QUELQUES REMARQUES SUR UN MODE DE GÉNÉRALISATION, BASÉ SUR L'APPLICATION DES RACINES DE L'UNITÉ

A. Kharadzé (Tbilissi)

Introduction. Il est bien connu, que les propriétés des racines de l'équation binome $z^k-1=0$ présentent une source abondante pour les diverses généralisations non seulement en algèbre ou théorie des nombres, mais aussi en analyse et théorie des fonctions. Les équations binomes présentent une espèce „d'escalier algébrique" les marches duquel amênent aux généralisations variées. Les unes de celles ont le caractère des analogies formelles, les autres laissent paraître les liens plus profonds entre les objets considérés. En outre, les racines de l'unité portent dans la structure des expressions analytiques une sorte de régularité, de symétrie et de simplicité. Il suffit de rappeler ici, par exemple, la structure algébrique des racines des équations cycliques, la construction des fonctions spéciales, dont les séries tayloriennes ont des lacunes symétriques; la forme des équations aux dérivées partielles d'ordre superieur, généralisant l'équation de Laplace sur la base purement algébrique (p. e. l'équation de P. Humbert). Rappelons, encore, les divers propositions de la théorie des fonctions, rattachées avec la distribution des points sur le plan de variable complexe, par exemple, des points d'interpolation, ou des points exceptionnels pour une famille de fonctions univalentes — si ces points sont situés aux sommets des polygones réguliers, les propositions correspondantes ont une formulation plus simple. On pourrait indiquer beaucoup d'autres exemples.

Dans cet article nous utilisons les propriétés des racines de l'unité pour quelques généralisations spéciales. Le n° 1 est consacré à l'application d'une méthode de Tchakaloff-Favard de précision des théorèmes de la moyenne pour la famille des polynomes réels; puis, dans le n° 2 nous proposons une idée de l'interprétation des coordonnées complexes, fondée sur la considération des racines cubiques de l'unité. Dans le n° 3 nous utilisons ces racines pour établir quelques formules simples, attachées à un espace quasi-euclidien.

1. Application de la méthode de Tchakaloff-Favard à la précision d'un théorème de la moyenne. Soit $\{f(x)\}$ la famille des polynomes réels tout au plus de dégré n. Alors, comme il suit d'un résultat de P. Montel [9], il existe la constante absolue $\theta(n)<1$ telle que l'équation de Lagrange

(1) $$f(1)-f(-1)=2f'(\xi)$$

a toujours une racine réele dans l'intervalle $[-\theta(n), \theta(n)]$.

Quant à la valeur précise de θ on doit à L. Tchakaloff le résultat suivant fort élégant [16]: pour la famille des polynomes réels tout au plus de degré $2n$ (ou $2n-1$) il existe la racine de l'équation (1) dans l'intervalle $(-\theta_n, \theta_n)$, où θ_n est la plus grande racine du polynome de Legendre de degré n; l'intervalle $(-\theta_n, \theta_n)$ est minimal.

Les recherches ultérieurs de L. Tchakaloff et J. Favard ont montré*, qu'il existe un lien étroit entre le problème de précision des théorèmes de la moyenne pour la famille des polynomes réels et les polynomes orthogonaux de Tchebycheff correspondants à des poids divers.

Dans ce n^0 nous considérons de ce point de vue une formule analogue à la formule classique de Cavalieri-Simpson.

Soit ω_k une des racines primitives de l'équation binome $z^k-1=0$, $\omega_k=e^{\frac{2\pi i}{k}}$. Considérons la fonctionelle linéaire $I_k^{(a,h)}[\varphi]$, définie par l'égalité suivante

(2) $$I_k^{(a,h)}[\varphi]=\Phi(a+h)+\omega_k^{k-1}\Phi(a+\omega_k h)+\cdots+\omega_k\Phi(a+\omega_k^{k-1}h),$$

où $\Phi'(z)=\varphi(z)$, a — réel, $h>0$.

Si, particulièrement, $k=2$, nous avons $\omega_2=-1$ et, par suite,

$$I_2^{(a,h)}[\varphi]=\Phi(a+h)-\Phi(a-h)=\int_{a-h}^{a+h}\varphi(t)\,dt.$$

En tenant compte de l'égalité

$$1+\omega_k+\cdots+\omega_k^{k-1}=0,$$

nous pouvons écrire l'expression (2) de la manière suivante

$$I_k^{(a,h)}[\varphi]=\sum_{n=0}^{k-1}\omega_k^{k-n}[\Phi(a+\omega_k^n h)-\Phi(a)]=\sum_{n=0}^{k-1}\omega_k^{k-n}\int_a^{a+\omega_k^n h}\varphi(z)\,dz,$$

où l'intégration s'accomplit suivant les rayons d'un faisceau symétrique avec le centre au point a, ayant des bouts aux sommets du polygone régulier $a+h, \cdots, a+\omega_k^{k-1}h$.

