което $\Phi_{\mu\nu}(K'_{ns_n} - K'_n) \leq \frac{1}{n}$ при всяко $\nu \leq n, \mu \leq n$ и $P(K'_{ns_n}) \leq A+1$. От така получената редица $\{K'_{ns_n}\}$ от елементи на L може да се избере слабосходяща подредица, защото имаме

$$\int \int (K'_{ns_n}(x, t))^2 dx dt \quad (P(K'_{ns_n}))^2 \leq A+1,$$

а пък пространството L^2 е слабо компактно. Да означим тази подредица с $\{K_{ns_n}\}$, а нейната слаба граница с K . От $\Phi_{\mu\nu}(K_{ns_n}(x, t)) = \Phi_{\mu\nu}(K_{ns_n}(t, x))$ с граничен преход получаваме $K(x, t) = K(t, x)$. Позитивността на $K(x, t)$ се установява с граничен преход в неравенството

$$\int \int K_{ns_n}(x, t) p(x) p(t) dx dt \geq 0.$$

И така $K_1 \in L_1$. Като си припомним как избрахме $\{K'_{ns_n}\}$, виждаме, че на $\{K_{ns_n}\}$ отговаря подредица на (7). Тази подредица ще означим с $\{K_n\}$. Ще покажем, че $\{K_n\}$ свръхслабо клони към K . Наистина

$$\begin{aligned} |\Phi_{\mu\nu}(K_n - K)| &\leq |\Phi_{\mu\nu}(K_n - K_{ns_n})| + |\Phi_{\mu\nu}(K_{ns_n} - K)| \leq \frac{1}{n} \\ &\quad + |\Phi_{\mu\nu}(K_{ns_n} - K)| \end{aligned}$$

щом $n > \mu, n > \nu$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Взимаме $n > \mu + \nu$ толкова голямо, че $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\Phi_{\mu\nu}(K_n - K)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Така получаваме $|\Phi_{\mu\nu}(K_n - K)| < \varepsilon$.

С това компактността на L_1 относно P_1 е доказана.

Очевидно е, че $L \subset L_1$. Нещо повече, ако $K(x, t)$ е произволно измеримо симетрично ядро със сумируем квадрат, дефинирано почти навсякъде в J , то

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, s) K(s, t) ds \in L_1.$$

Наистина щом $K \in L^2$, може да се намери редица от непрекъснати симетрични ядра, която клони към K в средно квадратичен смисъл. Тогава редицата

$$\left\{ \int \int K_n^2(x, t) dx dt \right\}$$

е ограничена, защото е сходяща. Но

$$K_{2n}(x, t) = \int_a^b K_n(x, s) K_n(s, t) ds$$

е непрекъснато позитивно ядро и $\{K_{2n}(x, t)\}$ клони към $K_2(x, t)$ в средно квадратичен смисъл, следователно и свръхслабо. При това

$$P(K_{2n}) = \int_a^b K_{2n}(x, x) dx = \int_a^b \int_a^b K_n^2(x, s) dx ds \leq A.$$

По този начин доказваме, че $K_2(x, t) \in L_1$. Впрочем вярно е и обратното: всяко ядро, което $\in L_1$, допуска представяне

$$K(x, t) = \int_a^b K(x, s) R(s, t) ds,$$

където $R(s, t)$ е симетрична функция със сумируем квадрат, дефинирана почти навсякъде в Δ . Ние няма да се спираме на доказателството, което може да се извърши с помощта на теоремата на Мерсер [4].

Понеже L_1 е регулярен, компактен и съдържа елементи различни от нула, според една теорема на проф. Тагамлицки [1] в него сигурно има неразложими елементи.

Ще покажем, че всички неразложими елементи на L_1 имат вида $K(x, t) = u(x)u(t)$, където $u(x)$ е измерима функция със сумируем квадрат, дефинирана почти навсякъде в $[a, b]$, за която

$$\int_a^b u^2(x) dx \neq 0.$$

Нека $K \in L_1$ и $K \neq 0$. Разлагаме $K(x, t)$ по следния начин:

$$K(x, t) = (K(x, t) - K_1(x, t)) + K_1(x, t)$$

$$K_1(x, t) = \left(\int_a^b K(x, t) \psi(t) dt \right) \left(\int_a^b K(x, t) \psi(x) dx \right),$$

$\psi(x)$ е непрекъснатата функция, за която

$$0 < \int_a^b \int_a^b K(x, t) \psi(x) \psi(t) dx dt < 1.$$

Очевидно $K_1(x, t)$ е позитивно. Както по-рано се вижда, че $K(x, t) - K_1(x, t)$ е позитивно. За да можем да твърдим, че $K_1 \in L_1$ и $K - K_1 \in L_1$, трябва да покажем, че те могат да се апроксимират свръхслабо с ограничени по норма редици от ядра, принадлежащи на L .

