ВЪРХУ ДИОФАНТОВИТЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ЛИНЕЙНИ ФОРМИ

Н. Обрешков

Нека ω е произволно положително число и t е също произволно положително число ≥ 1. По една класическа теорема на Дирихле съществува цяло положително число x, не надминаващо t, и цяло число y, за които имаме

$$(1) \qquad |\omega x - y| < \frac{1}{t}.$$

На тази теорема дадох по-точната формулировка:

Нека ω е произволно положително число и n е произволно естествено число. Тогава съществуват цели числа x и y, за които имаме

$$(2) \qquad \begin{gathered} |\omega x - y| \leq \frac{1}{n+1} \\ 1 \leq x \leq n. \end{gathered}$$

Знак на равенство в (2) се постига само когато ω е равно на $d(n+1)$, където d е произволно цяло положително число, взаимно просто с $n+1$.

Ако въведем ограничения за x и y, доказахме следната теорема, прецизираща също една теорема на Дирихле.

Нека ω е произволно положително число и n е произволно естествено число. Тогава съществуват цели числа x и y, за които имаме

$$(3) \qquad |\omega x - y| \leq \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}.$$

Знак на равенство в (3) се постига само при $\omega = n+1$ и $\omega = \frac{1}{n+1}$. Разбира се, в горните теореми числото ω може и да е отрицателно, но ние без ограничение се ограничихме за опростяване на изложението на положителни числа ω.

В настоящата работа установяваме, че подобно точно неравенство може да се установи и за ограничението $0 < x+y < n, x, y \geq 0$, за числата x и y, като предполагаме, че числото ω не надминава дадено число a.

Доказваме следната теорема:

Нека a е произволно естествено число и n е също произволно естествено число $> a$. Тогава за всяко реално число ω, удовлетворяващо условията $0<\omega\leq a$, съществуват поне две цели неотрицателни числа x, y, за които имаме

$$(4) \qquad |\omega x-y|\leq\frac{1}{\left[\frac{n-a}{a+1}\right]+2}$$

$$0<x+y\leq n.$$

При това знакът равенство в (4) се достига.

Могат да се намерят всички числа ω, за които в (4) имаме знак на равенство. Например за $a=1$ знак на равенство в (4) имаме ри n четно, $n=2m$, само за числото $\omega=\frac{m}{m+1}$ и при n нечетно, $n=2m+1$, само за числото $\omega=\frac{m+1}{m+2}$ при m четно и за числата $\omega=$ $=\frac{m}{m+2}$, $\omega=\frac{m+1}{m+2}$ при m нечетно.

При доказателството използуваме специални редици на Фарей. Посредством друг метод, въведен от нас в предидущи работи, установяваме и следната теорема:

Нека p и d са произволни естествени числа, $1\leq d\leq p$ и n е произволно естествено число, кратно на $\frac{d}{(p, d)}$. Нека $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ са произволни реални числа. Тогава съществуват p цели неотрицателни числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$, поне d от които са отлични от нула, и цяло число y, за които са изпълнени неравенствата

$$(5) \qquad \omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\ldots+\omega_p x_p-y\,|\leq\frac{1}{\frac{np}{d}+1},$$

$$x_s\leq n, \quad s=1, 2, \ldots, p.$$

Знакът на равенство в (5) се достига, т. е. неравенството (5) е точно.

I. Нека ω е произволно реално число, съдържащо се между нула и единица, и n е произволно естествено число $n\neq 1$. Тогава съществуват цели неотрицателни числа x и y, подчинени на условието $0<x+y\leq n$, за които имаме

$$(1) \qquad |\omega x-y|\leq\frac{1}{\left[\frac{n-1}{2}\right]+2}.$$

Знак на равенство в (1) се достига при n четно, $n=2m$ само за числото $\omega=\frac{m}{m+1}$ и при n нечетно, $n=2m+1$, само за числото $\omega=\frac{m+1}{m+2}$ при m четно и за числата $\omega=\frac{m}{m+2}$, $\omega=\frac{m+1}{m+2}$ при m нечетно.

