

ТРАЕКТОРИИ НА ЕДНА СИМЕТРИЧНА ВИХРОВА ДВОЙКА ЗАД КРЪГОВ ЦИЛИНДЪР И ВРЪЗКАТА ИМ СЪС СЪПРОТИВЛЕНИЕТО НА ЦИЛИНДЪРА

Б. Л. Долапчиев и Б. Л. Сендов

СЪДЪРЖАНИЕ

§ 1. Определяне и построение на траекториите на вихровата двойка

1. Модел на L. Förrl
2. Стационарно състояние на вихровата двойка
3. Интегриране на системата диференциални уравнения на движение на вихровата двойка
4. Аналитично изследване на фамилията траектории
5. Построение и кинематично тълкуване на вихровите пътища

§ 2. Върху формулата за съпротивлението на цилиндъра и нейното тълкуване

6. Бележки върху извода на формулата на Förrl за съпротивлението
7. Тълкуване на Förrl'овата формула за съпротивлението
8. Друго тълкуване на формулата за съпротивлението

Въпросът за механичните отнасяния на една единствена, вече образувана симетрична вихрова двойка зад кръгов цилиндър, паралелно обтичан от идеален флуид, е поставен и разгледан от L. Förrl [1] и H. Rubach [2] твърде отдавна, но и до днес е останал незадоволително решен. Въпреки това резултатите на Förrl и Rubach се срещат в редица курсове и енциклопедии по хидродинамика [3] — [6], някъде с известни грешки и непълноти, другаде с неточни физични тълкувания, които се правят било от чисто теоретичните разглеждания на математическия модел на Förrl, било от опитно-теоретичните изследвания и приближени пресмятания на фотографическия модел на Rubach. При това, като се изключи една бележка на S. Tomotika и N. Sugawara [7]*, други изследвания на този класически въпрос не се срещат.**

* Тази бележка изправя една техническа грешка във формулата на Förrl за съпротивлението, за която авторите вземат повод от една работа на W. G. Bick-

В настоящата работа авторите си поставят за задача да дадат точно и пълно решение на проблема „цилиндър-вихрова двойка“, което да хвърли светлина както върху кинематиката на вихровата двойка, така също и върху свързаното с движението ѝ изменение на съпротивлението на цилиндъра. Едновременно с това в тази работа се утвърждават и разширяват ония от резултатите на Förrl, които следват единствено по теоретичен път от въведения модел, без да се смесват с каквито и да било факти, извлечени от наблюдаваното явление.

Що се отнася до обсега на приложение на тези резултати, авторите считат, че с настоящото разглеждане той ще бъде разширен. От експерименталните проверки ще се види докъде и доколко избраният модел е годен и за практически цели. Независимо от тази страна на въпроса обаче хидродинамичният проблем, който се разглежда тук, е сам по себе си не лишен и от самостоятелно теоретично значение, тъй като той представя един пример, където е възможно точно затворено решение и геометрично илюстриране.

§ 1. ОПРЕДЕЛЯНЕ И ПОСТРОЕНИЕ НА ТРАЕКТОРИИТЕ НА ВИХРОВАТА ДВОЙКА

1. Модел на L. Förrl

Комплексният потенциал

$$(1) \quad F(z) = U \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln \frac{(z - z_1) \left(z - \frac{1}{z_1} \right)}{(z - \bar{z}_1) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_1} \right)}$$

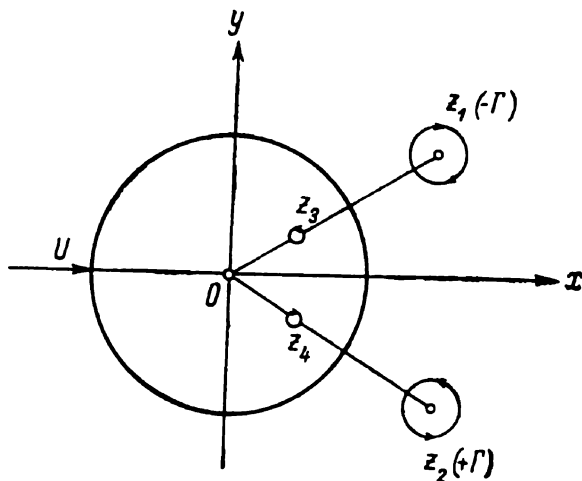
представя, както се знае, следното двуизмеримо безизворно течение на един идеален флуид (невискозен и несвиваем): паралелно обтичане на един прав кръгов цилиндър с радиус единица, перпендикулярно на образуващите му, със скорост U в безкрайността по направление на положителната ос Ox , гдето сравнителната декартова координатна система Oxy е свързана с цилиндъра при наличие зад него на една симетрична спрямо Ox вихрова двойка с афикси z_1 и $z_2 = \bar{z}_1$ и абсолютна стойност на постоянната циркулация, равна на Γ , отрицателна над и положителна под оста Ox . Спомагателната инверзно-огледална вихрова двойка с афикси $z_3 = \frac{1}{z_1}$ и $z_4 = \frac{1}{\bar{z}_1}$ гарантира, съгласно теоремата на W. Thompson, съхранението на твърдото ограничение (линия на тока 'z' 1).

Teu [8], която се занимава също с вихровото съпротивление на цилиндъра, но никъде не се позовава на работата на Förrl, а се позовава на едно разглеждане на W. Müller [9] върху същия въпрос, оказало се също така погрешно, макар да е следван един коректен метод на M. L. a g a l l y [10].

Междувременно (след предаване на работата ни за публикуване) се натъкнахме на една статия от E. T. S. Walton [11], в която е дадено друго решение само на кинематическия проблем, в която обаче траекториите на вихровата двойка са представени не съвсем пълно и точно (срв. стр. 223). *Бел. при кор.*

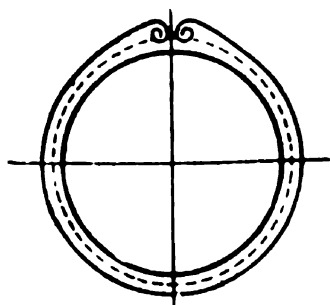
Разположението на вихрите спрямо цилиндъра и координатната система са показани на фиг. 1.

Решението на проблема „цилиндър-вихрова двойка“ се съдържа в потенциала (1), който именно нарекохме „модел“. Чрез този модел се интерпретира действителното обтичане на един реален цилиндър от реален флуид. При скоростите, при които става разглежданото обтичане (при опитите на Rubach $U = 2,6$ м/сек, рад.цил. = 3,5, взет за единица мярка), съответстващи на големи Re-числа, все пак вискозитетът е причината за появата на един тънък граничен слой около цилиндъра, в резултат на чието разкъсване близо до оста Ox (фиг. 2, а и б) се навиват два вихрови цилиндъра, симетрично над и под нея и след „узряване“ на тези два вихра, при достатъчен интензитет на въртене (циркулация), става откъсването им и постепенното им отдалечаване от цилиндъра.



Фиг. 1

поради продължаващото обтичане на цилиндъра и триенето на флуида о стените му следва образуването и на други „секундарни“ вихри, една част от които „подхранват“ първата вихрова двойка, а друга част служат за образуване на други следващи двойки. Опитът показва обаче, че следствие наличиостта на реални причини симетричността на явлението се нарушава, единият вихър на първата вихрова двойка изпреварва другия, поради което вихровата двойка един вид „се прекатурва“, което дава повод понататък за несиметрично почифтно откъсване на вихрите във вид на махалообразно люление, така че вихрите се нареждат в така наречената шахматна Карманова вихрова улица.