Cette fonctionnelle engendre un procédé d'orthogonalisation à poids choisis et de cette manière nous pouvons construire des polynomes orthogonaux, généralisants des polynomes classiques. Si, par exemple, $a=0$, $h=1$ et la fonction de poids est constante, alors, le polynome de Legendre généralisé, de dégré $n=km$, satisfait à la condition $I_k^{(0,1)}[P_n(z)\varphi_{n-1}(z)]=0$ pour tout les polynomes $\varphi_{n-1}(z)$ tout au plus de degré $n-1$. Nous avons considéré ce cas dans une note [13] dans le but d'application de la méthode de Tchakaloff-Favard à l'équation

$$f(1)+\omega_k^{k-1}f(\omega_k)+\cdots+\omega_k f(\omega_k^{k-1})=kf'(\xi),$$

* Voir par exemple [4], [5], [17], [18].

analogue à celle de Lagrange*. Ces polynomes généralisés a considéré aussi A. Sharma [12].

Il est à propos de remarquer ici, que K. Endl dans sa note [3] a résolu récemment la question suivante: existe-t-il un procédé d'orthogonalisation qui fournisse des polynomes orthogonaux de la forme suivante

$$(3) \qquad Q_n(z) = a_n^{(n)} z^n + a_{n-k}^{(n)} z^{n-k} + a_{n-2k}^{(n)} z^{n-2k} + \cdots$$

où n est un entier quelconque?

Comme l'a montré K. Endl, à ce procédé se rapporte l'intégration suivant l'étoile aux k rayons symétriques. Or, c'est le procédé engendré par la fonctionnelle $I_k^{(a,h)}$. Comme il suit de la formule de Rodrigues généralisée, mentionnée dans notre note, citée ci-dessus, les polynomes considérés ont justement la forme (3).

Revenons, maintenant, à la question principale de ce n°. Par application d'une formule de P. Montel [10], généralisant le théorème de l'accroissement fini dans le plan complexe, nous avons établi dans une note [14] l'égalité suivante

$$(4) \quad I_k^{(a,h)}[f] = \sum_{n=0}^{k-1} \omega_k^{k-n} F(a+\omega_k^n h) = \frac{h}{k+1}\Big[f(a+h)+\ldots+f(a+\omega_k^{k-1}h)+$$

$$+k^2 f(a)\Big] - \frac{k^2 h^{2k+1}}{(k+1)(2k+1)!} \lambda f^{(2k)}(\eta), \quad (h>0, \ a\text{—réel}),$$

où $F'(z)=f(z)$, $|\lambda| \leq 1$, η est l'affixe d'un point de polygone régulier avec les sommets aux points $a+h, a+\omega_k h, \ldots, a+\omega_k^{k-1} h$. Il est clair, que si $k=2$, l'égalité (4) donne la formule classique de Cavalieri-Simpson, car le polygone dégénére en segment de l'axe réel $[a-h, \ a+h]$, $\lambda=1$, η—nombre réel, satisfaisant à la condition $a-h<\eta<a+h$.

Soit $\{f(z)\}$ la famille des polynomes réels tout au plus de degré quelconque fixe. Il est évident, que dans ce cas $I_k^{(a,h)}[f]$ et la somme $f(a+h)+\cdots+f(a+\omega_k^{k-1}h)+k^2 f(a)$ sont réelles. Donc, se pose naturellement une question analogue au problème de P. Montel concernant le théorème de Rolle ou l'équation de Lagrange: comment se comporte la quantité réelle ξ dans l'équation

$$I_k^{(a,h)}[f] - \frac{h}{k+1}\Big[f(a+h)+\cdots+f(a+\omega_k^{k-1}h)+k^2 f(a)\Big] + \frac{k^2 h^{2k+1}}{(k+1)(2k+1)!} f^{(2k)}(\xi) = 0$$

pour les familles particulières $\{f(x)\}$ des polynomes réels?

---

* Il est necessaire d'indiquer que dans la note citée nous avons considéré aussi la fonctionnelle de deuxième espèce $J_k[f]$ définie par une égalité analogue à (2), mais lors de la correction des épreuves a été manquée la condition $F^{(k-1)}(z) = f(z)$. De même, la formulation de la proposition page 26 demande à être corrigée—au lieu du degré du polynome $2n$ il faut écrire $k(2m-1)+1$.

Pour simplicité supposons $a=0$, $h=1$ et considérons, donc, l'équation de la forme

$$F(1)+\omega_k^{k-1}F(\omega_k)+\cdot\quad\cdot+\omega_k F(\omega_k^{k-1})= \tag{5}$$

$$=\frac{1}{k+1}\left[f(1)+f(\omega_k)+\cdot\qquad+f(\omega_k^{k-1})+k^2f(0)\right]-\frac{k^2f^{(2k)}(\xi)}{(k+1)(2k+1)!}$$

où $F'(x)=f(x)$.