Доказателство. Да образуваме редицата от рационални числа $\frac{p}{q}$, за които $p, q \geq 0, p+q \leq n$ и най-малкото от които е $\frac{0}{1}$, а най-голямото $\frac{1}{1}$, като предполагаме, че сме ги наредили по растяща големина (специална редица на Фарей). Да разгледаме отначало случая, когато n е четно число, $n=2m$ (m цяло число). Нека $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ са две произволни последователни числа от въпросната редица. Ще разгледаме няколко случая. Нека

$$q+q_1 \geqq m+2$$

и да разгледаме редицата от трите последователни числа

$$\frac{p}{q}, \frac{p+p_1}{q+q_1}, \frac{p_1}{q_1}. \tag{2}$$

Нека

$$\frac{p}{q} \leqq \omega \leqq \frac{p+p_1}{q+q_1}. \tag{3}$$

Тогава ще имаме

$$\left|\omega-\frac{p}{q}\right| \leq \frac{p+p_1}{q+q_1}-\frac{p}{q}=\frac{1}{q(q+q_1)}<\frac{1}{q(m+1)}, \tag{4}$$

понеже, както е известно, $p_1 q - p q_1 = 1$. От (4) получаваме

$$|q\omega-p|<\frac{1}{m+1},$$

т. е. неравенството (1) се удовлетворява с $x=q$, $y=p$ и $x+y \leqq n$. Нека сега $q+q_1 \leqq m+1$, като $\frac{p_1}{q_1}$ не е последното число $\frac{1}{1}$ от редицата на Фарей. Тогава очевидно $p \leqq q-1$, $p_1 \leqq q_1-1$ и ще имаме

$$p+q+p_1+q_1 \leqq 2(q+q_1)-2 \leqq 2m+2-2=n,$$

т. е. числото $\frac{p+p_1}{q+q_1}$ принадлежи на редицата на Фарей и числата $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ не ще бъдат последователни членове на тази редица. Случаят, когато

$$\frac{p+p_1}{q+q_1} \leq \omega \leq \frac{p_1}{q_1}$$

се третира напълно аналогично на случая (3).

Остава да се разгледа случаят, когато дробта $\frac{p_1}{q_1}$ е равна на последния член $\frac{1}{1}$ на редицата на Фарей. Предпоследният член на същата редица е равен на $\frac{m-1}{m}$ и съответната редица (2) е

$$\frac{m-1}{m}, \frac{m}{m+1}, \frac{1}{1}.$$

Ако

$$\frac{m-1}{m} \leqq \omega < \frac{m}{m+1},$$

то имаме

$$\left| \omega - \frac{m-1}{m} \right| < \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m(m+1)}, \; |m\omega - (m-1)| < \frac{1}{m+1}$$

и ако

$$\frac{m}{m+1} < \omega \leqq 1,$$

то имаме

$$|\omega - 1| < \frac{1}{m+1}.$$

Ако $\omega = \frac{m}{m+1}$, то

$$|\omega - 1| = \frac{1}{m+1}$$

и (1) е изпълнено със знак на равенство. Действително да допуснем, че има числа x и y, удовлетворяващи на условията в теоремата, за които имаме

$$\left| \frac{m}{m+1} x - y \right| < \frac{1}{m+1}.$$

Оттук получаваме

$$|mx - (m+1)y| < 1,$$

т. е.

$$mx - (m+1)y = 0.$$

Понеже числата m и $m+1$ са взаимно прости, то от

$$y = \frac{m}{m+1} x$$

следва, че $x = \lambda(m+1)$, $y = \lambda m$, където λ е цяло положително число. Но тогава ще имаме

$$x + y = 2\lambda m + \lambda > n,$$

което противоречи на условието $x + y \leqq n$.