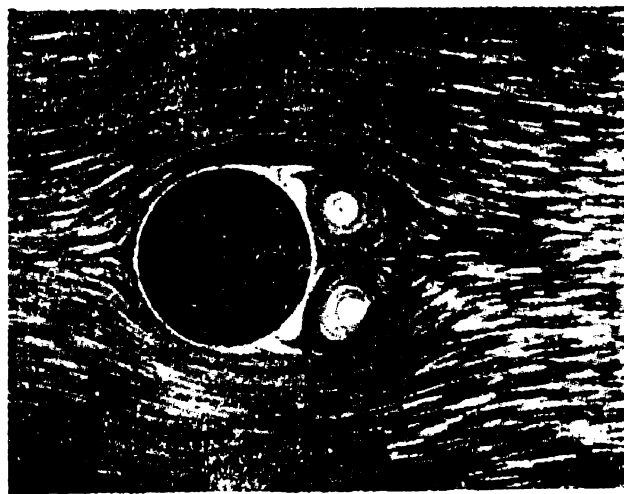


Фиг. 2

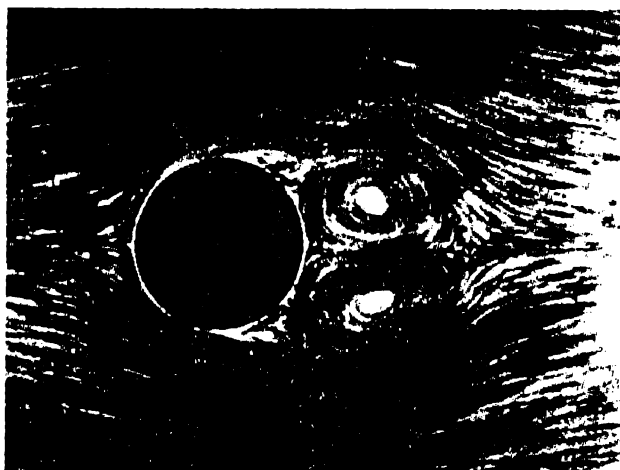
Като се абстрахираме от генезиса на вихрите и се задоволим само с една напълно образувана симетрична вихрова двойка в потенциалното течение около цилиндъра, при фиксирана циркулация, което съответствува на един начален стадий на вихрообразуване зад цилиндъра,

нашата задача, така както е била поставена и частично решена от Förpl и Rubach с въведения модел, е: да се определят пътищата на вихровата двойка в течения идеален флуид зад цилиндъра, а така също да се намери динамичното налягане, което цилиндърът изпитва вследствие налягането, индуцирано от наличието на тази вихрова двойка, при различните ѝ положения по траекториите. Задачата има и практическо значение, тъй като е възможно запазването на тече-

ние само с една вихрова двойка, чийто интензитет през не продължително време остава приблизително постоянен.



Фиг. 2 а



Фиг. 2 б

2. Стационарно състояние на вихровата двойка (Крива на Фьопъл)

Наред с моменталната картина на течение, построена от Rubach и съответстваща на системата линии на тока (фиг. 3)

$$(2) \quad \Psi(x, y) = \text{const.},$$

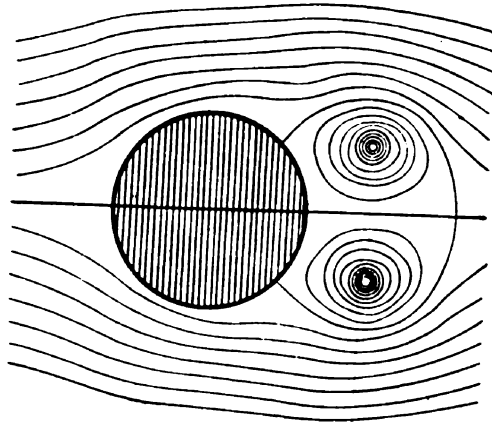
гдето

$$(3) \quad F(z) = \Phi - i\Psi,$$

ние познаваме и оная крива, намерена от Фьопъл, върху която вихровата двойка може да бъде в релативен покой спрямо неподвижния цилиндър. За целта трябва да е изпълнено условието

$$(4) \quad w(z_1) = \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_1} = u_1 - iv_1 = 0.$$

При това в (4) трябва да се изостави членът $\frac{1}{z-z_1}$, който за $z=z_1$ няма смисъл, тъй като не съществува самоиндукция на един вихър



Фиг. 3

върху собствената му постъпателна скорост. Като се изпусне и индексът (1) , от (1) и (4) се намира

$$(5) \quad U \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{Ii}{2\pi} \left(\frac{1}{z - \frac{1}{z}} - \frac{1}{z - z} - \frac{1}{z - \frac{1}{z}} \right) = 0.$$

Като се отделят реалната и имагинерната част на последното равенство, се получава следната система уравнения*, хомогенни спрямо U и Γ ,

$$(6) \quad \begin{cases} U \left(1 - \frac{x^2 - y^2}{r^4} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} y \left\{ \frac{r^2 + 1}{(r^2 - 1)^2 + (2y)^2} - \frac{1}{r^2 - 1} - \frac{1}{2y^2} \right\} = 0 \\ -2U \frac{xy}{r^4} - \frac{\Gamma}{2\pi} x \left\{ \frac{r^2 - 1}{(r^2 - 1)^2 + 4y^2} - \frac{1}{r^2 - 1} \right\} = 0. \end{cases}$$

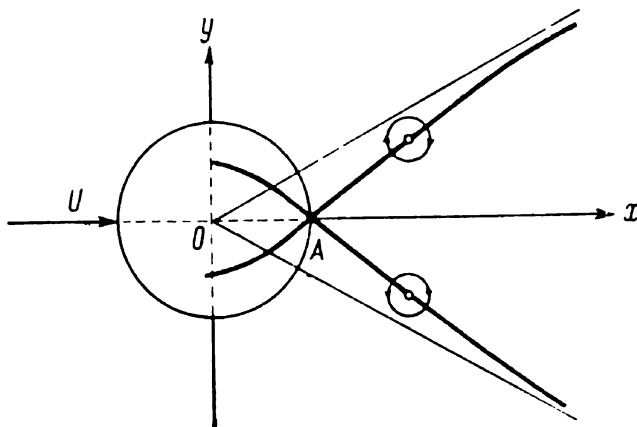
Чрез елиминация на U и Γ за търсеното геометрическо място на вихрите в покой спрямо цилиндъра Фьопъл намира кривата (фиг. 4),

$$(7) \quad \pm 2y = r - \frac{1}{r}$$

към която, както се вижда непосредствено, трябва да се прибави и оста Oy , т. е. $x=0$, върху която вихровата двойка, поставена извън цилиндъра, също може да остане в покой.

* (а не дадената от Фьопъл, на която системата (6) се редуцира едва след като се вземе предвид връзката (7)).