La méthode de Tchakaloff-Favard conduit immédiatement à une suite speciale des polynomes orthogonaux, les racines extrêmes desquels définissent l'intervalle d'existence de ξ pour les familles $\{f(x)\}$ particulières. Il suffit pour cela de représenter le reste de la formule (5) par une intégrale définie, ce qu'on peut faire sans difficultés.

Considérons l'expression suivante

$$S_k=\frac{1}{(k+1)(2k)!}\sum_{n=0}^{k-1}\omega_k^{k-n}\int_0^{\omega_k^n}(1-\omega_k^{k-n}z)^{2k-1}\Big[k-1+ \tag{6}$$

$$+(k+1)\omega_k^{k-n}z\Big]f^{(2k)}(z)\,dz.$$

Les fonctions

$$(1-\omega_k^{k-n}z)\,[2k-1+(k+1)\,\omega_k^{k-n}z],\quad n=0,\ldots,(k-1),$$

ouent ici le rôle du poids et l'intégration s'accomplit suivant des rayons de l'étoile avec le centre à l'origine. En tenant compte de la construction de la fonctionnelle $I_k^{(0,1)}$, nous voyons que l expression (6) peut s'écrire de la manière suivante

$$S_k=\frac{1}{(k+1)(2k)!}I_k^{(0,1)}\{(1-|z|)^{2k-1}[k-1+(k+1)\;z\;]f^{(2k)}(z)\}.$$

Dans le cas particulier, si $k=2$, l'étoile se réduit au segment $[-1,\ 1]$ et nous avons

$$\frac{1}{3.4!}I_k^{(0,1)}[(1-x)^3(1+3|x)f^{(IV)}(x)]=\frac{1}{3.4!}\int_0^1(1-t)^3(1+3t)f^{(IV)}(t)dt-$$

$$-\frac{1}{3.4!}\int_0^{-1}(1+t)^3(1-3t)f^{(IV)}(t)\,dt=\frac{1}{3.4!}\int_{-1}^{1}(1-|x|)^3(1+3|x|)f^{(IV)}(x)\,dx.$$

Or, cette intégrale est le reste de la formule de Cavalieri-Simpson sous la forme de Peano.

L'accomplissement de l'intégration par parties dans la somme (6) et application des propriétés des racines de l'unité nous donnera l'égalité suivante

$$S_k=-I_k^{(0,1)}[f]+\frac{1}{k+1}[f(1)+f(\omega_k)+\cdot\qquad+f(\omega_k^{k-1})+k^2f(0)]$$

La comparaison de cette égalité avec (5) montre, que le reste de la formule (5) peut être presenté par l'expression $-S_k$.

Supposons maintenant, que la dérivée $f^{(2k)}(z)$ satisfait à la condition $f^{(2k)}(\omega_k t) = f^{(2k)}(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Alors, comme il suit du calcule simple, S_k se transforme en intégrale définie

$$S_k = k \int_0^1 (1-t)^{2k-1} [k-1+(k+1)t] f^{(2k)}(t)\, dt.$$

La condition de la continuité nous donne

$$S_k = \frac{k^2 f^{(2k)}(\xi)}{(k+1)(2k+1)!}, \qquad 0 < \xi < 1$$

et, par suite, nous obtenons de nouveau la formule (5).

Alors, il est facile de voir que la question posée dans ce n⁰ se résout immédiatement par la méthode de Tchakaloff-Favard.

Soit $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x), \ldots$ la suite des polynômes orthogonaux de Tchebycheff, correspondante au poids $(1-x)^{2k-1}[k-1+(k+1)x]$ sur le segment $[0, 1]$.

Si $\{f(x)\}$ est la famille des polynômes réels tout au plus de dégré km et satisfaisants à la condition $f^{(2k)}(\omega_k x) \equiv f^{(2k)}(x)$, alors il existe la racine ξ^* de l'équation

$$I_k^{(0,1)}[f] - \frac{1}{k+1}[f(1) + f(\omega_k) + \cdots + f(\omega_k^{k-1}) + k^2 f(0)] + \\ + \frac{k^2 f^{(2k)}(\xi)}{(k+1)(2k+1)!} = 0$$

dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où α et β sont les racines extrèmes de polynôme $\Phi_p(x)$ de dégré convenable. Le cas $k=2$ correspondant à la formule de Cavalieri-Simpson, est considéré par L. Tchakaloff [17], [18].

2. Sur une interprétation des coordonnées complexes, fondée sur la considération des racines cubiques de l'unité. Nous designons dans ce qui suit la racine cubique $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ par ω. Il faut considérer le contenu de ce n⁰, comme des remarques de caractère méthodique.

A un certain point de vue les racines cubiques de l'unité méritent une considération particulière. Nous utilisons ici ces racines pour l'introduction de la notion des „projections complexes" de bivecteur, analogues aux projections réelles de vecteur suivant des axes. Ce point de vue peut être utile pour la construction de la théorie géométrique des fonctions de variable complexe. Si la méthode traditionelle de representation des quantités complexes nous amène à l'étude de dépendance fonctionelle entre les variables $x+iy$ et $u+iv$, comme de correspondance entre les points de deux plans, l'idée que nous proposons ici est fondée sur la considération des couples de quantités complexes $(x+\omega\xi,\ y+\omega\eta)$, $(\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}})$, comme des coordonnées de „deux-points" ou „aiguilles".*

* Voir aussi [15].

