EIN ELEMENTARGEOMETRISCHER BEWEIS DES SYLVESTER — FRANKESCHEN DETERMINANTENSATZES

O. Varga (Debrecen)

Herr E. Egerváry lenkte meine Aufmerksamkeit auf das Fehlen eines einfachen Beweises des im Titel erwähnten Satzes. Insbesondere verwies er mich auf eine Arbeit von G. B. Price [1], wo dieser Umstand besonders hervorgehoben ist. Da ich mich schon früher mit der Anwendung von p-Vektoren auf derivierte Matrizen beschäftigte [2], war ich im Besitz eines solchen Beweises. Bei der Durchsicht der Literatur bemerkte ich, dass die Arbeit von L. Tornheim einen sehr einfachen Beweis dieses Satzes enthält, der vom rein algebraischen Standpunkt mit unserem Beweis im wesentlichen übereinstimmt. Dass ich nun meinen Beweis trotzdem veröffentliche, geschieht deswegen, weil er auf einen äusserst einfachen geometrischen Gedanken beruht, der bei Tornheim nicht zu finden ist und der, meiner Meinung nach, den eigentlichen Kern des Satzes bildet. Er besteht darin, dass eine Determinante, bis auf das Vorzeichen, als Rauminhalt eines Parallelflachs aufgefasst werden kann, und die Determinante der p-ten Derivierten, der fraglichen Matrix, den Rauminhalt des Bildparallelflachs im Raume von $\binom{n}{p}$ Dimensionen bedeutet.

Es sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische Matrix, deren Spalten durch die Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ eines reellen Vektorraumes bestimmt sind. Mit

$$\underset{i_1 \ldots i_p}{P} = [\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_p}]$$

bezeichnen wir die $\binom{n}{p}$ einfachen, aus den $\boldsymbol{a}_i$ bildbaren p-Vektoren.

Wir legen eine Reihenfolge der $\binom{n}{p}$ p-Vektoren dadurch fest, dass wir für die Kombinationen p-ter Klasse der Indizes $i_1, \ldots, i_p$ eine feste Reihenfolge wählen. Dieselbe soll dann auch die Reihenfolge der Komponenten eines jeden einzelnen p-Vektors bestimmen.

Die quadratische Matrix $\binom{n}{p}$-ter Ordnung, deren Spalten durch die Komponenten, der in obiger Reihenfolge zu nehmenden p-Vektoren gebildet wird, ist dann bekanntlich die p-te Derivierte $C_p(A)$ von (A). Den Wert der Determinante $|C_p(A)|$ bestimmen wir daraus, dass derselbe die Masszahl des Rauminhaltes desjenigen Parallelflachs ist, das von den Vektoren (1) im Raume von $\binom{n}{p}$-Dimensionen aufgespannt wird. Das Vorzeichen ist durch die Reihenfolge der Vektoren bestimmt. Dabei stützen wir uns darauf, dass die Winkel- und Inhaltsmetrik der p-Vektoren (1) des n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes in eine Winkel- und Längenmetrik übergeht, falls man diese Grössen als Vektoren eines $\binom{n}{p}$-dimensionalen euklidischen Vektorraumes auffasst [3].

Sind nun die Vektoren $\boldsymbol{a}_i$ zueinander orthogonal, dann sind es auch die $\binom{n}{p}$ p-dimensionalen Vektorräume, die von den p-Vektoren (1) aufgespannt werden. Im Raume von $\binom{n}{p}$ Dimensionen sind diese Vektoren daher zueinander orthogonal, so dass der Absolutbetrag von $|C_p(A)$ gleich dem Produkt der Längen der Vektoren (1) wird. Da nun die Länge eines Vektors (1) gleich dem Absolutbetrag des p-dimensionalen Inhaltes des p-Vektors ist, der (1) im n-dimensionalen Raume entspricht, hat man für diese Länge

$$\boldsymbol{a}_{i_1} \,|\, |\boldsymbol{a}_{i_2} \qquad \boldsymbol{a}_{i_p}$$

falls $|\boldsymbol{a}_i|$ die Länge von $\boldsymbol{a}_i$ bezeichnet. Beachten wir nun, dass ein festes $\boldsymbol{a}_i$ in insgesamt $\binom{n-1}{p-1}$ p-Vektoren vorkommt, so finden wir

$$\text{Absolutbetrag } |C_p(A)| = (|\boldsymbol{a}_1| \ldots \boldsymbol{a}_n|)^{\binom{n-1}{p-1}} = \tag{2}$$

$$= \text{Absolutbetrag } A^{\binom{n-1}{p-1}}$$

Es sei nun A wieder eine beliebige, aber reguläre Matrix. Die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ sind dann linear unabhängig. Ist

$$\bar{\boldsymbol{a}}_1 = \boldsymbol{a}_1,\ \bar{\boldsymbol{a}}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \lambda \bar{\boldsymbol{a}}_1,\ \bar{\boldsymbol{a}}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \varphi \bar{\boldsymbol{a}}_1 + \mu \bar{\boldsymbol{a}}_2, .$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}_n = \boldsymbol{a}_n + \beta_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \beta_{n-1} \boldsymbol{a}_{n-1}$$

das zu $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ gehörige eindeutig bestimmte orthogonale Vektorsystem, dann ordnen wir der Matrix A, die orthogonale Matrix

$$A^* = \quad \boldsymbol{a}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{a}}_n \tag{3}$$

zu. Den Übergang von A zu A^* bewerkstelligt man offensichtlich durch schrittweise Ausführung derjenigen elementaren Umformung, die in der Hinzufügung des λ-fachen einer Spalte zu einer anderen besteht. Daraus folgt für die Determinanten dieser Matrizen

$$|A| = |A^*|. \tag{4}$$

Die betrachtete elementare Umformung induziert aber auch für die p-te Derivierte $C_p(A)$ eine elementare Umformung. Es ist ja z. B. für

$$a_2 \to a_2 = a_2 + \lambda a_1$$

$$[a_2, a_3, \quad a_{p+1}] = [a_2, a_3, \quad a_{p+1}] + \lambda [a_1, a_3, \ldots, a_{p+1}].$$