Нека

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, t) \psi(t) dt$$

и $\{K_n\}$ е редица от елементи на L , която апроксимира K добре
Тогава $P(K_n) \leq A$ и

$$\begin{aligned} P(K_n - K_{1n}) &= \left| \int_a^b K_n(x, x) dx - \int_a^b \varphi_n^2(x) dx \right| \leq P(K_n) \\ &+ \int_a^b \varphi_n^2(x) dx \leq A + \int_A \int K_n^2(x, t) dx dt \int_a^b \psi^2(x) dx \leq A + A \int_a^b \psi^2(x) dx. \end{aligned}$$

Понеже

$$\int_A \int K_n^2(x, t) dx dt \leq (P(K_n))^2 \leq A^2,$$

от $\{K_n\}$ може да се избере слабосходяща подредица $\{K'_n\}$, която естествено пак клони към K . Но тогава

$$\int_A \int K'_n(x, t) \psi(x) \psi(t) dx dt \rightarrow \int_A \int K(x, t) \psi(x) \psi(t) dx dt < 1.$$

Следователно при n достатъчно голямо ще имаме

$$\int_A \int K'_n(x, t) \psi(x) \psi(t) dx dt < 1,$$

което е достатъчно, за да твърдим, че $K'_n - K'_{1n}$ е позитивно. Но K'_{1n} свръхслабо клони към K_1 . Действително

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu\nu}(K'_{1n}) &= \int_A \int K'_{1n}(x, t) \varphi_\nu(x) \varphi_\mu(t) dx dt = \left(\int_A \int K'_n(x, t) \psi(t) \varphi_\nu(x) dx dt \right) \\ &\times \left(\int_A \int K'_n(x, t) \psi(x) \varphi_\mu(t) dx dt \right), \end{aligned}$$

а пък

$$\begin{aligned} \int_A \int K'_n(x, t) \psi(t) \varphi_\nu(x) dx dt &\rightarrow \int_A \int K(x, t) \psi(t) \varphi_\nu(x) dx dt \\ &= \int_a^b \varphi_\nu(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

защото $K'_n \rightarrow K$ слабо. Аналогично

$$\int_A \int K'_n(x, t) \psi(x) \varphi_\mu(t) dx dt \rightarrow \int_a^b \varphi_\mu(t) \varphi(t) dt.$$

Значи $\Phi_{\mu\nu}(K'_{1n}) \rightarrow \Phi_{\mu\nu}(K_1)$. С това е доказано, че $K_1 \in L_1$, защото $K_{1n}(x, t)$ е непрекъснато. От

$\Phi_{\mu\nu}(K'_n - K'_{1n}) = \Phi_{\mu\nu}(K'_n) - \Phi_{\mu\nu}(K'_{1n}) \rightarrow \Phi_{\mu\nu}(K) - \Phi_{\mu\nu}(K_1) = \Phi_{\mu\nu}(K - K_1)$ по същия начин следва, че $K(x, t) - K_1(x, t) \in tL_1$.

Ще покажем, че разлагането $K(x, t) = [K(x, t) - K_1(x, t)] + K_1(x, t)$ е разлагане и по норма.

