

НЯКОИ УСЛОВИЯ ЗА АНАЛИТИЧНА НЕПРОДЪЛЖИМОСТ НА СТЕПЕННИТЕ РЕДОВЕ

Л. Илиев

Като обобщение на резултатите на Г. Сегьо от неговите работи [1] и [2] за аналитичната непродължимост на степенни редове с ограничени редици на коефициентите, в работите [3] и [4] установих някои теореми за степенни редове от вида

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

които удовлетворяват условието

$$(\alpha) \quad |a_n| = O(n^\alpha).$$

Аналогични резултати бяха получени за някои класи от Дирихлетови редове [5] и за развията по полиноми на Фабер [6].

Тук ще бъде установен един нов резултат за редовете (1).

§ 1

Предварително ще формулираме някои известни резултати.

1. Нека $0 < \varphi_0 < \pi$, $R > 1$ и $\delta \geq 0$. Да означим с Γ_δ контура, който е съставен от дъгите:

$$z = Re^{i\varphi}, \quad -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0;$$

$$z = re^{\pm i\varphi_0}, \quad 1 - \delta \leq r \leq R;$$

$$z = (1 - \delta)e^{i\varphi}, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0.$$

От работите на Г. Сегьо [2] и Х. Клаус [7] е известна следната **Теорема (С)**. Има една област G , съдържаща контура Γ_0 , за която съществува една редица полиноми $Q_0(z), Q_1(z), \dots, Q_r(z), \dots$ от вида

$$Q_r(z) = q_r^{(r)} + \frac{q_{r-1}^{(r)}}{z} + \dots + \frac{q_1^{(r)}}{z^{r-1}} + \frac{1}{z^r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

едно ϑ , $0 < \vartheta < 1$ и един индекс r_0 , така че при $r \geq r_0$ е изпълнено неравенството

$$(\vartheta) \quad |Q_r(z)| < \vartheta^r,$$

щом z принадлежи на G .

При достатъчно малки стойности на $\delta > 0$ всяка крива Γ_δ ще принадлежи на областта G , така че за $z \in \Gamma_\delta$ ще бъде валидно неравенство (ϑ) .

2. В работата [3] беше установено следното обобщение на една теорема на Riesz:

Теорема (И). Нека редът (1) удовлетворява условието (a) при $a \geq 0$. Ако функцията $f(z)$ е аналитична вътре и върху кривата Γ_n , съществува една независима от z и n константа M и едно число n_0 , така че

$$(a, M) \quad \left| \frac{f(z) - s_n(z)}{n^a z^{n+1}} \right| < M,$$

гдето

$$s_n(z) = \sum_{n=0}^n c_n z^n$$

при всяко $z \in \Gamma_n$ и $n \geq n_0$.

§ 2

1. Да означим с $E(a)$ класата на степенните редове

$$(2, 1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

които удовлетворяват условието

$$(2, a) \quad |c_n| = O(n^a),$$

гдето a е някое реално число.

Ако редицата $\{b_n\}$ удовлетворява зависимостите

$$(2, 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$$

и

$$(2, a, b) \quad 0 < l \leq \left| \frac{b_n}{n^a} \right| \leq L,$$

гдето l и L не зависят от n , да положим

$$c_n = d_n b_n.$$

В такъв случай редът (2, 1) приема вида

$$(2, 1') \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n b_n z^n,$$

гдето редицата $\{d_n\}$ е ограничена. Ако тя има точка на съгъстяване отлична от нула, редът (2, 1) ще има радиус на сходимост единица.

2. Нека редът (2, 1) принадлежи на класата $E(\alpha)$ при някое $\alpha \geq 0$ и функцията $f(z)$, определена от него, да е аналитично продължима вън от единичния кръг. Можем да предположим, че точката $z=1$ е точка на регулярност. В такъв случай ще има един контур Γ_{δ_0} , $\delta_0 > 0$, така че функцията $f(z)$ да бъде аналитична за точките вътре и върху Γ_{δ} , гдето $0 < \delta \leq \delta_0$. Да изберем δ така малко, щото съгласно теорема (C) и забележката към нея неравенството (ϑ) да бъде изпълнено за всяко $z \in \Gamma_{\delta}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число. Да изберем числото r така голямо, щото

$$\frac{M l_{\delta}}{2\pi} \vartheta^r < \varepsilon,$$

гдето ϑ е числото от теорема (C), M е числото от (α, M) и l_{δ} е дължината на контура Γ_{δ} .