Ces dernières années ont été publié quelques articles dans lesquels s'emploie „l'aiguille", comme l'image géometrique de divers ensembles de nombres. Par exemple, L. Locher-Ernst [7], [8] propose de représenter le point imaginaire avec les coordonnées $x=\xi+i\xi'$, $y=\eta+i\eta'$, $z=\zeta+i\zeta'$, comme une „aiguille" ayant l'origine et le bout, conformément, aux points $A(\xi, \eta, \zeta)$ et $B(\xi+\xi', \eta+\eta', \zeta+\zeta')$. H. Dallman [1] considére le point (a, b, c, d) d'espace de quatre dimensions, comme une „aiguille" avec l'origine au point (a, b) et le bout au point (c, d).

Il nous semble, que ces constructions sont un peu artificielles, tandis que la représentation de couples de quantités complexes $(x+\omega\xi, y+\omega\eta)$ ou d'ensemble de trois quantités $(x+\omega\xi, y+\omega\eta, z+\omega\zeta)$ par une „aiguille" ou, comme nous disons, par le „deux-points" sur le plan ou dans l'espace, donne l'extension la plus naturelle de coordonnées réelles.

Ainsi donc, considérons l'expression

$$a+\omega b+\omega^2 c \tag{7}$$

où a, b, c — réels, $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $(\omega^2=-1-\omega)$. Cette somme à un certain point de vue présente la „différence généralisée" de trois nombres a, b, c, l'analogue algébrique de différence de deux quantités. En effet, l'expression (7) est la même combinaison bilinéaire de deux systèmes des nombres a, b, c et $1, \omega, \omega^2$, comme la différence $a-b$, qui est aussi la forme bilinéaire des systèmes a, b et $1, -1$ (racines carrées de l'unité). Si $b=c$ l'expression (7) se transforme en différence ordinaire $a-b$; si $a=b=c$, la somme (7) est égale à zero. Puisque $a+\omega b+\omega^2 c=a-c+\omega(b-c)$ et a, b, c-réels, il est évident, que l'expression (7) s'annulle seulement dans le cas $a=b=c$.

Passons maintenant à l'illustration géométrique. Pour plus de clarté nous considérons parallelement deux systèmes ordonnés des points par rapport des axes orthogonaux. Soit, d'abord, AB un vecteur défini par la couple ordonnée de deux points sur le plan $A(x', y')$, $B(x, y)$. Les différences

$$x-x', \quad y-y'$$

sont les projections orthogonales de ce vecteur. Si $x'=y'=0$, nous avons le rayon-vecteur définissant un point avec les coordonnées (x, y).

Puis, considérons le système ordonné des trois points sur le plan

$$M(\xi', \eta'), \quad N(\xi, \eta), \quad P(x, y)$$

qui à son tour définit une couple ordonnée des vecteurs $\{\overline{MN}, \overline{MP}\}$ — bivecteur avec le point initial $M(\xi', \eta')$ et des vecteurs composants $\overline{MN}$ et $\overline{MP}$. Il est naturel d'appeller par „projections complexes" de bivecteur $\{\overline{MN}, \overline{MP}\}$ les „différences généralisées"

$$x+\omega\xi+\omega^2\xi', \quad y+\omega\eta+\omega^2\eta', \quad \omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Si $\xi'=\eta'=0$, c'est à dire, si nous faisons la translation du point initial de bivecteur en origine, alors nous obtenons le „rayon-bivecteur" définissant par ses bouts un „deux-point“ avec les coordonnées complexes

$$x+\omega\xi,\quad y+\omega\eta.$$

De la même manière, la suite ordonnée de trois points dans l'espace

$$M(\xi',\ \eta',\ \zeta'),\quad N(\xi,\ \eta,\ \zeta),\quad P(x,\ y,\ z)$$

définit une couple ordonnée des vecteurs $\{\overline{MN},\ \overline{MP}\}$—bivecteur avec les „projections complexes“

$$x+\omega\xi+\omega^2\xi',\quad y+\omega\eta+\omega^2\eta',\quad z+\omega\zeta+\omega^2\zeta'.$$

Si $\xi'=\eta'=\zeta'=0$, nous avons le „rayon-bivecteur“ définissant dans l'espace le „deux-points“ $[\overrightarrow{NP}]$ avec les points composants $N(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, $P(x,\ y,\ z)$; les coordonnées complexes de ce „deux-points„ sont

$$x+\omega\xi,\quad y+\omega\eta,\quad z+\omega\zeta^{*}.$$

Donc, en généralisant la notion de différence, nous faisons le passage de projections réelles de vecteur à „projections complexes“ de bivecteur, et par cette voie nous introduisons les coordonnées complexes de „deux-points“.