Нека сега n е нечетно число, $n = 2m+1$, m естествено число. Да разгледаме редицата от трите числа (2). Нека

$$q + q_1 \geqq m + 3.$$

Ако

$$\frac{p}{q} \leqq \omega \leqq \frac{p+p_1}{q+q_1},$$

то имаме

$$|q\omega - p| \leqq \frac{1}{m+3} < \frac{1}{m+2}$$

и ако

$$\frac{p+p_1}{q+q_1} < \omega \leqq \frac{p_1}{q_1},$$

то имаме аналогично

$$|q_1\omega - p_1| \leqq \frac{1}{m+3} < \frac{1}{m+2}.$$

Следователно неравенството (1) на този случай е установено със знак на неравенство.

Нека сега

$$q+q_1 \leqq m+1.$$

Тогава очевидно ще имаме

$$p+p_1 \leqq m$$

и числото $\frac{p+p_1}{q+q_1}$ ще бъде член на редицата на Фарей, понеже

$$p+p_1+q+q_1 \leqq 2m+1 = n.$$

Остава случаят, когато

$$q+q_1 = m+2.$$

Ако

$$p+p_1 \leqq m-1,$$

то $p+p_1+q+q_1 \leqq 2m+1$ и дробта $\frac{p+p_1}{q+q_1}$ е член на редицата на Фарей. Следователно ще имаме $p+p_1 = m$, $m+1$. Да разгледаме отначало случая, когато $\frac{p_1}{q_1}$ не е последният член $\frac{1}{1}$ на редицата на Фарей. Тогава ще имаме

$$p \leqq q-1, \ p_1 \leqq q_1 - 1$$

и следователно $p = q-1$, $p_1 = q_1 - 1$. Понеже

$$p+p_1+q+q_1 = 2m+2 > n,$$

то действително $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ ще са последователни членове на редицата на Фарей. Но имаме познатата релация

$$p_1 q - p q_1 = 1.$$

Като заместим тук p_1 с $m-p$, q с $p+1$ и q_1 с $1+p_1 = 1+m-p$, получаваме равенството

$$m - 2p = 1,$$

от което имаме

$$p=\frac{m-1}{2}.$$

Следователно m трябва да е нечетно число, $m=1+2k$ и ще имаме

$$p=k,\ q=k+1,$$

$$p_1=2k+1-k=k+1,\ q_1=k+2.$$

Редицата (2) се свежда на следната

$$\frac{k}{k+1},\ \frac{m}{m+2},\ \frac{k+1}{k+2}.$$

Ако

$$\frac{k}{k+1}\leq\omega<\frac{m}{m+2},$$

то имаме

$$\omega-\frac{k}{k+1}<\frac{m}{m+2}-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{(k+1)(m+2)}$$

и следователно

$$|(k+1)\omega-k|<\frac{1}{m+2}.$$

Неравенството (1) е изпълнено при приетите условия в теоремата. Ако

$$\frac{m}{m+2}<\omega\leq\frac{k+1}{k+2},$$

то получаваме

$$\frac{k+1}{k+2}-\omega<\frac{k+1}{k+2}-\frac{m}{m+2}=\frac{1}{(k+2)(m+2)},$$

т. е.

$$|(k+2)\omega-(k+1)|<\frac{1}{m+2}.$$

При $\omega=\dfrac{m}{m+2}$ имаме

$$\omega-\frac{k}{k+1}=\frac{m}{m+2}-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{(k+1)(m+2)},$$

откъдето получаваме

$$|(k+1)\omega-k|=\frac{1}{m+2},$$

т. е. (1) е изпълнено със знак на равенство. Да предположим, че има поне две цели числа x и y, които са неотрицателни и удовлетворяват на условията