Да обърнем внимание на дадените от Фьопъл характеристики на кривата (7), а именно: наклонът на кривата в точката $A(1,0)$ спрямо оста Ox , равен на 45° , изпъкналостта на кривата — нагоре (в първи квадрант) и асимптота през началото под ъгъл 30° спрямо оста Ox . Очевидно е оттук погрешното възпроизвеждане, дадено в



Фиг. 4

„Теоретическая гидродинамика“ от Кочин-Кибель-Розе (1948), повторено и в немския превод на същата книга [4]. Трябва да се подчертае освен това, че въз основа на зависимостта (7) и второто уравнение на системата (6) за циркулацията се получава изразът

$$(8) \quad \Gamma = 4\pi U y \left(1 - \frac{1}{r^4}\right).$$

Фьопъл счита, че полученият израз показва изменението на циркулацията на кой да е от вихрите на вихровата двойка с отдалечението ѝ по Фьопълвата крива от цилиндъра. Тъй като циркулацията бе приета отнапред за постоянна (идеален флуид), формула (8) означава собствено, че вихровата двойка ще бъде в покой в положението (y, r) върху Фьопълвата крива само при условие, че циркулацията, която е взета отнапред, има стойност

$$(9) \quad \Gamma = 4\pi U y \left(1 - \frac{1}{r^4}\right).$$

С други думи, формула (8) не е, както погрешно счита Фьопъл — поради което приема своята крива за траектория на вихрите, — закон за изменение на циркулацията, а е едно от условията за равновесие.

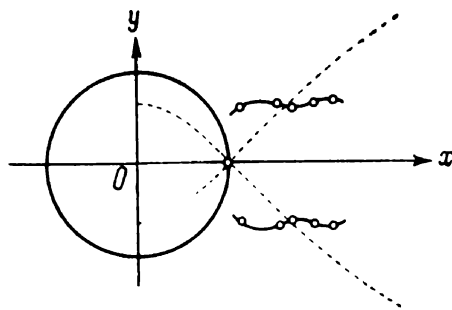
Как се движи вихровата двойка при постоянна циркулация, достига ли и задминава ли Фьопълвата крива, на тези въпроси Фьопъл не е дал отговор. Както той, така и други автори правят следните тълкувания за движението ѝ. Като действителна траектория на вихровата двойка те сочат Фьопълвата крива или приблизително кривата, дадена на фиг. 4, имайки обаче предвид такива нейни възможни положения върху или около нея, които се дължат на поспе-

пенното изменение с времето на големината и на циркулацията ѝ. Но даже и да се изменя циркулацията точно по закона (8), при постановката на нашата задача, изхождайки от модела на Фьопъл, това съвсем не значи, че Фьопълската крива е тяхна траектория. Още по-неточно стои въпросът, когато изменението на циркулацията при движението на вихровата двойка не спазва (8), а е съвсем произволно. Ето защо нашата задача е: при изходния модел с постоянна циркулация да се проследят пътищата на вихровата двойка с времето, т. е. да се намери картината на нейното истинско течение, тъй както би ни я дала една нейна филмова снимка. Преди да сторим това, нека споменем, че Рубах дава приблизително координатите на пет дискретни положения на вихровата двойка от опитни наблюдения, а именно след изминаване на път от 10, 15, 20, 25 и 30 см, при което също така държи сметка и за промените в тези положения, които претърпява големината на циркулацията Γ (срв. с долната таблица).

см	x_1	y_1	U	Γ
10	1,17	0,665	2,6	7,30
15	1,59	0,670		12,73
20	1,73	0,634		16,90
25	2,00	0,665		22,50
30	2,21	0,695		47,50

Тези пет положения, от които две са вляво и три — вдясно от Фьопълската крива (фиг. 5), показват, че вихровата двойка задминава Фьопълската крива (това ще рече: я пресича в положение, за което циркулацията не е подчинена на връзката (8)).

Според Фьопъл, когато вихровата двойка се намира върху кривата (7) и се подложи на симетрични спрямо оста Ox смущения, тя запазва устойчивостта на равновесието си върху нея. Но ако смущенията са несиметрични (антисиметрични), равновесието се оказва нестабилно и вихровата



Фиг. 5

двойка се разтурва, за да даде път на алтернативната Карманова улица.

Показаната на фиг. 5 траектория на вихровата двойка според Рубах обаче също не е извлечена от въведения модел, т. е. теоретично от потенциала (1), а е пресметната при един смесен, теоретико-опитен път с помощта и на фотографически снимки на действителната картина, поради което тя не може да се счита нито за

теоретична, нито за действителна картина на движение на единствената вихрова двойка с постоянна циркулация в идеален флуид. По-долу ние ще дадем чисто теоретичната картина, чието сравнение с фиг. 5 ще ни покаже, че все пак тя е по-близо до Рубаховата, отколкото до Фьопълловата крива, изтълкувана от Фьопъл и от други автори твърде изкуствено за действителна траектория на вихровата двойка.

3. Интегриране на системата диференциални уравнения на движение на вихровата двойка

Разглежданията, които направихме в предната точка, се отнасят всъщност до възможните равновесни положения на вихровата двойка, при които, както ще видим по-късно, цилиндърът не изпитва никакво съпротивление при обтичането му въпреки наличието на вихрова двойка. Движението на вихровата двойка зад цилиндъра се управлява от системата диференциални уравнения от първи ред, получена чрез отделяне на реалната и имагинерна част на израза (написано без индекса ₍₁₎).

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z=z_1} = u - iv = U \frac{z^2 - 1}{z^2} - \frac{\Gamma i}{2\pi} \left(\frac{z}{r^2 - 1} + \frac{i}{2y} - \frac{z}{z^2 - 1} \right).$$

За въпросната система диференциални уравнения имаме

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = U \left(1 - \frac{1}{r^2} + \frac{2y^2}{r^4} \right) - \frac{\Gamma y}{2\pi} \left(\frac{r^2 + 1}{R^2} - \frac{1}{r^2 - 1} - \frac{1}{2y^2} \right), \\ \frac{dy}{dt} = -2U \frac{xy}{r^4} - \frac{\Gamma x}{2\pi} \left(\frac{r^2 - 1}{R^2} - \frac{1}{r^2 - 1} \right), \end{cases}$$

дето сме положили

$$R^2 = (r^2 - 1)^2 + (2y)^2.$$

Досега не ни е познат опит за интегриране на тази на пръв поглед доста комплицирана система диференциални уравнения и за получаване на крайните уравнения на движение на вихрите освен [11]. За интегрирането на (10) ние постъпихме по следния начин:

Умножаваме двете страни на първото уравнение на (10) с x , а тези на второто с y и събираме почленно; така получаваме

$$(11) \quad \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = U \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) x - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{y} \frac{(r^2 - 1)^2}{R^2}$$

Като въведем означението

$$(12) \quad a = \frac{\Gamma}{2\pi U},$$

уравнението (11) става

$$(13) \quad \frac{dr^2}{dt} = U \frac{x}{y} \frac{r^2 - 1}{r^2} - 2yR^2 - ar^2(r^2 - 1)$$

Като подведем под еднакъв знаменател, второто уравнение на системата (10) написваме още така

$$(14) \quad -\frac{dy}{dt} = 2U \frac{xy}{r^4(r^2-1)} \frac{(r^2-1)R^2-2ayr^4}{R^2}$$