Le carré de „norme“ de „deux-points“ sur le plan s'exprime par la forme quadratique $(x+\omega\xi)(x+\omega^2\xi)+(y+\omega\eta)(y+\omega^2\eta)$ et, par suite, le carré de „distance“ entre deux „deux-points“ peut se definir par la forme correspondante. De même dans l'espace.

Considérons, maintenant, une équation exprimante la dépendance fonctionnelle entre deux variables $x+\omega\xi$ et $y+\omega\eta$

$$y+\omega\eta=f(x+\omega\xi)=y(x,\ \xi)+\omega\eta(x,\ \xi). \tag{8}$$

Il est facile de donner l'interprétation géométrique de cette rélation, de laquelle découlent immédiatement deux équations

$$y=y(x,\ \xi),\quad \eta=\eta(x,\ \xi).$$

La première présente une équation de la famille des courbes planes, dépendante de paramètre ξ, et la seconde — de deuxième famille, pour laquelle la variable x joue le rôle de paramètre, tandis que ξ et η sont les coordonnées courantes. Donc, pour la construction de „deux-points“ satisfaisante à l'équation (8) nous pouvons nous comporter de la manière suivante: en fixant ξ dans l'équation $y=y(x,\ \xi)$, nous choisissons de cette famille la courbe déterminée C_ξ et en même temps nous marquons sur l'axe $(x,\ \xi)$ le point ξ**. Puis, en fixant x dans l'équation $\eta=\eta(x,\ \xi)$ nous obtenons la courbe correspondante C_x de la deuxième famille et à son tour marquons sur le même axe $(x,\ \xi)$ le point x. Ainsi, les valeurs fixées ξ et x définissent y et η et il nous reste, maintenant, à construire l'ordonnée y de point de C_ξ, correspon-

* Il est claire, que les projections de bivecteur sont invariantes par rapport de translation, car $a+\omega b+\omega^2c=a-a+\omega(b-a)+\omega^2(c-a)$, a — arbitraire.

** $(x,\ \xi)$ signifie qu'on considère l'axe comme double.

dant à l'abscisse x et d'un autre côté — l'ordonnée η de point de C_x, correspondant à l'abscisse ξ.

L'idée de considération des variables complexes $x+\omega\xi$ et $y+\omega\eta$, comme des coordonnées de „deux-points" sur le plan, nous donne une méthode naturelle pour l'extension de fonction de variable réelles au domaine complexe.

Si nous avons une relation entre les variables réelles x et y

$$y=f(x) \tag{9}$$

et Γ est la courbe correspondante, alors en faisant l'extension de cette équation au domaine complexe par la relation

$$y+\omega\eta=f(x+\omega\xi)$$

nous obtenons, comme on voit ci-dessus, l'ensemble de deux familles de courbes, en d'autres termes, le réseau plan, contenant la courbe Γ. Si $\xi=0$, $\eta=0$, le réseau dégénère en cette courbe unique et nous revenons à l'image géometrique initiale.

Il faut rémarquer ici, que dans la manière ordinaire d'extension de l'équation (9) par la rélation

$$u+iv=f(x+iy)$$

l'image géométrique reste isolée, en ce sens, que si $y=0$, $v=0$, l'équation $u=f(x)$ ne nous donne pas la courbe initiale Γ, car tous les deux symboles u et x se présentent coordonnées de la même dénominations — les abscisses de deux points, tandis que dans l'interprétation des expressions $x+\omega\xi$, $y+\omega\eta$, données ci-dessus, les nombres x, ξ sont les abscisses et y, η — les ordonnées. Ce dernier point de vue, comme nous avons déjà souligné, approche la théorie des fonctions de variable complexe à l'analyse réelle.

Par exemple, le réseau de courbes, défini par la relation

$$y+\omega\eta=a_0(x+\omega\xi)^2+a_1(x+\omega\xi)+a_2, \tag{10}$$

où a_0, a_1, a_2 — constantes réels, $(\omega^2=-1-\omega)$, présente l'extension géométrique au domaine complexe de la parabole $y=a_0x^2+a_1x+a_2$, qui est „plongée" dans ce réseau. Comme on voit de l'équation (10), le réseau mentionné consiste de deux familles de paraboles

$$y=a_0x^2+a_1x-a_0\xi^2+a_2, \quad (\xi \text{ — le paramètre})$$

$$\eta=-a_0\xi^2+(a_1-2a_0x)\xi, \quad (x \text{ — le paramètre})$$

Cet exemple montre, que l'extension du polynome réel a_0x^2+ $+a_1x+a_2$ au domaine complexe, au point de vue géométrique signifit, qu'en „plongeant" la parabole $y=a_0x^2+a_1x+a_2$ dans le reseau correspondant, nous considérons cette courbe dans une „variété parabolique" des „deux-points".