(5) $$|\omega x-y|<\frac{1}{m+2},\ \omega=\frac{m}{m+2},$$

(6) $$0<x+y\leq n.$$

От неравенството (5) се убеждаваме както преди, че ще трябва да съществува равенството

$$mx=(m+2)y,$$

от което следва, че

$$x=\lambda(m+2),$$

(7) $$y=\lambda m,$$

където λ е цяло положително число. Но условието (6) не се удовлетворява, понеже от (7) имаме

$$x+y=2\lambda m+2\lambda>n.$$

Остава да разгледаме случая, когато $\frac{p_1}{q_1}$ е последният член $\frac{1}{1}$ на редицата на Фарей. Предпоследният член на същата редица е $\frac{m}{m+1}$ и ще трябва да разгледаме редицата

$$\frac{m}{m+1},\ \frac{m+1}{m+2},\ \frac{1}{1}.$$

За $\frac{m}{m+1}\leq\omega<\frac{m+1}{m+2}$ получаваме

$$\omega-\frac{m}{m+1}<\frac{m+1}{m+2}-\frac{m}{m+1}=\frac{1}{(m+1)(m+2)},$$

т. е.

$$|(m+1)\omega-m|<\frac{1}{m+2}$$

и за $\frac{m+1}{m+2}<\omega\leq\frac{1}{1}$ получаваме

$$|\omega-1|<\frac{1}{m+2}.$$

Следователно (1) се удовлетворява със знак на неравенство. При $\omega=\frac{m+1}{m+2}$ имаме

$$|\omega-1|=\frac{1}{m+2}$$

и както преди се убеждаваме лесно, че не съществуват цели неотрицателни числа x и y, удовлетворяващи на условията

$$\left|\frac{m+1}{m+2}x-y\right|<\frac{1}{m+2},\ 0<x+y\leqq n.$$

С това доказателството на теоремата се приключва.

Ще установим и по-общата теорема:

II. Нека a е произволно естествено число и n е също произволно естествено число $>a$. Тогава за всяко реално число ω, удовлетворяващо на условието $0<\omega\leq a$, съществуват две цели неотрицателни числа x, y, за които имаме

(8) $$|\omega x-y|\leq\frac{1}{\left[\frac{n-a}{a+1}\right]+2}$$

$$0<x+y\leq n.$$

При това знакът равенство в (8) се достига, т. е. (8) е точно неравенство.

Разделяме n с $a+1$

(9) $$n=(a+1)m+r.$$

Тук r ще е едно от числата $0, 1, 2, \ldots, a$. Да означим с δ дясната част на (8). От (9) имаме

$$\frac{n-a}{a+1}=m+\frac{r-a}{a+1}.$$

Следователно за $r=0, 1, \ldots, a-1$ ще имаме

$$\delta=\frac{1}{m+1},$$

и за $r=a$ имаме

$$\delta=\frac{1}{m+2}.$$

Нека S означава съвкупността от всички рационални числа $\frac{p}{q}$, наредени по растяща стойност, най-малкото от които е $\frac{0}{1}$, а най-голямото $\frac{a}{1}$, като $(p, q)=1$ и $p+q\leq n$ (част от специална редица на Фарей на рационалните числа от $\frac{0}{1}$ до $\frac{1}{0}$). Нека $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ са две кои да е последователни числа от редицата S. Разглеждаме редицата от трите числа

(10) $$\frac{p}{q},\ \frac{p+p_1}{q+q_1},\ \frac{p_1}{q_1}.$$

Нека $r<a$. Да допуснем, че $q+q_1\leq m$. Тогава от очевидните неравенства

$$\frac{p}{q}<a,\ \frac{p_1}{q_1}\leq a$$

получаваме $p+p_1<a(q+q_1)$ и следователно

$$p+p_1+q+q_1<(a+1)(q+q_1)\leq(a+1)m\leq n,$$

т. е. дробта $\frac{p+p_1}{q+q_1}$ ще е член на редицата S и дробите $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ не ще бъдат последователни членове на тази редица. Така установихме, че $q+q_1\geqq m+1$. Нека

$$\frac{p}{q} \leqq \omega \leqq \frac{p+p_1}{q+q_1}.$$

Оттук получаваме, че

$$\omega - \frac{p}{q} \leqq \frac{p+p_1}{q+q_1} - \frac{p}{q} = \frac{1}{q(q+q_1)} \leqq \frac{1}{q(m+1)},$$