Дадено е, че $P(K'_n) \rightarrow P_1(K)$ (защото K_n клони към K слабо добре). От $\{K'_n\}$ избираме такава подредица, за която границите $\lim_{n \rightarrow \infty} (K'_n - K'_{1n})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} P(K'_{1n})$ съществуват. (Това е възможно, понеже $\{P(K'_n - K'_{1n})\}$ и $\{P(K'_n)\}$ са ограничени). За тези подредици запазваме същите означения. От дефиницията на P_1 е ясно, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(K'_n - K'_{1n}) \geq P_1(K - K_1) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} P(K'_{1n}) \geq P_1(K_1).$$

Като извършим граничен преход в равенството

$$P(K'_n) = P(K'_n - K'_{1n}) + P(K'_{1n}),$$

получаваме

$$P_1(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(K'_n - K'_{1n}) + \lim_{n \rightarrow \infty} P(K'_{1n}) \geq P_1(K - K_1) + P_1(K_1).$$

Но P_1 е изпъкнал, следователно $P_1(K) \leq P_1(K - K_1) + P_1(K_1)$. От тези неравенства следва $P_1(K) = P_1(K - K_1) + P_1(K_1)$.

С това е показано, че имаме разлагане и по норма.

Нека $K \in L_1$ е неразложим. Тогава имаме $\lambda K(x, t) = \varphi(x) \varphi(t)$ и $\lambda \neq 0$ (от $\lambda \neq 0$ следва $\varphi^2(x) \equiv 0$, което е невъзможно благодарение на избора на $\varphi(x)$). Така получихме $K(x, t) = \frac{1}{\lambda} \varphi(x) \varphi(t)$, което трябва да се докаже.

Нека $K \in L_1$ и $K'_1, K'_2, K'_3 \dots$ клони свръхслабо добре към K $K'_s \in L_1, P(K'_n) \leq A$. Съгласно една теорема на Банах и Сакс [3] може да се избере подредица $\{K'_n\}$, за която редицата на средните аритметични

$$\bar{K}_n(x, t) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n K'_\nu(x, t)$$

клони към $K(x, t)$ в средноквадратичен смисъл.

Като оставим $n \rightarrow \infty$ в неравенството $\int_A \int K_n^2(x, t) dx dt$

$\leq (P(\bar{K}_n))^2$, получаваме $\int_A \int K^2(x, t) dx dt \leq (P_1(K))^2$. Този резултат

показва, че от всяка ограничена по норма P_1 редица от елементи на L_1 може да се избере слабосходяща подредица, чиято граница принадлежи на L_1 .

Ще докажем следната теорема:

Всяко ядро $K \in L_1$ може да се апроксимира в средно квадратичен смисъл с ограничена по норма редица от непрекъснати изродени симетрични позитивни ядра.

Доказателство. Да означим с L^* конуса на тези ядра от L_1 , за които теоремата е вярна. Очевидно L^* е изпъкнал. Ще покажем, че L^* е затворен относно свръхслабата сходимост и нормата P_1 . Нека

$$(8) \quad K'_1, K'_2, K'_3, \dots$$

клони свръхслабо към K . $K'_n \in L^*$, $P_1(K'_n) \leq A$. Ще покажем, че и $K \in L^*$. От (8) избираме слабосходяща подредица $K_1, K_2, K_3, \dots \rightarrow K$. На всяко ядро съпоставяме изродено позитивно непрекъснато симетрично ядро K_{ns_n} , за което $\int \int (K_n(x, t) - K_{ns_n}(x, t))^2 dx dt \leq \frac{1}{n^2}$. Ще покажем, че $K_{ns_n}(x, t)$ клони слабо към $K(x, t)$.

Нека $P(x, t) \in L^2$ е измерима функция, дефинирана почти навсякъде в A . Имаме

$$\begin{aligned} & \left| \int \int_A P(x, t) [K_{ns_n}(x, t) - K(x, t)] dx dt \right| \\ & \leq \left| \int \int_A P(x, t) [K_{ns_n}(x, t) - K_n(x, t)] dx dt \right| \\ & + \left| \int \int_A P(x, t) [K_n(x, t) - K(x, t)] dx dt \right|. \end{aligned}$$

Знаем, че

$$\int \int_A P(x, t) [K_n(x, t) - K(x, t)] dx dt \rightarrow 0.$$

От друга страна

$$\int \int_A P(x, t) (K_{ns_n}(x, t) - K_n(x, t)) dx dt)^2 \leq \frac{1}{n^2} \int \int_A P^2(x, t) dx dt.$$

С това е доказано, че $\{K_{ns_n}\}$ слабо клони към K . С помощта на цитираната теорема на Банах и Сакс избираме подредица от $\{K_{ns_n}\}$, за която редицата на средноаритметичните (които са изродени симетрични и непрекъснати позитивни ядра) клони към K в средноквадратичен смисъл.