En revenant au cas général, il est facile de voir, que les conditions de dérivabilité de fonction $y+\omega\eta$ par rapport à $x+\omega\xi$ s'exprime par les égalités analogues aux conditions de Cauchy-Riemann, à savoir

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=-\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

ou autrement

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{\partial \eta}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial \xi}.$$

Les fonctions $y(x, \xi)$, $\eta(x, \xi)$ sont les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=0.$$

Il est clair, que dans la classe des fonctions analytiques les réseaux plans correspondants possèdent des propriétés spéciales, don- l'étude peut servir de source pour la théorie géométrique des fonct (tions.

Considérons, maintenant, la relation

11) $$z+\omega\zeta=F(x+\omega\xi,\ y+\omega\eta)=z(x, y, \xi, \eta)+\omega\zeta(x, y, \xi, \eta)$$

représentant $z+\omega\zeta$ comme une fonction de deux variables complexes.

De cette relation découle

(12) $$z=z(x, y, \xi, \eta), \quad \zeta=\zeta(x, y, \xi, \eta).$$

Si dans la première des ces équations nous supposons, que x, y, z sont les coordonnées courantes, et ξ, η jouent le rôle des paramètres, alors cette équation définit une famille de surfaces, dépendante de deux paramètres. De même manière supposons, que dans la seconde équation les ξ, η, ζ sont les coordonnées courantes, et x, y — les paramètres; nous obtenons donc, la deuxième famille des surfaces, dépendant des paramètres x, y. En tenant compte, que $x+\omega\xi$, $y+\omega\eta$, $z+\omega\zeta$ sont les coordonnées complexes de „deux-points", nous voyons, que l'équation (11) définit une variété de „deux-points" dans l'espace et un „réseau" correspondant, qui consiste dans ce cas de deux familles de surfaces. Donc, si nous avons une relation entre trois variables réelles

(13) $$z=F(x, y),$$

alors, l'extension de cette équation au domaine complexe signifie de „plonger" l'image géométrique de (13) dans la famille double des surfaces, définies par les equations (12). Par exemple, l'équation

$$a(x+\omega\xi)+b(y+\omega\eta)+c(z+\omega\zeta)+d=0,$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles, au point de vue géométrique présente une variété linéaire de „deux-points", contenant en particulier le plan réel $ax+by+cz+d=0$.

3. Quelques propositions simples attachées à un espace quasi-euclidien. Les racines de l'unité représentent un instrument algébrique utile pour la construction des fonctions et des équations spéciales. Beaucoup d'ouvrages sont consacrés, par exemple, aux fonctions de P. Appell, généralisant des fonctions circulaires ou hyperboliques, aussi à l'équation de P. Humbert, analogue à l'équation de Laplace. Au fond de ces constructions se trouvent les racines de l'unité.

Il est connu*, que l'équation d'Humbert et les fonctions d'Appell sont liées avec des divers éléments d'un espace quasi-euclidien, comme, par exemple, „la distance au sens d'Appell", „les directions orthogonaux au sens d'Appell" etc.

Dans ce n°, en utilisant les racines cubiques de l'unité, nous introduisons la notion de „courbure au sens d'Appell", analogue à la courbure ordinaire de la courbe plane et nous montrons que le long des lignes $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ de surface

$$(14)\qquad x=rP(u,v),\ \ y=rQ(u,v),\ \ z=rR(u,v),\ \ r-\text{constante}$$

où $P(u,v)$, $Q(u,v)$, $R(u,v)$ — les fonctions d'Appell, la courbure quasi-euclidienne est constante. En outre, nous obtenons une formule simple pour la „réctification au sens d'Appell" des courbes gauches d'une classe particulière.

Soit

$$(15)\qquad x=f(t),\quad y=\varphi(t),\quad z=\psi(t)$$

les équations d'une courbe quelconque. Considérons l'expression**

$$(16)\qquad a=\frac{1}{3}\ln\left[\left(1+\frac{y'}{x'}+\frac{z'}{x'}\right)\left(1+\omega\frac{y'}{x'}+\omega^2\frac{z'}{x'}\right)^{\omega}\left(1+\omega^2\frac{y'}{x'}+\omega\frac{z'}{x'}\right)^{\omega^2}\right]$$

où $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, x', y', z' les dérivées par rapport de t. Par sa construction algébrique cette expression est analogue à la fonction $\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}$, (dans la représentation logarithmique). Si $d\sigma$ est „l'élément linéaire au sens d'Appell", à savoir

$$(17)\qquad d\sigma=\sqrt[3]{x'^3+y'^3+z'^3-3x'y'z'}\,dt,$$

on peut définir „la courbure au sens d'Appell" de la courbe (15) au point $M(t)$ par l'expression suivante

$$(18)\qquad K=\frac{da}{d\sigma}.$$

* Voir, par exemple, [2]. Dans un article [11], publié il y a près de deux ans, M. Roşculeţ a de même indiqué cette liaison.

** Certainement, on suppose que toutes les conditions ont été remplies, afin que les expressions considérées ici conservent leurs sens.