Чрез почленно разделяне на (13) и (14) получаваме

$$(15) \quad -\frac{dr^2}{dy} = \frac{1}{2} \frac{2yR^2-ar^2(r^2-1)}{R^2(r^2-1)-2ar^4y} \frac{r^2(r^2-1)^2}{y^2}$$

Сега полагаме

$$(16) \quad r^2-1 = \varrho,$$

откъдето (15) става

$$(17) \quad -\frac{d\varrho}{dy} = \frac{1}{2} \frac{2y(\varrho^2+4y^2)-a(\varrho+1)\varrho}{\varrho(\varrho^2+4y^2)-2ay(\varrho+1)^2} \frac{\varrho^2(\varrho+1)}{y^2}.$$

Разделяме двете страни на (17) с $\frac{\varrho^2}{y^2}$ и съответно преобразуваме; написваме

$$(18) \quad -\frac{d\frac{1}{\varrho}}{d\frac{1}{y}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right) \frac{2\left(\frac{1}{y^2} + \frac{4}{\varrho^2}\right) - \frac{a}{y^3}\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)}{\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y^2} + \frac{4}{\varrho^2}\right) - \frac{2a}{y^2}\frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)^2}.$$

Правим нови субституции

$$(19) \quad \frac{1}{\varrho} = Z, \quad \frac{1}{y} = Y,$$

въз основа на които уравнение (18) добива вида

$$(20) \quad \frac{dZ}{dY} = -\frac{1}{2}(1+Z) \frac{2(Y^2+4Z^2)-aY^3(1+Z)}{Y(Y^2+4Z^2)-2aY^2Z(1+Z)^2}$$

Лесно се проверява по-нататък, че в уравнение (20) променливите се отделят; намираме

$$(21) \quad \frac{d\{Y(1+Z)\}}{\{Y(1+Z)\}^2} = \frac{a}{4} \frac{d\{Y^2+4Z^2\}}{Y^2+4Z^2}.$$

Горното уравнение се интегрира непосредствено и дава

$$(22) \quad Y^2+4Z^2 = Ce^{-\frac{4}{aY(1+Z)}},$$

гдето C е интеграционна константа.

Като се върнем чрез (16) и (19) към старите променливи, ще намерим търсеното крайно уравнение на вихровото движение, а именно

$$(23) \quad \frac{1}{y^2} + \frac{4}{(r^2-1)^2} = Ce^{-\frac{4}{ay^{r^2-1}}}$$

Уравнението (23) представя една двупараметрична фамилия от криви линии с параметри a и C .

Наред с тях обаче нека да имаме предвид и граничните криви

$$y=0, \quad x^2+y^2=r^2=1,$$

които се получават при $C=$ и които не можем да разглеждаме като траектории.

Да забележим, че фамилията криви (23) имат реални точки само за $C > 0$.

4. Аналитично изследване на фамилията траектории

а) Особени точки на интегралните криви. Фамилията траектории (23) изследваме само в първия квадрант на течението поради симетричността им спрямо оста Oy , и то извън окръжността $r=1$. Симетричността спрямо оста Oy е очевидна. За да се убедим пък в симетричността на траекториите на двата вихра и спрямо оста Ox , трябва да отбележим, че параметърът a за долния вихър (под оста Ox) има противен знак вследствие обратния знак на циркулацията Γ .

При фиксиран параметър a получената еднопараметрична система интегрални криви (23) е общият интеграл на диференциалното уравнение

$$(24) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y)}{u(x, y)},$$

дето u и v са дадени чрез (10). Тъй като u и v са рационални функции на x и y , през всяка точка на равнината Oxy , в която или $u \neq 0$, или $v \neq 0$, минава точно една интегрална крива. Но както видяхме, u и v могат да се анулират едновременно само върху кривата на Фьопъл (7) и върху оста Oy . Ще покажем, че диференциалното уравнение (24) има точно една особена точка върху Фьопъл-овата крива и точно една особена точка върху оста Oy . Както отбелязахме, става дума за точки от първия квадрант и извън цилиндъра. Наистина, ако елиминираме y от (7) и (8), написано във вида

$$(25) \quad 2y = a \frac{r^4}{r^4 - 1},$$

гдето зависимостите (7) и (25) са еквивалентни на условията

$$u=0, \quad v=0, \quad (x \neq 0),$$

ще получим уравнението

$$(26) \quad r^6 - ar^5 - r^4 - r^2 + 1 = 0,$$

което може да се напише още във вида

$$(27) \quad -a - 5a(r-1) + (8-10a)(r-1)^2 + (16-10a)(r-1)^3 + \\ + (14-5a)(r-1)^4 - (6-a)(r-1)^5 + (r-1)^6 = 0.$$

Тъй като $a > 0$, то коефициентите пред степените на $r-1$ имат само една вариация. Оттук следва, че уравнението (27) има само

едно решение за $r > 1$, а това означава, че върху кривата на Фюпъл извън цилиндъра има само една особена точка.

Аналогично, ако в израза $u=0$ положим $x=0$, което е също еквивалентно на $u=0$, $v=0$ ($x=0$), получаваме уравнението

$$(28) \quad 2y^6 - ay^5 + 2y^4 - 4ay^3 - 2y^2 + ay - 2 = 0.$$

И това уравнение написваме във вида

$$(29) \quad -4a + 16(1-2a)(y-1) + 2(20-11a)(y-1)^2 + \\ + 2(24-7a)(y-1)^3 + (32-5a)(y-1)^4 + (12-a)(y-1)^5 + 2(y-1)^6 = 0.$$

Като направим същите разсъждения както за уравнение (27), се вижда, че за $y > 1$ и уравнението (29) има само едно решение $a > 0$. Следователно върху оста Oy и извън цилиндъра има точно една особена точка, неотбелязана в [11]. Лесно може да се провери, че диференциалното уравнение (24) има две особени точки и върху окръжността $r=1$, а именно в точките $A(\pm 1, 0)$.

Всички останали интегрални криви обаче не минават през точката A . За интегралните криви извън цилиндъра това може да се провери по следния начин: От (23) се вижда, че

$$(30) \quad \frac{1}{y^2} + \frac{4}{(r^2-1)^2} < C,$$

тъй като за разглежданата област

$$\frac{4y}{a} - \frac{r^2-1}{r^2} > 0.$$

От (30) следва

$$\frac{1}{y^2} < C, \quad \frac{4}{(r^2-1)^2} < C$$

или

$$y > \frac{1}{\sqrt{C}}, \quad r^2 - 1 > \frac{2}{\sqrt{C}}.$$

Следователно, ако една вихрова траектория има точки извън цилиндъра и извън оста Oy , тя се намира изцяло извън ивицата

$$-\frac{1}{\sqrt{C}} < y \leq \frac{1}{\sqrt{C}}$$

и извън кръга с радиус

$$\rho = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{C}}} > 1,$$

откъдето се вижда, че никоя от тези траектории не минава през точката A . Разбира се, има траектории произволно близки до окръжността $r=1$ и до оста $y=0$ в зависимост от значението на константата C .

б) Асимптоти на интегралните криви. Ако в (23) оставим r да расте неограничено, получаваме уравнението

$$(31) \quad \frac{1}{y^2} = C e^{-\frac{4y}{a}} \quad \text{или} \quad y^{-1} e^{\frac{2y}{a}} = \sqrt{C}.$$

Лесно се вижда, че в зависимост от константата C уравнението (31) може да има два, един или нито един реален корен спрямо y . Следователно интегралните криви (23) могат да имат две, една или нито една хоризонтална асимптота.