$$|\omega q - p| \leqq \frac{1}{m+1},$$

т. е. неравенството (8) ще бъде удовлетворено за $x=q$ и $y=p$. Ако

$$\frac{p+p_1}{q+q_1} \leqq \omega \leqq \frac{p_1}{q_1},$$

то подобно имаме

$$|\omega q_1 - p_1| \leqq \frac{1}{m+1}.$$

Нека сега $r=a$, т. е. $\delta = \frac{1}{m+2}$. Да предположим, че

$$q+q_1 \leqq m+1.$$

Оттук както преди получаваме

$$p \leqq aq-1,\ p_1 < aq_1,$$

$$p+p_1+q+q_1 < (a+1)(q+q_1)-1 \leqq (a+1)(m+1)-1 = n,$$

т. е. $\frac{p}{q}$ и $\frac{p_1}{q_1}$ не са последователни членове на редицата S. Следователно

$$q+q_1 \geqq m+2$$

и както преди установяваме, че неравенството (8) се удовлетворява при подходящи x и y за всяко a, удовлетворяващо на условието

$$0 < \omega \leqq a.$$

Последният член на редицата S е $\frac{a}{1}$ и нека $\frac{s}{t}$ е предпоследният член на същата редица. От условието

$$at - s = 1$$

получаваме за s израза

$$s = ta - 1.$$

От друга страна от условието $s+t \leqq n$ имаме

$$t \leqq m + \frac{r+1}{a+1}$$

и следователно $t=m$ при $r<a$ и $t=m+1$ при $r=a$. Редицата (10) за $r<a$ е следната

$$(11)\qquad \frac{am-1}{m}, \quad \frac{a(m+1)-1}{m+1}, \quad \frac{a}{1}$$

и при $r=a$ е следната

$$(12)\qquad \frac{a(m+1)-1}{m+1}, \quad \frac{a(m+2)-1}{m+2}, \quad \frac{a}{1}$$

Ще установим сега, че за вторите числа в (11) и (12) в (8) имаме знак на равенство. Да допуснем, че за някои x, y, удовлетворяващи условията на теоремата, имаме

$$\left|\frac{a(m+1)-1}{m+1}x-y\right| < \frac{1}{m+1}.$$

Оттук получаваме

$$|[a(m+1)-1]x-(m+1)y| < 1$$

и понеже x и y са цели числа, ще трябва да имаме

$$[a(m+1)-1]\,x-(m+1)y=0$$

или

$$y=\frac{a(m+1)-1}{m+1}x.$$

Следователно

$$x=\lambda(m+1), \quad y=\lambda[a(m+1)-1],$$

където λ е естествено число. Но тогава ще имаме

$$x+y \geqq (a+1)(m+1)-1 > n,$$

което противоречи на условието, че $x+y \leqq n$. Подобно, ако съществува неравенството (случая когато $r=a$)

$$\left|\frac{a(m+2)-1}{m+1}x-y\right| < \frac{1}{m+2},$$

то ще имаме

$$[a(m+2)-1]x-(m+2)y=0,$$

откъдето следва, че

$$x=\mu(m+2),$$

$$(13)\qquad y=\mu[a(m+2)-1],$$

като μ е естествено число. Но тогава от (13) получаваме

$$x+y \geqq (a+1)(m+2)-1 > n,$$

което противоречи на условието $x+y \leqq n$. С това теоремата е установена напълно.

В по-раншни работи установих и следната теорема:

Нека n е произволно естествено число и $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ са произволни реални числа. Тогава съществуват p неотрицателни цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$, не всички равни на нула, и цяло число y, за които имаме

$$(14) \qquad |\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \quad + \omega_p x_p - y| \leq \frac{1}{np+1},$$
$$x_s \leq n, \; s = 1, 2, \ldots, p.$$

Знакът на равенство в (14) се достига.