En tenant compte des égalités (16) et (17), le calcul élémentaire nous donne la formule

$$K=\frac{x''(y'^2-x'z')+y''(z'^2-x'y')+z''(x'^2-y'z')}{(x'^3+y'^3+z'^3-3x'y'z')^{4/3}}. \tag{19}$$

Rappelons, maintenant, que les fonctions d'Appell se définissent par la rélation suivante

$$e^{\omega u+\omega^2 v}=P(u,v)+\omega Q(u,v)+\omega^2 R(u,v).$$

Elles sont liées par l'égalité algébrique

$$P^3+Q^3+R^3-3PQR=1$$

et, par conséquent, les équations (14) représentent une surface de troisième ordre

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=r^3,$$

pour laquelle, comme on sait, les courbes $u=\text{const}$ et $v=\text{const}$ sont des lignes asymptotiques.

Puisque les fonctions d'Appell satisfont aux rélations différentielles

$$\frac{\partial P}{\partial u}=\frac{\partial R}{\partial v}=\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}=Q, \qquad \frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}=R,$$

$$\frac{\partial R}{\partial u}=\frac{\partial Q}{\partial v}=\frac{\partial^2 Q}{\partial u^2}=P,$$

l'application de la formule (19) nous donne immédiatement, que le long des lignes $v=\text{const}$

$$K_n=\frac{1}{r}$$

et le long des $u=\text{const}$ $K_v=0$.

Puisque le long des $v=\text{const}$ nous avons $\frac{du}{d\sigma}=\frac{1}{r}$, alors, en choisissant la valeur initiale de manière convenable, nous pouvons écrire

$$\sigma=ru.$$

Cette égalité exprime pour des lignes mentionnées une propriété quasi-euclidienne, analogue à la propriété de l'arc de circonférence.

Passons à une autre question. Considérons une famille des plans

$$xA(t)+yB(t)+zC(t)=f(t), \tag{20}$$

dépendante d'un paramètre t où $f(t)$ est la fonction donnée et $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ sont définies par les égalités

$$A(t)=P(t,a),\ B(t)=Q(t,a),\ C(t)=R(t,a),\ a\text{—constante}.$$

Par le calcul simple on peut établir une formule pour „la réctification au sens d'Appell" d'arête de rébroussement de surface développable — envelloppe de famille (20).

En effet, la dérivation successive de l'équation (20) et la solution du système correspondant nous donne les équations d'arête de rebroussement

$$
\begin{aligned}
& x=f(t)A(-t)+f'(t)B(-t)+f''(t)C(-t),\\
(21) \qquad & y=f(t)C(-t)+f'(t)A(-t)+f''(t)B(-t),\\
& z=f(t)B(-t)+f'(t)C(-t)+f''(t)A(-t).
\end{aligned}
$$

Donc, pour le cube „d'élément linéaire au sens d'Appell", nous avons

$$
d\sigma^3=dx^3+dy^3+dz^3-3dx\,dy\,dz=
$$

$$
[(f'-f'')^3+(f''-f)^3+(f'''-f')^3-3(f'-f')(f''-f)(f'''-f')]\,dt^3
$$

et, par conséquent, l'arc quasi-euclidien de la courbe (21) est donné par la formule

$$
(22) \quad \sigma=\int\sqrt[3]{(f'-f'')^3+(f''-f)^3+(f'''-f')^3-3(f'-f'')(f''-f)(f''-f')}\,dt
$$

analogue à la formule connue de Legendre pour la rectification d'enveloppe de la famille des droites

$$
x\cos t+y\sin t=f(t).
$$

Si la fonction $f(t)$ satisfait à la condition $f''(t)-f(t)=0$, alors dans ce cas la formule (22) donne immédiatement

$$
\sigma=f(t)-f'(t)+c.
$$

A la fin, nous voulons attirer l'attention sur un problème, attaché à un resultat de L. Ilieff sur la distribution des zéros d'une classe de polynomes. Soit $p(z)$ le polynome, dont les zéros sont situés dans la bande $\alpha\leq R(z)\leq\beta$. Si $a>0$ et $f(t)$ est une fonction croissante dans l'intervalle $(0, a)$, alors, comme le montra L. Ilieff [6], les zéros des polynomes

$$
\int_0^a f(t)[p(z+t)+p(z-t)]\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^a f(t)[p(z+t)-p(z-t)]\,dt
$$

sont situés dans la même bande.

Au point de vue adopté dans notre article il est intéressant, qu'est ce qu'on peut dire sur la distribution des zéros des polynomes

$$
\int_0^a f(t)[p(z+t)+p(z+\omega_k t)+\cdots+p(z+\omega_k^{k-1}t)]\,dt,
$$

$$
\int_0^a f(t)[p(z+t)+\omega_k^{k-1}p(z+\omega_k t)+\cdots+\omega_k p(z+\omega_k^{k-1}t)]\,dt,
$$

$$\int^{a} f(t)\,[p(z+t)+\omega_k p(z+\omega_k t)+\cdot \qquad +\omega_k^{k-1} p(z+\omega_k^{k-1} t)]\,dt,$$

$$\omega_k = e^{\frac{2\pi i}{s}},$$

les conditions mentionnées ci-dessus se conservent ?