Да определим интеграционната константа по такъв начин, че уравнението (31) да има само едно решение спрямо y . Това ще бъде изпълнено, ако имаме

$$(32) \quad \frac{1}{y^2} = 2 \frac{C}{a} e^{-\frac{4y}{a}}$$

Като елиминираме C от (31) и (32), получаваме

$$(33) \quad y = \frac{a}{2},$$

което е уравнението на единствената асимптота на интегралната крива, притежаваща само една асимптота. Като внесем (33) в (31), получаваме за константата C израз

$$(34) \quad C = 4 \left(\frac{e}{a} \right)^2,$$

при чийто избор от двупараметричната фамилия криви (23) отделяме еднопараметричната система интегрални криви с уравнение

$$(35) \quad \frac{1}{y^2} + \frac{4}{(r^2 - 1)^2} = \frac{4}{a^2} e^{2 \left(1 - \frac{2y}{a} r^2 - 1 \right)}.$$

Очевидно всяка крива от системата (35) сега има една единствена хоризонтална асимптота.

Лесно се показва, че тази еднопараметрична система интегрални криви има за обвивка равнораменната хипербола

$$(36) \quad x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$

която среща окръжността $r = 1$ в пресечната ѝ точка с асимптотата на Фьопъловата крива.

Извън цилиндъра хиперболата (36) няма общи точки нито с Фьопъловата крива, нито с оста Oy .

в) Хоризонтални и вертикални тангенти на интегралните криви. От (23) се намира непосредствено геометрическото място на точките, в които фамилията криви (23) притежават хоризонтални или вертикални тангенти. Тези геометрически места са съответно кривите:

$$(37) \quad r^4[(r^2 - 1)^3 + 8y^4] = \frac{2y}{a} (r^2 - 1)[(r^2 - 1)^2 + 4y^2] \cdot [r^2(r^2 - 1) + 2y^2]$$

и

$$(38) \quad 2yr^4 = \frac{1}{a} (r^2 - 1) [(r^2 - 1)^2 + (2y)^2].$$

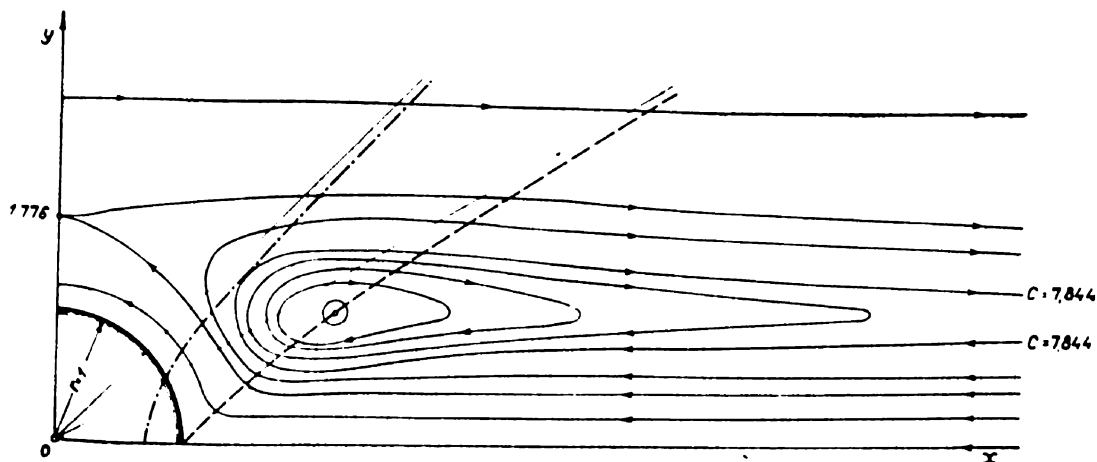
Като елиминираме от (37) и (38) параметъра a , получаваме, както трябваше да се очаква, кривата на Фьопъл. Това ще рече, че за фиксирано a съответните криви на хоризонтални и вертикални тангенти се пресичат в особената точка върху кривата на Фьопъл.

По-нататък може да се покаже, че кривите без асимптоти са затворени криви около особената точка върху Фьопълвата крива, което означава, че особената точка върху кривата на Фьопъл е централна особена точка.

5. Построяване и кинематично тълкуване на вихровите пътища

Преди да се спрем на построението на траекториите (23), ще направим някои бележки върху характера на интеграционната константа C на разглежданата фамилия интегрални криви. Тъй като при възприетия модел ние приехме вихровата двойка вече напълно образувана, мислим си я къде да е зад цилиндъра. Тук съвсем не може да става въпрос за едно нейно изходно положение, например — от хидродинамични съображения — за положенията на нейното откъсване от цилиндъра — което да ни послужи за еднозначно определяне на интеграционната константа и следователно за отличаване на една единствена интегрална крива като действителна траектория на вихровата двойка при дадена стойност на циркулацията.

На фиг. 6 са построени вихровите траектории в първия квадрант извън цилиндъра при значение на параметъра a , равно на 1,941 и

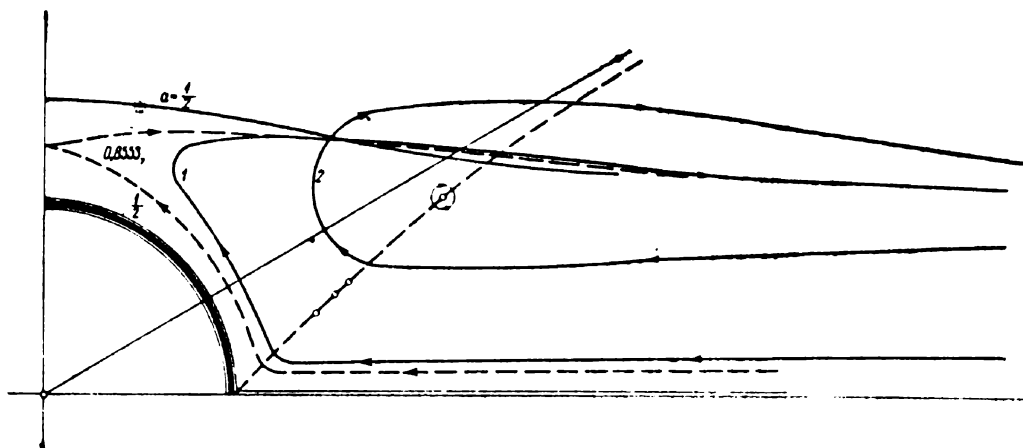


Фиг. 6

за стойности на интеграционната константа, показани на същата фигура*. С пунктирани линии са начертани Фьопълвата крива и хи-

* Вихровите траектории, дадени на фиг. 7, са изработени в Института по корабостроение при Университета в Хамбург с любезната отзивчивост на проф. Kar-Wiegardt, който, заинтересован от проблема, пръв даде с тях една частична илю-

перболата (36) — обвивка на траекториите с една асимптота. Координатите на особената точка върху Фьопъловата крива се дават с единствения корен, по-голям от единица, на уравнението (26) и уравнението (7). За построяването на кривите на фиг. 6 сме избрали централната особена точка върху Фьопъловата крива с координати ($x \approx 2,197$, $y = 1$). Както се вижда, особената точка върху Фьопъловата крива е действително централна особена точка. Близките до



Фиг. 7

нея траектории представят затворени криви. Самата особена точка е също така една траектория на вихрите, което съответствува на следното механично съображение. Ако вихровата двойка е поставена предварително върху Фьопъловата крива (7), имаща големина на циркуляцията съгласно (8), без начална скорост тя остава на това място неподвижна.