В такъв случай при $n-r > r_0$ намираме:

$$\begin{aligned} & |c_{n-r} q_r^{(r)} + c_{n-r+1} q_{r-1}^{(r)} + \dots + c_{n-1} q_1^{(r)} + c_n| \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_{\delta}} \frac{f(z) - s_n(z)}{z^{n+1}} Q_r(z) dz \right| \leq \varepsilon n^{\alpha}. \end{aligned}$$

Така доказахме

Теорема $E(\alpha)$. Нека редът (2, 1) принадлежи на класата $E(\alpha)$ при $\alpha \geq 0$. Ако функцията $f(z)$ е аналитично продължима вън от единичния кръг, на всяко $\varepsilon > 0$ съответствува едно r , независимо от n , и едно n_0 , така че при $n > n_0$ е изпълнено неравенството

$$(2, \varepsilon, \alpha) \quad |c_{n-r} q_r^{(r)} + c_{n-r+1} q_{r-1}^{(r)} + \dots + c_{n-1} q_1^{(r)} + c_n| < \varepsilon n^{\alpha},$$

гдето числата $q_r^{(r)}$ зависят само от ε .

С въведените означения тази теорема може да се изкаже в следната форма, в която беше установена в работата [3]:

Теорема. Нека редът (2, 1') принадлежи на класата $E(\alpha)$ при $\alpha \geq 0$. Ако функцията $f(z)$ е аналитично продължима вън от единичния кръг, на всяко $\varepsilon > 0$ съответствува едно r , независимо от n , и едно n_0 , така че при $n > n_0$ е изпълнено неравенството

$$(2, \varepsilon) \quad |d_{n-r} q_r^{(r)} + d_{n-r+1} q_{r-1}^{(r)} + \dots + d_{n-1} q_1^{(r)} + d_n| < \varepsilon,$$

гдето числата $q_r^{(r)}$ зависят само от ε .

§ 3

Ще докажем следната

Теорема (A). Нека редът (2, 1') принадлежи на класата $E(\alpha)$. Ако съществува една безкрайна редица от индекси $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots$, така че

$$(3, 1) \quad d_{n_r-k} = d_{n_{r+1}-k}, \quad k=1, 2, \dots, p_{n_r},$$

гдето $p_n \rightarrow \infty$, когато $n_r \rightarrow \infty$ и

$$(3, d) \quad |d_{n_r} - d_{n_{r+1}}| \geq d > 0,$$

то той е аналитично непродължим във от единичната окръжност. Твърдението остава вярно, ако вместо условието (3, 1) е изпълнено условието

$$(3, 1') \quad \lim_{r \rightarrow \infty} d_{n_r - k} = \lim_{r \rightarrow \infty} d_{n_{r+1} - k}, \quad k = 1, 2, \dots, p_{n_r}.$$

Доказателство. Нека $\alpha \geq 0$. Ако допуснем, че редът (2, 1') е продължим във от единичната окръжност, можем да приложим неравенството (2, ϵ) за $2\epsilon = d$, $n = n_r > n_0$ и $n = n_{r+1}$. Съгласно (3, 1) получаваме

$$(3, d, *) \quad |d_{n_r} - d_{n_{r+1}}| < 2\epsilon = d,$$

противно на условието (3, d). Ако $\alpha < 0$ твърдението следва от до-казаното, като вземем предвид, че функциите $f(z)$ и $\frac{d^l z^l f(z)}{dz^l}$, гдето $l = [\alpha] + 1$ са едновременно продължими или непродължими във от единичната окръжност.

Очевидно неравенство (3, d, *) следва от (2, ϵ) и когато вместо (3, 1) е изпълнено условието (3, 1'), с което теоремата е доказана напълно.

В цитираните работи с помощта на теорема $E(\alpha)$ бяха пренесени резултатите на Сегьо и за класата $E(\alpha)$. Тук ще отбележа, че като се следва пътя на Сегьо, може да се докаже и следната

Теорема (B). Нека редът (2, 1') принадлежи на класата $E(\alpha)$. Ако числата на редицата $\{d_n\}$ вземат краен брой стойности $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ с изключение на една безкрайна подредица $\{d_{n_r}\}$, която има отлично от нула разстояние до числата $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, k$ и за която $\lim_{r \rightarrow \infty} (n_r - n_{r-1}) = \infty$, то редът (2, 1') е аналитично непродължим във от единичната окръжност.