И така, L^* е затворен.

Нека $u(x)u(t)$ е неразложим елемент на L_1 . Избираме редица от непрекъснати функции $u_1(x), u_2(x), \dots$, която клони към $u(x)$ в средноквадратичен смисъл. Тогава $u_n(x)u_n(t) \rightarrow u(x)u(t)$ в средноквадратичен смисъл и $P(u_n(x)u_n(t)) = \int_a^b u_n^2(x) dx \leq A$, защото е сходяща. Значи $u(x)u(t) \in L^*$. С помощта на теоремата за конусите [1] заключаваме, че $L_1 = L^*$ к. т. д. д.

Ще отбележим, че всяко симетрично позитивно ядро от L^2 може да се апроксимира в средноквадратичен смисъл с непрекъснати изродени симетрични позитивни ядра.

Действително, да си образуваме редицата

$$S_n(x, t) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n C_{\mu v} \varphi_v(x) \varphi_\mu(t), \quad C_{\mu v} = \int_A \int K(x, t) \varphi_v(x) \varphi_\mu(t) dx dt.$$

Тази редица е сходяща в средноквадратичен смисъл, както веднага се вижда с помощта на неравенството на Бесел $\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n C_{\mu v}^2$

$\leq \int_A \int K^2(x, t) dx dt$. Средноквадратичната граница на S_n да означим с $K^x(x, t)$. $K^x(x, t) \in L^2$. От равенствата $\Phi_{\mu v}(K) = \Phi_{\mu v}(K^*)$, които се установяват лесно, заключаваме, че $K(x, t) = K^*(x, t)$.

Ще покажем, че ядрата S_n са позитивни. Нека $p(x)$ е произволна измерима функция от L^2 , дефинирана почти навсякъде в Δ . Имаме

$$\begin{aligned} & \int_A \int S_n(x, t) p(x) p(t) dx dt \\ &= \int_A \int \left(\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n C_{\mu v} \varphi_\mu(t) \varphi_v(x) \right) p(x) p(t) dx dt \\ &= \int_A \int \left[\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n \left(\int_A \int K(u, v) \varphi_v(u) \varphi_\mu(v) du dv \right) \varphi_v(x) \varphi_\mu(t) \right] p(x) p(t) dx dt \\ &= \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n \int_A \int \int \int K(u, v) \varphi_v(u) \varphi_\mu(v) \varphi_\mu(t) \varphi_v(x) du dv dx dt \\ &= \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n \int_A \int K(u, v) \varphi_v(u) \varphi_\mu(v) \left(\int_a^b p(x) \varphi_v(x) dx \right) \\ & \quad \times \left(\int_a^b p(t) \varphi_\mu(t) dt \right) du dv. \end{aligned}$$

Като въведем означенията

$$C_\mu = \int_a^b p(x) \varphi_\mu(x) dx$$

и

$$\sum_{v=1}^n c_v \varphi_v(u) = \psi(u)$$

и забележим, че

$$\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_\mu c_v \varphi_v(u) \varphi_\mu(v) = \psi(u) \psi(v),$$

получаваме

$$\begin{aligned} & \int_A \int_A S_n(x, t) p(x) p(t) dx dt \\ &= \int_A \int_A K(u, v) \left[\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_\mu c_\nu \varphi_\nu(u) \varphi_\mu(v) \right] dudv \\ &= \int_A \int_A K(u, v) \psi(u) \psi(v) dudv \geq 0, \end{aligned}$$

защото $K(x, t)$ е позитивно.

Ще припомним, че сега не предполагахме, че $K \in L_1$, но доказахме по-малкото — не е ясно кога редицата $S_n(x, t)$ е ограничена по норма. Впрочем от това, което следва по-нататък, ще стане ясно, че $S_n(x, t)$ е ограничена по норма тогава и само тогава, когато $K \in L_1$.

Ще докажем следната теорема:

Нека $K(x, t)$ е симетрично позитивно ядро със сумируем квадрат. За да принадлежи $K(x, t)$ на L_1 , е необходимо и достатъчно редът

$$(9) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_A \int_A K(x, t) \psi_\nu(x) \psi_\nu(t) dx dt$$

да е сходящ. Тук $\{\psi_\nu(x)\}$ е произволна ортогонална нормирана система от функции със сумируем квадрат, дефинирани почти навсякъде в $[a, b]$.