Фактът, че около тази особена точка съществуват затворени интегрални криви с произволно малък диаметър, показва, че положението на равновесие, което заема вихровата двойка върху Фьопъловата крива, е устойчиво при огледално симетрични смущения от произволен порядък. Както е известно, устойчивостта на вихровата двойка при симетрични смущения бе доказана от Фьопъл в гореситираната работа, като се допуснат смущения само от първи порядък. На разглежданата фиг. 6 са построени три затворени криви, разположени „концентрично“ около особената точка, намиращи се надясно от хиперболата (36).

По-нататък е построена оная траектория, която се допира до хиперболата (36) и има една единствена асимптота. Тази траектория оттук нататък ще наричаме разделна между кривите без асимптоти и ония с по две асимптоти.

страция на уравнение (23). Четирите криви, начертани на фиг. 7, притежават асимптота $y=1$ и съответствуват на четири различни стойности на константата a , а именно: $a=0,500$, $a=0,86537$, $a=1,000$, $a=2,000$. Особената (рогова) точка върху ординатата ос Oy има ордината $y=1,280$. Особените точки върху Фьопъловата крива имат координати, пресметнати от нас, съответно равни на: ($y_1 \approx 0,84$, $r_1 \approx 1,5$), ($y_2 \approx 0,52$, $r_2 \approx 1,64$), ($y_3 \approx 0,54$, $r_3 \approx 1,67$), ($y_4 \approx 1,12$, $r_4 \approx 2,48$).

Увеличавайки стойността на константата C , получаваме такава серия от траектории с две асимптоти, които все още не пресичат оста Oy . Единственият корен, по-голям от единица на уравнението (28), ни позволява да намерим върху оста Oy съответно особената точка за избраното значение на параметъра a . (В случая $y \approx 1,776$).

Както се вижда от фиг. 6, особената точка върху оста Oy е двойна точка. В нея се допират двата клона (горен и долен) на една интегрална крива, така че в двойната точка тангентата е хоризонтална.

За още по-големи стойности на C интегралните криви в разглеждания квадрант се състоят от два различни клона (също горен и долен), между които са разположени всички дотук споменати интегрални криви.

Както кривата с особена точка върху оста Oy , така и интегралните криви с по два клона притежават по две асимптоти съответно за горния и за долния клон.

Ако си мислим вихровата двойка поставена без начална скорост върху особената (двойна) точка върху оста Oy , тя ще бъде също в равновесие. Това положение на равновесие обаче не е устойчиво, понеже около нея няма затворени криви. С други думи, всички траектории в близост на всяка такава точкат имат безкрайно отдалечени точки.

Увеличавайки по-нататък интеграционната константа C , получаваме интегрални криви, чийто долен клон все по-плътно доближава както окръжността $r=1$, така и оста Ox , докато горният клон се отдалечава неограничено, като се отличава незначително от права, успоредна на оста Ox .

От разглежданията, които направихме дотук, е ясно, че вихровата двойка за дадено a може да бъде в покой само в две дискретни (особени) точки, едната върху Фьопъловата крива, а другата върху оста Oy . Във всяко друго положение вихровата двойка има скорост отлична от нула.

Нека добавим тук, че от аналитично намереното свойство на фамилията интегрални криви да притежават хоризонтални асимптоти следва непосредствено кинематичното разглеждане:

Ако в изразите за u и v (10) приемем y крайно и оставим r да расте неограничено, получаваме

$$(39) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u = U - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2 - 2y^2}{r^4} + a \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2 + 1}{R^2(y, r)} - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2 - 1} - \\ - \frac{a}{2y} = U - \frac{a}{2y},$$

$$(40) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v = -2Uy \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{r^2 - y^2}{r^4}} + a \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{r^2 - y^2}{r^2 - 1}} - \\ - a \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{r^2 - y^2 (r^2 - 1)}{R^2(y, r)}} = 0$$

или

$$(41) \quad |\overline{v_\infty}| = u_\infty = U - \frac{\Gamma}{4\pi U y}.$$

Ако определим y като неявна функция на x от уравнение (23) на фамилията траектории, виждаме, че тя е изобщо двузначна функция. По клона от дадена траектория, който е по-близо до оста Ox , вихърът се движи така, че хоризонталната проекция на скоростта му е отрицателна; обратно, ако вихърът се движи по клона, който е по-отдалечен от оста Ox , тази проекция е положителна. Горното твърдение следва непосредствено от обстоятелството, че скоростта, която си индуцират двата симетрично разположени вихра, е обратно пропорционална на разстоянието между тях и е насочена в отрицателна посока. Това ще рече, че по затворените траектории вихрите обикалят в посока на тяхната циркулация върху дадена интегрална крива. (Посоките на обикаляне на фиг. 6 са означени със стрелки.)

При описаното движение на вихровата двойка по траекторията си, както се вижда, при фиксирано a , тя всякога пресича Фьопълловата крива, и то със скорост, която не е равна на нула, изключвайки изродената траектория, представляваща съответната централна особена точка върху Фьопълловата крива.

Фьопъл е считал, че щом вихровата двойка достигне върху кривата (7), тя ще остане в покой върху нея, като едно несиметрично смущение би причинило нейното по-нататъшно придвижване, което обаче ще има за резултат разрушаването на вихровата двойка. Както по-късно и по-подробно ще изтъкнем, Фьопъл е допускал и възможността вихровата двойка да следва при движението си Фьопълловата крива вследствие изменението на циркулацията по „закона“ (8). При разглеждания модел обаче вихровата двойка може да бъде в покой върху Фьопълловата крива само ако тя бъде поставена без начална скорост върху нея със съответна циркулация. При всички други условия тя се движи по своите затворени или отворени траектории.

Заслужава да се отличат ония положения на вихровата двойка върху траекторията с двойна точка върху оста Oy , по която вихрите се движат по долния ѝ клон, доближавайки се асимптотично до тази двойна точка. Наопаки, ако бъде поставена по горния клон, вихровата двойка ще се движи по посока на оста Ox до безкрайност.

Ако вихровата двойка бъде поставена върху долния клон на крива, която пресича оста Oy , тя ще премине във втория квадрант, като изпревари цилиндъра.

По такъв начин се установява „циркулирането“ на вихровата двойка зад цилиндъра, което става или по затворени траектории, или по такива с една или две успоредни асимптоти. Движението по затворени траектории на вихровата двойка се гарантира с това, тя да бъде поставена в областта, ограничена от разделната крива за дадено значение на параметъра a . Съпоставяйки интегралните криви за различни стойности на C , узнаваме, че на всяко a отговаря една система криви с една особена точка върху кривата на Фьопъл, която е толкова по-близо до оста Ox , колкото a е по-малко и обратно. Същото се отнася и за особена точка върху Oy .