Ще разгледаме сега един по-общ въпрос, който се свежда на заместване условието не всички числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$ да бъдат равни на нула с условието поне d от тези числа да не бъдат равни на нула. Точно неравенство се получава при известни ограничения за числото n. Именно установявам следната теорема:

III. Нека p и d са произволни естествени числа, $d \leq p$ и n е произволно естествено число, кратно на $\frac{d}{(p, d)}$. Нека $\omega_1, \omega_2, \quad \omega_p$ са произволни реални числа. Тогава съществуват p цели неотрицателни числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$, поне d от които са отлични от нула, и цяло число y, за които са изпълнени неравенствата

$$(15) \qquad |\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_p x_p - y| \leq \frac{1}{\frac{np}{d}+1},$$
$$x_s \leq n, \; s = 1, 2, \ldots, p.$$

Знакът на равенство в (15) се достига.

При доказателството следваме същия път, който въведохме при третиране на този род въпроси. Необходимо е предварително да решим една помощна задача, решението на която представлява едно интересно приложение на теорията на сравненията. Тя е следната: Нека сме написали p равни на m числа в една редица. Намаляваме d от тях с 1 и получаваме нова редица от p числа, като d от тях са равни на $m-1$ и останалите са равни на m. Намаляваме сега d от числата, равни на m, с единица (при $d \leq p-d$) и ако $d > p-d$, то допълнително намаляваме $2d-p$ от останалите числа с единица, така че общо сме извършили d намаления с единица. В новата редица извършваме същото намаление на d числа с единица, като винаги започваме да намаляваме по-големите числа и при недостиг прибягваме до по-малките числа. Въпросът, който трябва да се разреши, е следният: след колко такива намаления ще получим за пръв път редица от еднакви числа, които да означим с g и на колко е равна разликата $m-g$. Очевидно във всяка редица ще има или равни помежду си числа, или две групи от числа, равни на λ и $\lambda-1$. Нека означим с P_k броя на числата, които са по-големите в $(k+1)$-вата редица и с Q_k броя на по-малките числа в същата редица. Очевидно

$$P_0 = d, \; Q_0 = 0, \; P_1 = p-d, \; Q_1 = d.$$

Ще намерим зависимостта между числата P_k, Q_k и P_{k+1}, Q_{k+1}. Нека числата в $(k+1)$-вата редица са равни на h и $h-1$. Ако $P_k \geq d$, то в редицата, която следва, ще има $P_k - d$ числа, равни на h и $Q_k + d$ равни на $h-1$, т. е. имаме

$$(16) \qquad P_{k+1} = P_k - d, \; Q_{k+1} = Q_k + d.$$

Ако сега $P_k<d$, то от числата, равни на h, при намалението с 1 се получават P_k числа, равни на $h-1$. Ще трябва да намалим с 1 още $d-P_k$ числа от числата, равни на $h-1$. Така виждаме, че ще имаме

$$P_{k+1}=P_k+Q_k-d+P_k=P_k+p-d, \tag{17}$$
$$Q_{k+1}=d-P_k.$$

Нека δ е общият най-голям делител на p и d. Имаме

$$p=p_1\delta,\ d=d_1\delta,$$

като p_1 и d_1 са взаимно прости числа. От (16) и (17) се вижда, че числата P_k и Q_k се делят на δ, т. е. имаме

$$P_k=\delta\alpha_k,\ Q_k=\delta\beta_k,$$

където α_k и β_k са цели неотрицателни числа. За тези числа получаваме непосредствено релациите

$$\text{I)}\ \alpha_{k+1}=\alpha_k-d_1,\ \beta_{k+1}=\beta_k+d_1 \text{ при } \alpha_k\geqq d_1;$$

$$\text{II)}\ \alpha_{k+1}=\alpha_k+p_1-d_1, \beta_{k+1}=d_1-\alpha_k \text{ при } \alpha_k<d_1,$$

като $\alpha_k+\beta_k=p_1$. Лесно се установяват сега сравненията

$$\alpha_k\equiv -kd_1 \pmod{p_1},\quad \beta_k\equiv kd_1 \pmod{p_1}. \tag{18}$$