Доказателство. Нека $K(x, t)$ е изродено непрекъснато позитивно ядро. Тогава

$$K(x, t) = \sum_{s=1}^n \frac{\theta_s(x) \theta_s(t)}{\lambda_s},$$

където λ_s и $\theta_s(x)$ са собствените значения и собствените функции на $K(x, t)$. При това системата $\{\theta_s(x)\}$ е ортогонална и нормирана. Имаме

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_A \int_A K(x, t) \psi_\nu(x) \psi_\nu(t) dx dt &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{s=1}^n \frac{1}{\lambda_s} \left(\int_a^b \theta_s(x) \psi_\nu(x) dx \right)^2 \right] \\ &= \sum_{s=1}^n \frac{1}{\lambda_s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_a^b \theta_s(x) \psi_\nu(x) dx \right)^2 = \sum_{s=1}^n \frac{1}{\lambda_s} \int_a^b \theta_s^2(x) dx = \int_a^b K(x, x) dx. \end{aligned}$$

Нека $K(x, t) \in L_1$. Съгласно доказаното, можем да апроксимираме $K(x, t)$ в средноквадратичен смисъл с ограничена по норма редица от изродени непрекъснати позитивни ядра. Нека $K_n(x, t) \rightarrow K(x, t)$

в средноквадратичен смисъл. $\int_a^b K_n(x, x) dx \leq A$. (За нашите цели е достатъчно, че можем да апроксимираме K слабо.) Имаме

$$\sum_{v=1}^p \int_A \int K_n(x, t) \psi_v(x) \psi_v(t) dx dt \leq \int_a^b K_n(x, x) dx \leq A.$$

Като оставим $n \rightarrow \infty$, получаваме

$$\sum_{v=1}^p \int_A \int K(x, t) \psi_v(x) \psi_v(t) dx dt \leq A.$$

Понеже p е произволно, оттук следва сходимостта на реда (9), който е с неотрицателни членове.

Остана да докажем, че ако $K(x, t)$ е позитивно симетрично ядро със сумируем квадрат, за което

$$\sum_{v=1}^{\infty} \int_A \int K(x, t) \psi_v(x) \psi_v(t) dx dt < \infty,$$

то $K \in L_1$. Нека $\{q_v(x)\}$ е произволна ортогонална нормирана и пълна система от непрекъснати функции, дефинирани в $[a, b]$. Като положим $c_{\mu v} = \int_A \int K(x, t) q_{\mu}(x) q_v(t) dx dt$, имаме $c_{\mu v}^2 \leq c_{vv} c_{\mu\mu}$, защото $K(x, t)$ е позитивно. Тогава, както вече имаме случай да отбележим, редицата

$$S_n(x, t) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^n c_{\mu v} q_v(x) q_v(t)$$

клони към $K(x, t)$ в средноквадратичен смисъл, при това $S_n(x, t)$ са непрекъснати и позитивни. Но

$$\int_a^b S_n(x, x) dx = \sum_{v=1}^n c_{vv} \leq \sum_{v=1}^{\infty} c_{vv}.$$

Следователно $K(x, t) \in L_1$.

С това теоремата е доказана.

Ще покажем, че линейният функционал

$$Q(K) = \sum_{v=1}^{\infty} \int_A \int K(x, t) \varphi_v(x) \varphi_v(t) dx dt,$$

дефиниран в L_1 , е норма, относно която L_1 е компактен. Тук $\{\varphi_v\}$ е системата, с помощта на която дефинирахме координатната система.