§ 2. ВЪРХУ ФОРМУЛАТА ЗА СЪПРОТИВЛЕНИЕТО НА ЦИЛИНДЪРА И НЕЙНОТО ТЪЛКУВАНЕ

6. Бележки върху извода на формулата за съпротивлението

Съпротивлението, което изпитва обтичаният цилиндър при наличие на една симетрична вихрова двойка зад него, трае не само през време на образуването ѝ, поради триенето на вискозния флуид о стените на цилиндъра (реални условия), но и когато вихровата двойка е вече образувана (внесена отвън), макар флуидът да е невискозен, какъвто е режимът на приетия модел (идеални условия).

Наличието на вихри във флуида влияе индукционно не само върху скоростта на всяка флуидна частица (включително и вихрова), но има индуциращо действие и върху всяко твърдо тяло, намиращо се във флуида.

Както е известно, тоталната сила на налягане P върху повърхнината (S) (в случая върху цилиндъра) се състои от две слагаеми: силата $\bar{P}_s$, съответстваща на стационарното състояние на флуидното течение, и импулсното налягане $\bar{P}_i$, дължащо се на промяната с времето на потенциала $F(z)$ на течението, т. е. имаме

$$(42) \quad \bar{P} = \bar{P}_s + P_i.$$

Този резултат следва непосредствено от общата теорема за импулса, като се използва било Ойлеровото диференциално уравнение за движението, било обобщеното Бернулиево уравнение и се вземе предвид разширението на Лагали [9], [10], при което се държи сметка и за наличните сингуларитети (дискретно разположени или непрекъснато разпределени извори и вихри) във флуида.

Поради това, че при извеждане на израза за съпротивлението, съответстващ на разглеждания модел, в литературата се срещат три различни формули за съпротивлението — на Фьопъл [1], на Мюлер [3] и на Биклей [7], за да възприемем една от тях като меродавна, която ще тълкуваме в светлината на направените дотук разглеждания, нека се спрем на някои бележки от критическо естество, като допълнение на бележките върху Фьопълевата формула за съпротивлението, направени от Томотика и Сугавара [6]. Работата се състои в това, че като коригират формулата на Фьопъл (от 1913), Томотика и Сугавара (в 1938) вземат повод от намерената от Биклей (в 1928) друга формула за съпротивлението, без да се спират на формулата на Мюлер (от 1927), тъй както самият Биклей, като разглежда формулата на Мюлер, не споменава нищо за формулата на Фьопъл.

Прилагайки теоремата за импулса, според която съпротивлението се явява еквивалент на изменението с времето на импулса на силата, действаща върху цилиндъра, и използвайки познатите интегрални теореми за пресмятане на комплексните интеграли, Фьопъл е дал следното представяне на формулата за съпротивлението

$$(43) \quad P_x = 6\pi\eta \frac{d}{dt} (Ca),$$

гдето

$$(44) \quad a = y \left(1 - \frac{1}{r^2} \right), \quad C = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

т. е. поради (44),

$$(45) \quad P_x = 3\varrho \frac{d}{dt} \left\{ \Gamma y \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \right\}.$$

От друга страна Мюлер, използвайки един израз, даден от Лагали, [9] (стр. 225, (19)) за налягането на течащия флуид върху една затворена повърхнина, а именно формулата [8] (стр. 63, (2))

$$(46) \quad P = -i\varrho \left(\sum_k \Gamma_{a_k} + \Gamma_c \bar{v}_\infty \right) + i\varrho \sum_k \Gamma_{a_k} \bar{v}_{a_k}^*,$$

която в случая се редуцира на

$$(47) \quad \bar{P} = i\varrho \Gamma (v_2^* - \bar{v}_1^*),$$

получава за съпротивлението израза (формула (4)), написана във възприетите от нас означения)

$$(48) \quad P_x = -2\varrho \Gamma \frac{\sin^2 \gamma}{r^2} \left\{ \frac{\Gamma \sin \gamma}{\pi r \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \left[1 + \frac{1}{r^4} - 2\frac{1}{r^2} \cos \gamma \right]} - U \right\}, \quad \sin \gamma = \frac{y}{r}.$$

В своя курс [3] Мюлер е дал същата формула (стр. 109, (7)) във вида

$$(49) \quad P_x = 4\varrho U \Gamma \frac{xy}{r^4} - \varrho \frac{\Gamma^2}{\pi} \frac{x}{r^2 - 1} + \frac{\varrho \Gamma^2 x (r^2 - 1)}{\pi [(r^2 - 1)^2 + (2y)^2]},$$

наред с която в същия курс, на следващата страница, той дава и формулата (45) на Фьопъл, без да е счел за необходимо да ги сравни, тъй като и двете формули се отнасят за едно и също нещо — за съпротивлението на цилиндъра при наличие на вихрова двойка зад него — и би трябвало изразите (45) и (49) да бъдат тъждествени.

Най-после Биклей [7], вземайки повод от резултата, получен от Мюлер, обръща внимание върху обстоятелството, че Мюлер използва формулата на Лагали, валидна за един стационарен режим на течението (при който може да се приложи съкратеното Бернулиево уравнение), и с това пропуска един допълнителен израз (вж. (54)), съответстващ на оня допълнителен член, който фигурира в обобщеното Бернулиево уравнение и се отнася до изменението на потенциала с времето. Разглежданото от нас и от всички автори течение обаче е нестационарно, поради което споменатата формула на Лагали не е достатъчна.

В своя курс [3] Мюлер не е забелязал изглежда, че за получаването на формула (47) е използвал формулата на Лагали (46)

(срв. [3], стр. 109 и стр. 53), която следва от формула (15) в курса на Мюлер (стр. 26), изведена при направеното на стр. 24, т. 2 от същия курс приемане за стационарност на течението.

Биклей [7], държейки сметка и за двата члена $\left(-\frac{\rho}{2}v^2\right)$ и $\left(-\rho\frac{\partial F}{\partial t}\right)$, (последният дължащ се на нестационарността на режима), пресмята отново съпротивлението на цилиндъра и намира за него формулата

$$(50) \quad P_x = P_s + P_l = \frac{\rho \Gamma^2 x}{\pi r^4} \frac{4r^2 y - (r^2 - 1)^2}{r^4 + 1 - 2(x^2 - y^2)}.$$

Нека отбележим отново, че Биклей нито споменава формулата (45), намерена от Фьопъл, нито я сравнява със своята формула.

По такъв начин за съпротивлението на цилиндъра бяха дадени трите формули (45), (49) и (50).

Томотика и Сугавара обаче, сравнявайки формулите (45) и (50), посредством някои преобразувания се натъкнаха на факта, че тези формули се различават с един числен множител. Това ги е навело на идеята да извършат проверка в пресмятанията на комплексния интеграл по метода на Фьопъл, в резултат на което намират, че коефициентът във формулата на Фьопъл (45) трябва да бъде 2, а не 3. Като обръщат внимание и на обстоятелството, че циркулацията Γ за разглеждания в проблема идеален флуид е постоянна, те написват следната коригирана формула на Фьопъл

$$(51) \quad P_x = 2\rho\Gamma \frac{d}{dt} \left\{ y \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \right\}.$$

Преходът от формула (50) към формула (51) тези автори правят давайки на формулата на Биклей още вида

$$(52) \quad P_x = 2\rho\Gamma (v_1 - v_3),$$

дето

$$v_1 = v = \frac{dy}{dt}, \quad v_3 = \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{r^2} \right).$$

С това узнаваме, че формула (51) на Фьопъл и формула (50) на Биклей са идентични.