Reçu le 6. 2. 1957

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Dallmann, Vom Pfeil zur Hermiteschen Parabel. Wiss. Z. Friedrich-Schiller Univ. Jena. Math. naturwiss. Reihe, B. 4 (1954—1955), S. 661.
2. J. Devisme, Sur un espace quasi-euclidien à trois dimensions attaché à l'équation de M. P. Humbert. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 195 (1932) p. 1059.
3. K. Endl, Sur une classe de polynomes orthogonaux généralisant ceux de Laguerre et de Hermite. Comptes rendus de l'Ac. Sc. Paris, t. 241 (1955), p. 723.
4. J. Favard, Sur les zéros réels des polynomes. Bull. Soc. Math. France, t. 59 (1931), p. 229.
5. J. Favard, Les théorèmes de la moyenne pour les polynomes, Paris, 1936.
6. L. Ilieff, The Tôhoku math. Journal. t. 45 (1939), p. 259.
7. L. Locher-Ernst, Über das Imaginäre in der Geometrie. Elemente der Mathematik, B. 4 (1949), p. 97.
8. L. Locher-Ernst, Die zwölf Nabelpunkte des Ellipsoides. Elemente der Mathematik, B. 10 (1955), p. 49.
9. P. Montel, Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques. Bull. Soc Math. France, t. 58 (1930), p. 105.
10. P. Montel, Sur une formule de Darboux et les polynomes d interpolation. Annali della R. Scuola Normale Supériore di Pisa, v. I (1932), p. 371.
11. M. Roşculeţ, O teorie a functiilor de o variabilă hipercomplexă in spaţiul cu trei dimensiuni. Studii şi cercetări matematice, t. 5 (1954), p. 361.
12. A. Sharma, On a generalisation of Legendre polynomials. Bull. of the Calcutta Math. Soc., v. 40 (1948).
13. A. Kharadzé, Sur un opérateur fonctionnel et sur la généralisation des polynomes de Legendre. Comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 201 (1935), 923.
14. А. Харадзе, Об одном обобщении формулы Симпсона. Труды Тбилисского Госуд. Университета им. Сталина, т. 56 (1955), 23.
15. А. Харадзе, Об одной наглядно-геометрической интерпретации комплексных координат на плоскости и в пространстве. Труды Тбил. Пед. Инст. им Пушкина, т. 9 (1952).
16. L. Tchakaloff, Sur le théorème des accroissements finis. Comptes rendus Ac Sc. Paris, t. 192 (1931), 32.
17. L. Tchakaloff, Sur la structure des ensembles linéaires définis par une certaine propriété minimale. Acta Mathematika, t. 63 (1934), 77.
18. Л. Чакалов, Теоремата за срѣдната стойность и нейнитѣ обобщения, приложени върху реални полиноми. Списание на Бълг. Академия на наукитѣ, Кн. 47 (1934), 105.

НЯКОИ ЗАБЕЛЕЖКИ ВЪРХУ ЕДИН НАЧИН НА ОБОБЩЕНИЕ, ОСНОВАН НА ПРИЛОЖЕНИЕТО НА КОРЕНИТЕ НА ЕДИНИЦАТА

А. К. Харадзе (Тбилиси)

РЕЗЮМЕ

В работата се дава приложение на метода на Чакалов-Фавар за уточняване на обобщената формула на Кавалиери-Симпсон (5) в семейството на реалните полиноми. Използуват се свойства на корените на единицата за специалния процес на ортогонализация по лъчите на една звезда.

По-нататък, използувайки кубичните корени на единицата, авторът въвежда понятията за комплексни проекции на бивектора и комплексни координати на „двоеточия", с цел да подходи към геометрическата теория на комплексните функции от нова гледна точка.

Накрая се разглеждат някои квази-евклидови обекти в приложение към определени класи пространствени криви. За основа и тук са приети кубичните корени на единицата.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОБОБЩЕНИЯ, ОСНОВАННОМ НА ПРИМЕНЕНИИ КОРНЕЙ ИЗ ЕДИНИЦЫ

А. К. Харадзе (Тбилиси)

РЕЗЮМЕ

В работе дано применение метода Чакалова-Фавара к уточнению обобщенной формулы Кавальери-Симпсона (5) в семействе действительных многочленов. Здесь используются свойства корней из единицы для специального процесса ортогонализации по лучам звезды.

Далее, пользуясь кубическими корнями из единицы, автор вводит понятия о комплексных проекциях бивектора и комплексных координатах „двоеточия", с целью подхода к геометрической теории функций комплексного переменного с новой точки зрения.

Наконец, рассматриваются некоторые квази-эвклидовы объекты в применении к определенным классам пространственных кривых. За основу и здесь приняты кубические корни из единицы.