Очевидно $Q(K) \geq 0$. Нека $Q(K) = 0$. Понеже $K(x, t)$ е позитивно, $\Phi_{vv}(K) = 0$, $v = 1, 2, 3, \dots$ и от $(\Phi_{\mu v}(K))^2 \leq \Phi_{vv}(K) \Phi_{\mu\mu}(K)$ следва, че $K = 0$. Ще покажем, че $Q(K)$ е полунепрекъснатата отдолу. Нека $K_1, K_2, K_3, \dots \rightarrow K$ свърхслабо. $K_n \in L_1$, $K \in L_1$, $Q(K_n) \leq A$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Стига p да е достатъчно голямо,

$$Q(K) \leq \sum_{v=1}^p \int_A \int K(x, t) \varphi_v(x) \varphi_v(t) dx dt + \varepsilon.$$

Но

$$\sum_{v=1}^p \int_A \int K_n(x, t) \varphi_v(x) \varphi_v(t) dx dt \leq A.$$

Като оставим $n \rightarrow \infty$, получаваме

$$\sum_{v=1}^p \int_A \int K(x, t) \varphi_v(x) \varphi_v(t) dx dt \leq A \text{ или } Q(K) \leq A + \varepsilon.$$

Понеже $\varepsilon > 0$ е произволно, то $Q(K) \leq A$.

С това е показано, че $Q(K)$ е норма.

Ще докажем, че L_1 е компактен относно $Q(K)$.

Нека е дадена редицата $K'_1, K'_2, \dots, K'_n, \dots$; $K'_n \in L_1, Q(K'_n) \leq A$.

Имаме

$$(10) \quad (\Phi_{\mu v}(K'_n))^2 \leq \Phi_{vv}(K'_n) \Phi_{\mu\mu}(K'_n).$$

С помощта на Канторовия диагонален процес избираме подредица $\{K_n\}$, за която $\{\Phi_{\mu v}(K_n)\}$ са сходящи при $v = 1, 2, \dots, \mu = 1, 2, \dots$. Означаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{\mu v}(K_n) = c_{\mu v}.$$

От (10) получаваме $c_{\mu v}^2 \leq c_{vv} c_{\mu\mu}$. Очевидно $c_{\mu v} = c_{v\mu}$. Ще покажем,

че $\sum_{v=1}^{\infty} c_{vv} < \infty$.

Наистина $\sum_{v=1}^p \Phi_{vv}(K_n) \leq A$. Нека $n \rightarrow \infty$. Получаваме $\sum_{v=1}^p c_{vv} \leq A$. По-

неже p е произволно и $c_{vv} \geq 0$, оттук следва, че редът $\sum_{v=1}^{\infty} c_{vv}$ е сходящ. Тогава и

$$(12) \quad \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu v}^2$$

е сходящ. Да положим

$$S_q(x, t) = \sum_{v=1}^q \sum_{\mu=1}^q c_{\mu v} \psi_v(x) \psi_{\mu}(t).$$

От (12) следва, че $\{S_q(x, t)\}$ е сходяща в средноквадратичен смисъл. Ще покажем, че $S_q(x, t)$ е позитивно. Да означим $\Phi_{\mu v}(K_n)$ с $c_{\mu v}^{(n)}$ и да въведем ядрото

$$S_q^{(n)}(x, t) = \sum_{v=1}^q \sum_{\mu=1}^q c_{\mu v}^{(n)} \varphi_v(x) \varphi_{\mu}(t).$$

Понеже $K_n(x, t)$ е позитивно, съгласно доказаното по-рано и $S_q^{(n)}$ е позитивно, т. е.

$$\int_A \int S_q^{(n)}(x, t) p(x) p(t) dx dt \geq 0.$$

Като оставим $n \rightarrow \infty$, получаваме

$$\int_A \int S_q(x, t) p(x) p(t) dx dt \geq 0.$$

Нека $K(x, t)$ е средноквадратичната граница на $S_q(x, t)$. От позитивността на S_q следва, че $K(x, t)$ е позитивно. За да се убедим, че $K \in L_1$, остава да покажем, че $K(x, t)$ може да се апроксимира свръхслабо с ограничена по норма редица от ядра, принадлежащи на L . Обаче $\{S_q(x, t)\}$ има това свойство. Наистина

$$\int_a^b S_q(x, x) dx = \sum_{v=1}^n c_{vv} < \sum_{v=1}^{\infty} c_{vv}.$$

(Припомняме, че $S_q(x, t)$ са непрекъснати, защото $\psi_v(x)$ са непрекъснати).

С това компактността на L_1 относно $Q(K)$ е доказана.