Demnach hat man

$$\text{(5)} \qquad \text{Absolutbetrag } |C_p(A)| = \text{Absolutbetrag } |C_p(A^*)| =$$
$$= \text{Absolutbetrag } |A|^{\binom{n-1}{p-1}}.$$

Wir wollen jetzt noch das Vorzeichen von $|C_p(A)|$ bestimmen. Dazu erinnern wir an folgende wohlbekannte Tatsache: Ist die Determinante $|A|$ positiv, dann können, bei Einführung geeigneter Parameter, die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ auf stetige Weise so in die Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ (e_i mit Komponenten δ_{ik}) deformiert werden, dass dabei die Determinante stets positiv bleibt. Falls die Determinante der A negativ ist, ist eine stetige Deformation in die Vektoren $-e_1, e_2, \ldots, e_n$ möglich, wobei die Determinante stets negativ bleibt. Die stetige Deformation der Vektoren a_i zieht eine stetige Deformation der aus ihnen bildbaren p-Vektoren nach sich. Ist $|A|$ positiv, dann geht dabei $C_p(A)$ in $C_p(\|e_1, \ldots, e_n\|)$ über, bei negativem hingegen in $C_p(\|-e_1, e_2, \ldots, e_n\|)$. Im ersten Falle hat also $|C_p(A)|$ das Vorzeichen von $|A|$. Im zweiten Falle kommen in der Diagonalmatrix $C_p(\|-e_1, e_2, \ldots, e_n\|)$ genau $\binom{n-1}{p-1}$ Elementen -1 vor, das Vorzeichen von $|C_p(A)|$ ist also $|A|^{\binom{n-1}{p-1}}$. Daraus folgt aber wegen (5) der Franke-Sylvestersche Satz

$$|C_p(A)| = |A|^{\binom{n-1}{p-1}}$$

Eingegangen am 10. 1. 1957

LITERATUR

1. Siehe in G. B. Price. Some identities in the theory of determinants. Amer. Math. Monthly, 54 (1946), 75—90, die in der Einleitung gemachte Bemerkung.
2. Siehe B. Gyires und O. Varga. Anwendungen von p-Vektoren auf derivierte Matrizen. Publ. Math. Debrecen, 2 (1951), 137—145, wo u. a. auch der übrigens bekannte und in unserer Note verwendete Zusammenhang zwischen der Metrik von p-Vektoren und der Metrik ihrer Bildvektoren im $\binom{n}{p}$ dimensionalen Raum auseinandergesetzt ist.
3. L. Tornheim. The Sylvester-Franke theorem. Amer. Math. Monthly, 59 (1952), 389—391.

ЕЛЕМЕНТАРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКО ДОКАЗАТЕЛСТВО НА ТЕОРЕМАТА НА СИЛВЕСТЪР-ФРАНКЕ

О. Варга (Дебрецен)

РЕЗЮМЕ

Работата съдържа едно елементарно-геометрическо доказателство на детерминантното тъждество, известно под името теорема на Силвестър-Франке. Това тъждество свързва детерминантата на една матрица $\boldsymbol{A}$ и детерминантата на p-тата производна на $\boldsymbol{A}$. Простата идея на доказателството се състои в това, че $C_p(\boldsymbol{A})$ е с точност до знака равно на обема на един паралелепипед в пространството с $\binom{n}{p}$ измерения. Този обем се пресмята лесно, тъй като дължините на ръбовете са p-измерими обеми на p-векторите, образувани от изходната матрица $\boldsymbol{A}$. Знакът се получава посредством деформиране (със запазване на знака) на матрицата $\boldsymbol{A}$ в единичната матрица (или в матрицата, отличаваща се от единичната по една -1) и съответната деформация на $C_p(\boldsymbol{A})$ в $C_p(\| \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \|)$ или $C_p(\| -\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \|)$.

ЭЛЕМЕНТАРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СИЛЬВЕСТРА-ФРАНКЕ ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ

О. Варга (Дебрецен)

РЕЗЮМЕ

Работа содержит элементарно-геометрическое доказательство одного тождества, называемого теоремой Сильвестра-Франке. Это тождество связывает определитель одной матрицы A и определитель p-той производной от A. Простая идея доказательства состоит в том, что $|C_p(A)|$ с точностью до знака можно рассматривать как объём одного параллелепипеда в пространстве $\binom{n}{p}$ измерении. Этот объём можно легко вычислить, так как длины ребер являются объемами p-векторов в пространстве p измерений, образованных элементами матрицы A. Знак получается из рассмотрений знакосохраняющей деформации матрицы A в единичной матрице (или в матрице отличающейся от единичной наличием одной -1) и соответствующей деформации матрицы $C_p(A)$ в $C_p(\|e_1, \ldots, e_n\|)$ или в $C_p(\|-e_1, e_2, \ldots, e_n\|)$.