Постъпила на 30. 8. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. G. S z e g ő. Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Sitzungsberichte der Preuss. Akad. der Wiss. (1922), 88—91.
2. G. S z e g ő. Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen. Math. Annalen, 87 (1922), 90—111.
3. Л. Илиев. За особените точки върху периферията на кръга на сходимост на един степенен ред. Год. Соф. У-т, Физ.-мат. ф-т, 41 (1944—45), 31—42.
4. L. I l i e f f. Analytisch nichtfortsetzbare Potenzreihen. C. R. Acad. Bulg. des sci. 1 (1948), 25—28.
5. Л. Илиев. За особените точки в околността на абсцисата на сходимост на една класа Дирихлетови редове. Год. Соф. У-т, Физ.-мат. ф-т, 43 (1946—47), 239—267.
6. Л. Илиев. Ряды по многочленам Фабера, коэффициенты которых принимают конечное число значений. ДАН СССР, 90 (1953), 499—503.
7. H. C l a u s. Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen. Math. Zeitschrift, 49 (1944), 161—191.

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕПРОДОЛЖИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Л. Илиев

РЕЗЮМЕ

Пусть $E(\alpha)$ означает класс степенных рядов

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

удовлетворяющих условию

$$|c_n| = O(n^\alpha),$$

где α произвольное действительное число.

Если для последовательности $\{b_n\}$ выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$$

и

$$0 < l \leq \frac{b_n}{n^\alpha} < L,$$

положим

$$c_n = d_n b_n.$$

Таким образом получаем,

$$(1') \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n b_n z^n,$$

где последовательность $\{d_n\}$ ограниченная.

Теорема: Пусть ряд (1') принадлежит классу $E(\alpha)$. Если существует последовательность $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n_r - k} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n_r + 1 - k}, \quad k = 1, 2, \dots, p_{n_r},$$

где $p_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $d_{n_r} - d_{n_r + 1} \geq d > 0$, то ряд (1') аналитически непродолжим вне единичного круга.

EINE BEDINGUNG FÜR DIE NICHTFORTSETZBARKEIT DER POTENZREIHEN

L. Iliev

ZUSAMMENFASSUNG

Es bezeichne $E(\alpha)$ die Klasse der Potenzreihen

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

die der Bedingung

$$|c_n| = O(n^\alpha),$$

worin α eine beliebige reelle Zahl bedeutet, genügen.

Wenn die Folge $\{b_n\}$ den Bedingungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$$

und

$$0 < l \leq \frac{|b_n|}{n^\alpha} \leq L$$

genügt, setzt man

$$c_n = d_n b_n.$$

Es ist also

$$(1') \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n b_n z^n,$$

worin die Folge $\{d_n\}$ beschränkt ist.

In der vorliegenden Arbeit wird der folgende Satz bewiesen:

Die Potenzreihe (1') gehöre zur Klasse $E(\alpha)$. Wenn eine unendliche Folge $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots$ existiert, so daß die Beziehungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} d_{n_r - k} = \lim_{r \rightarrow \infty} d_{n_r + 1 - k}, \quad k = 1, 2, \dots, p_{n_r},$$

mit $p_{n_r} \rightarrow \infty$ für $n_r \rightarrow \infty$, und

$$|d_{n_r} - d_{n_r + 1}| \geq d > 0$$

gelten, so ist diese Potenzreihe über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar.

Die verwendete Methode gestattet es auch den folgenden Satz zu beweisen:

Die Potenzreihe (1') gehöre zur Klasse $E(u)$. Die Zahlen der Folge $\{d_n\}$ mögen nur endlich viele verschiedene Werte $d_1, d_2, \dots, d_k$ annehmen, mit Ausnahme einer Unterfolge $\{d_{n_v}\}$, die eine von 0 verschiedene untere Entfernung von den Zahlen $d_k, k=1, 2, \dots, s$ hat und $\lim_{v \rightarrow \infty} (n_v - n_{v-1}) = \infty$ ist. Dann ist (1') nicht über den Einheitskreis fortsetzbar.