При $k=0$ и $k=1$ тези сравнения са очевидни. От формулите I) и II) следва лесно верността на сравненията

$$\alpha_{k+1}\equiv -(k+1)\,d_1 \pmod{p_1},\ \beta_{k+1}\equiv (k+1)\,d_1 \pmod{p_1}$$

при предположение, че сравненията (18) са верни. Така по индуктивен път установяваме верността на (18) за кое да е цяло неотрицателно число k. Понеже числата d_1 и p_1 са взаимно прости, то числата $\pm kd_1$ при $k=0, 1, 2, \ldots, p_1-1$ ще са сравними с числата $0, 1, 2, \ldots, p_1-1$ по модул p_1 и следователно при $k=p_1$ ще имаме първата редица поред с равни числа. Така установихме, че броят на редиците до повторение на числата в тях, т. е. до редица със само равни числа, е равен на $p_1=\frac{p}{\delta}$. За да намерим сега разликата между числата в първата редица и в последната редица с равни числа, ще трябва да намерим колко е броят на случаите II, т. е. на неравенствата $\alpha_k<d_1$. Понеже $\alpha_k+\beta_k=p_1$, то за числата α_k и β_k имаме $0\leqq\alpha_k\leqq p_1$, $0\leqq\beta_k\leqq p_1$. Тъй като остатъците на тези числа спрямо модул p_1 са допреди крайната редица от равни числа числата $0, 1, 2, \ldots, p_1-1$, то самите числа α_k и β_k са също равни на числата $0, 1, 2, \ldots, p_1-1$ (като, разбира се, абстрахираме от реда им). Но имаме само d_1 на брой числа α_k, по-малки от d_1, и следователно разликата между числата от първата редица и от последната редица е равна на d_1.

Да означим с μ числото $\frac{n}{d_1}$. Образуваме по описания начин таблица A_1 от p_1 редици числа, като началната редица е съставена само от p числа, равни на d_1. Над тази таблица написваме нова таблица A_2 от числа, получена от таблицата A_1 с прибавяне на d_1 към всяко число от A_1. Над тази таблица написваме нова таблица A_3, получена от A_2 по същия начин и продължаваме така до таблица A_μ. Към тази таблица, съставена от матриците $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$, прибавяме на последно място една редица от p елементи, равни на нула. Да означим с A така получената таблица (матрица). Например за $p=9$, $d=6$, $n=6$ ще имаме таблицата

$$\begin{matrix} 6&6&6&6&6&6&6&6&6\\ 5&5&5&5&5&5&6&6&6\\ 5&5&5&4&4&4&5&5&5\\ 4&4&4&4&4&4&4&4&4\\ 3&3&3&3&3&3&4&4&4\\ 3&3&3&2&2&2&3&3&3\\ 2&2&2&2&2&2&2&2&2\\ 1&1&1&1&1&1&2&2&2\\ 1&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{matrix}$$

Броят на редиците в A е равен на $N=\frac{np}{d}+2$. Нека с

$$x_1^{(s)},\ x_2^{(s)},\ \ldots,\ x_p^{(s)}$$

означим s-тата редица. В линейната форма

$$f=\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\quad +\omega_p x_p$$

даваме на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_p$ системата стойности

$$x_1^{(s)},\ x_2^{(s)},\ \ldots,\ x_p^{(s)},\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Линейната функция f ще вземе стойностите

$$f_s=\omega_1 x_1^{(s)}+\omega_2 x_2^{(s)}+\cdots+\omega_p x_p^{(s)},\ s=1,\ 2,\quad .,\ N.$$

Разглеждаме числата

$$\{f_1\},\ \{f_2\},\ \ldots,\ \{f_N\}.$$

Между тях ще има поне две $\{f_i\}$ и $\{f_j\}$, разликата на които е $\leq\frac{1}{N}$ или числото $1-\{f_\sigma\}$, където $\{f_\sigma\}=max.\ (\{f_1\},\ldots,\{f_N\})$, ще бъде $\leq\frac{1}{N}$. В първия случай ще имаме

$$|\omega_1(x_1^{(i)}-x_1^{(j)})+\cdots+\omega_p(x_p^{(i)}-x_p^{(j)})-y|\leq\frac{1}{N},$$