Като вземем предвид, че $S_n(x, t) \rightarrow K(x, t)$ в средноквадратичен смисъл и $\int_a^b S_n(x, x) dx \rightarrow Q(K)$, заключаваме, че $P_1(K) \leq Q(K)$

Ще покажем, че $P_1(K) = Q(K)$. За това е достатъчно да докажем неравенството

$$(13) \quad Q(K) \leq P_1(K).$$

Проверяваме (13) за неразложимите елементи на L_1 . Имаме

$$Q(u(x)u(t)) = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\int_a^b u(x) \varphi_v(x) dx \right)^2 = \int_a^b u^2(x) dx$$

(системата $\{\varphi_v(x)\}$ е пълна). От друга страна неравенството

$$\left(\int_A \int K^2(x, t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq P_1(K)$$

ни дава

$$\left(\int_A \int u^2(x) u^2(t) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq P_1[u(x)u(t)], \text{ т. е. } Q(u(x)u(t)) \leq P_1(u(x)u(t))$$

Оттук с помощта на теоремата за конусите заключаваме, че $Q(K) = P_1(K)$ и следователно $P_1(K) = Q(K)$.

От това равенство се вижда, че нормата P_1 е линейна. Понеже P_1 не зависи от системата $\{\varphi_v\}$ (защото можехме при дефиницията на P_1 вместо със свръхслабосходящи да си служим със слабосходящи редици), заключаваме, че сумата на реда

$$\sum_{v=1}^{\infty} \int_A \int K(x, t) \varphi_v(x) \varphi_v(t) dx dt$$

не зависи от $\{\varphi_v\}$, т. е.

$$\sum_{v=1}^{\infty} \int_A \int K(x, t) \varphi_v(x) \varphi_v(t) dx dt = \sum_{v=1}^{\infty} \int_A \int K(x, t) q_v(x) q_v(t) dx dt,$$

каквато и да бъде ортогоналната нормирана и пълна система от непрекъснати функции $\{q_v(x)\}$.

Впрочем вижда се, че дори $\{q_v(x)\}$ да е от функции със сумируем квадрат, стига да е ортогонална нормирана и пълна, остава в сила равенството

$$\sum_{v=1}^{\infty} \int_A \int K(x, t) q_v(x) q_v(t) dx dt = P_1(K).$$

* * *

Тази работа бе изработена в кръжока по диференциално и интегрално смятане при Софийския университет.

Благодаря на научния ръководител на кръжока проф. д-р Я. Тагамлицки за оказаната помощ и внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Тагамлицки. Върху едно обобщение на понятието неразложимост, год. на Соф. у-т, том 48, 1953/54 г., кн. 1, част I, стр. 69—85.
2. Я. Тагамлицки. Допълване на конуси и приложение към проблемата за обобщението на понятието функция, год. на Соф. у-т, том 49.
3. S. Banach, S. Saks. Sur la convergence forte dans les espaces L^p Studia Math., 2 (1930) 51—57.
4. T. Mercer. Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. Trans. London Phil. Soc. (A) 209 (1909) 415—446.

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ ВЕКТОРАХ НЕКОТОРЫХ КОНУСОВ

Т. Генчев

РЕЗЮМЕ

Пусть L_1 множество всех симметрических, непрерывных, положительно определенных ядер, заданных в квадрате $\Delta: a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$.

В настоящей работе рассматривается конус L_1 положительно определенных, симметрических, измеримых ядер суммируемых с квадратом, заданных почти везде в Δ , которые могут быть аппроксимированы относительно некоторой координатной системы, ограниченной по норме последовательностью ядер из L_1 .

При этом автор широко пользуется работами Я. Тагамлицкого. Доказываются следующие теоремы:

1. Для того, чтобы ядро $K(x, t) \in L_1$ было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было представимо в форме $K(x, t) = \varphi(x) \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ измеримая, суммируемая с квадратом функция.

2. Каждое ядро из L_1 можно аппроксимировать в среднем ограниченной по норме последовательностью вырожденных ядер из L_1 .

3. Пусть $K(x, t)$ симметрическое, положительно определенное ядро, суммируемое с квадратом. Для того, чтобы $K(x, t) \in L_1$ необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \int_{\Delta} \int_{\Delta} K(x, t) \psi_v(x) \psi_v(t) dx dt$$

сходиллся, где $\{\psi_v(x)\}$ произвольная ортонормальная система. (Функций $\psi_v(x)$ суммируемые с квадратом).

4. Пусть $\{\tau_v(x)\}$ полная ортонормальная система функций, непрерывных в $[a, b]$. Если $K \in L_1$, то выполнено равенство

$$(a) \quad P_1(K) = \sum_{v=1}^{\infty} \int_{\Delta} \int_{\Delta} K(x, t) \tau_v(x) \tau_v(t) dx dt,$$

из которого следует, что сумма ряда (a) от $\{\tau_v(x)\}$ не зависит.

ÜBER DIE UNZERLEGbaren VEKTOREN GEWISSER KEGEL

T. Gentschev

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wird der Kegel der positiven symmetrischen meßbaren Kerne mit summierbarem Quadrat studiert, die sich durch eine hyperschwach konvergente, der Norm nach beschränkte Folge von stetigen Kernen approximieren läßt. Es sei besonders erwähnt, daß die Arbeiten von J. Tagamlizki [1], [2] bei diesen Untersuchungen von besonderer Bedeutung waren.

Vor allem wird der Kegel L der symmetrischen stetigen Kerne studiert die im Quadrat $\Delta: a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$ definiert sind. Dabei wird als Koordinatensystem die Folge der linearen Funktionale $F_{\mu\nu}(K) = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \varphi_\nu(x) \varphi_\mu(t) dx dt$ $\mu=1, 2, \dots; \nu=1, 2, \dots$ angenommen, in der $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots$ ein vollständiges, orthogonales und normiertes System von in $[a, b]$ stetigen Funktionen ist. Als Norm wird das lineare Funktional $P(K) = \int_a^b K(x, x) dx$ verwendet.

Der Kegel L ist in bezug auf die Norm $P(K)$ nicht kompakt, hat aber unzerlegbare Vektoren. Genauer wird folgendes Theorem bewiesen:

Der Kern $K \in L$ ist unzerlegbar dann und nur dann, wenn er die Form $K(x, t) = \varphi(x) \varphi(t)$ hat, in der $\varphi(x)$ eine stetige, in $[a, b]$ definierte Funktion ist.

Weiter wird ein neuer Kegel L_1 gebildet, indem ein positiver symmetrischer meßbarer Kern K mit summierbarem Quadrat dann und nur dann zu L_1 zugerechnet wird, wenn er durch eine hyperschwach konvergente, der Norm nach beschränkte Folge von Kernen $K_n \in L$ approximiert werden kann.

In L_1 wird dasselbe Koordinatensystem, wie in L angenommen. Wird mit $S(K)$, die Menge aller hyperschwach konvergenten Folgen bezeichnet, die den Grenzwert K haben und für die die Grenze $\lim_{n \rightarrow \infty} P(K_n)$ existiert, so ist $P_1(K) = \inf [\lim_{n \rightarrow \infty} P(K_n)]$ eine Norm und L_1 kompakt in bezug auf $P_1(K)$, $\{K_n\} \in S(K)$.

Es wird bewiesen, daß die unzerlegbaren Elemente von L_1 die Form $\varphi(x)\varphi(t)$ haben, wobei $\varphi(x)$ eine meßbare Funktion, mit summierbarem Quadrat ist.

Es werden noch folgende Theoreme bewiesen:

1. Jeder Kern von L_1 kann durch eine im Mittel konvergente Folge von stetigen ausgearteten symmetrischen positiven, der Norm nach beschränkten Kernen approximiert werden.

2. K sei ein symmetrischer positiver meßbarer Kern, dessen Quadrat summierbar ist. K gehört zu L_1 dann und nur dann, wenn

$$\sum_{v=1}^{\infty} \int \int K(x, t) \psi_v(x) \psi_v(t) dx dt$$

konvergiert, wobei das orthogonale und normierte System $\{\psi_v(x)\}$ beliebig ist.

3. Ist $\{\tau_v(x)\}$ ein vollständiges, orthogonales und normiertes System von stetigen Funktionen, so ist die Gleichung

$$(a) \quad P_1(K) = \sum_{v=1}^{\infty} \int \int K(x, t) \tau_v(x) \tau_v(t) dx dt$$

erfüllt.

Aus (a) folgt, daß $P_1(k)$ eine lineare Norm ist und die Summe der Reihe (a) nicht von der Wahl des orthogonalen normierten und vollständigen Systems abhängt.