където y е цяло число, а във втория ще имаме

$$|\omega_1 x_1^{(\sigma)}+\cdot\quad\cdot+\omega_p x_p^{(\sigma)}-y'|\leq\frac{1}{N},$$

с цяло число y'. Разликите $x_k^{(i)}-x_k^{(j)}$, $1\leq k\leq N$ са с еднакъв знак и са положителни поне d от тях, като останалите са неотрицателни или същото твърдение е в сила за разликите $x_k^{(j)}-x_k^{(i)}, 1\leq k\leq p$. Освен това те не надминават по абсолютна стойност числото n. Вторият случай очевидно е подобен. Така неравенството (15) е установено.

За да докажем, че неравенството (15) е точно, разглеждаме линейната форма

$$\varphi=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_p}{dN}.$$

Даваме на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_p$ стойностите от 0 до n, като на поне d от тях стойностите им да са положителни, т. е. поне равни на 1. Тогава формата

$$dN\varphi=x_1+x_2+\cdots+x_p$$

ще взема стойности, които са цели положителни числа, най-малкото от които е равно на d и най-голямото от които е $pn=(N-1)d$. Следователно формата φ ще взема стойностите

$$\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}=1-\frac{1}{N}$$

и за тази форма в (15) ще имаме знака на равенство.

Може да се намерят всички форми, за които в (15) имаме знака на равенство, но на този въпрос не ще се спираме.

Постъпила на 5. 7. 1957

О ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Н. Обрешков

РЕЗЮМЕ

В работе доказываются следующие теоремы:

1. Пусть a целое положительное число и n целое число больше a. Тогда для каждого действительного ω, удовлетворяющего неравенству $0 < \omega \leq a$, существуют по крайней мере два неотрицательные числа x и y, для которых

$$(1) \qquad |\omega x - y| \leqq \frac{1}{\left[\frac{n-a}{a+1}\right]+2},$$

$$0 < x + y \leqq n.$$

Равенство в (1) достигается.

2. Пусть p и d два целые положительные числа, $d \leqq p$ и пусть $n > 0$ произвольное целое положительное число, кратное $\frac{d}{(p, d)}$. Пусть далее, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ произвольные реальные числа. Тогда существуют целые неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_p$, притом по крайней мере d из них отличны от ноля, и целое число y для которых

$$(2) \qquad |\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_p x_p - y| \leqq \frac{1}{\frac{np}{d}+1}$$

$$x_s \leqq n, \; s = 1, 2, \ldots, p.$$

Равенство в (2) достигается.

SUR L'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE DES FORMES LINÉAIRES

N. Obrechkoff

RÉSUMÉ

Nous démontrons les théorèmes suivants:

1. Soit a un nombre positif et entier et n un nombre entier plus grand que a. Alors pour chaque nombre réel ω, satisfaisant à la condition $0<\omega\leq a$ ils existent au moins deux nombres entiers non négatifs x et y tels que l'on a

$$(1) \qquad \omega x-y \,|\leq \frac{1}{\left[\dfrac{n-a}{a+1}\right]+2},$$

$$0<x+y\leq n.$$

Le signe d'égalité dans (1) est atteint.

2. Soit p et d deux nombres entiers et positifs, $d\leq p$ et soit $n>0$ un nombre entier arbitraire mais multiple de $\frac{d}{(p,\ d)}$. Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ p nombres réels arbitraires. Alors ils existent p nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_p$, non négatifs, desquels d au moins sont différents de et tels que l'on a (y entier),

$$(2) \qquad |\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\cdots+\omega_p x_p-y|\leq \frac{1}{\dfrac{np}{d}+1},$$

$$x_s\leq n,\ s=1,\ 2, \ldots, p.$$

Le signe d'égalité dans (2) est atteint.