Независимо от съображенията, които изтъкнахме в началото на тази точка за несъстоятелността на формула (47) или (49) на Мюлер, нека забележим, че поради

$$\bar{v}_1^* = u_1 - iv_1, \quad \bar{v}_2^* = u_2 - iv_2; \quad u_1 = u_2 = u, \quad v_1 = -v_2 = v,$$

формула (47) се написва и така

$$(53) \quad P_x = 2\rho\Gamma v.$$

Тъй като компонентата v на скоростта на вихровата двойка зависи от скоростта на обтичането U , от формула (53) следва, че и съпротивлението P_x ще зависи от нея, докато постъпателната скорост U на флуида в безкрайност не се среща в израза (50), даден от Биклей.

Най-после едно непосредствено диференциране спрямо t в (51), държейки сметка за изразите u и v , дадени с (10), ни води отново до формула (50). Липсващият член във формула (49) на Мюлер е

$$(54) \quad P_i = \rho \Gamma \frac{1}{r^4} \{ 2x u_i - (x^2 - y^2) v \}.$$

По такъв начин установяваме, че меродавна формула за съпротивлението е формулата на Биклей (50). Скоро ще покажем, че в нейната развита форма тя е най-удобна за тълкуване.

7. Тълкуване на Фьопълвата формула (45) за съпротивлението

Нека се спрем най-напред на досегашното тълкуване, което Фьопъл и други автори дават на формула (45), което се отнася и за формулата (51). Наистина за извода и на двете формули е без значение дали циркулацията е променлива, или постоянна, тъй като и при определяне на комплексната скорост на вихровата двойка, и при пресмятане на комплексните интеграли, комплексна променлива беше z , а не z_1 . Както в оригиналната си работа [8], така и в своя курс [3] след написване на формулата (45) на Фьопъл, Мюлер казва: „За извършване на диференцирането би трябвало да се постави в основата наблюдението на движението на вихрите, върху което в оригиналната работа на Rubach [2] може да се намерят повече подробности“.

От този цитат се вижда, че пречка за диференцирането е непознаването на движението на двойката, твърдение, което най-малкото се нуждае от разяснение. При всички случаи, освен ако се приеме отнапред, че циркулацията е променлива с времето, диференцирането може да се извърши, както направихме и ние при показаната по-горе проверка за идентичността на формулите (51) и (50). Но обосновката в приведения цитат на Мюлер не е променливата циркулация, а непознаването на движението (разбираме: било закона на движението, ако искаме да имаме съпротивлението за произволен момент от времето, било траекториите им, ако искаме да познаваме съпротивлението при дадено положение на вихрите, какъвто е случаят с формулата на Биклей). В последния случай, понеже ние вече притежаваме траекториите на вихровата двойка, намерени с (23), ще покажем, че както тълкуването, така и пресмятането на съпротивлението стават възможни.

Да се спрем по-внимателно и по-подробно на тълкуването, което дава самият Фьопъл на своята формула за съпротивлението (45), за което ще покажем, че е също несъстоятелно.

След като намира формула (43) или което е същото (45), Фьопъл счита, че налягането, което изпитва цилиндърът при неговото равномерно придвижване във флуида, при наличие на вихровата двойка зад него може да се определи според формулата (45)

от положението и от промяната на положението на вихровата двойка, понеже съгласно формула (8) циркуляцията Γ , фигурираща под знака производна в (45), може да се изрази чрез съответното положение на вихрите върху кривата (7) — Фьопълвата крива. Непосредствено след горното твърдение обаче Фьопъл още добавя:

„При пресмятането на съпротивлението въз основа на наблюдаваното по-нататъшно движение на вихровата двойка върху нашата крива се срещат обаче големи трудности, които преди всичко се дължат на доказаната нестабилност на вихровата двойка, поради която вихровата двойка скоро след достигането ѝ върху нашата крива вследствие нестабилните смущения отново напуска кривата“.

Независимо от това, че при разглежданията, които тук се правят, ние нямаме право да вадим други заключения освен тези, които следват от теоретическите изводи, следователно никакви опитни данни и наблюдения не бива да се смесват с тях, ще покажем, че всички гореприведени твърдения на Фьопъл се дължат на погрешно използване и тълкуване на формула (8) за циркуляцията.

Както вече подчертахме в т. 2, формула (8) показва кога вихровата двойка може да бъде в покой върху кривата (7). Следователно тя не дава един отнапред познат израз за циркуляцията във функция от положението на вихровата двойка*, при което Фьопълвата крива да е една интегрална крива на системата диференциални уравнения (10).

Наистина все пак една проста проверка ни дава за u и v при „закона“

$$(55) \quad \Gamma(x, y) = 4\pi U y \frac{r^4 - 1}{r^4},$$

системата

$$(56) \quad \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} = \frac{U}{r^4} \frac{(r^2 - 1 - 2y^2)[4y^2 r^2 - (r^2 - 1)^2]}{(r^2 - 1)^2 + 4y^2}, \\ v = \frac{dy}{dt} = 2U \frac{xy}{r^4} \frac{4y^2 r^2 - (r^2 - 1)^2}{(r^2 - 1)^2 + 4y^2} \end{cases}$$

От (56) се вижда непосредствено, че вихровият център има скорост нула ($u=0, v=0$) върху кривата на Фьопъл (7).

Като разделим двете уравнения на (56), бихме получили диференциалното уравнение на „траекториите“ на вихъра, а именно

$$\frac{dx}{dy} = \frac{r^2 - 1 - 2y^2}{2xy}$$

или

$$(57) \quad \frac{d(x^2)}{dy} = \frac{1}{y} x^2 - \frac{y^2 + 1}{y}$$

което е линейно по отношение на x^2 . Общият интеграл на (57) е

* Иначе това би противоречало на физическото приемане за идеален флуид, в който, както се знае, циркуляцията се запазва с времето постоянна.

$$(58) \quad x^2 + (y - C)^2 = 1 + C^2,$$

което показва, че всяка траектория на вихровата двойка при „закон“ на циркулацията (55) е окръжност с център върху оста Oy и минаваща през точката с координати (в първия квадрант) $x=1, y=0$. Очевидно кривата на Фьопъл не е интегрална крива и следователно тя не може да се приеме за траектория, което потвърждава възражението ни.

От друга страна, никакви теоретически основания не са налице, за да се вади заключение, че вихровата двойка следва или приблизително следва кривата на Фьопъл, променяйки циркулацията си. Наопаки, ако тя бъде поставена на известно място върху Фьопъл-овата крива, тя ще остане върху нея само когато за това място е изпълнено условието (8).

Въз основа на всичко казано дотук се вижда, че за определяне и тълкуване на съпротивлението на цилиндъра трябва да изхождаме от представянето му с формулата (50) на Биклей и от намерената от нас връзка (23) за координатите, определящи положението на вихровата двойка върху траекторията ѝ.

8. Друго тълкуване на формулата за съпротивление

От израза за съпротивлението на цилиндъра, дължимо на наличието на една симетрична вихрова двойка с постоянна циркулация, в развитата формула (50) на Биклей се вижда непосредствено, че числителят на (50) се анулира всякога, когато е удовлетворено уравнение (7), т. е. когато вихровата двойка попадне върху Фьопъл-овата крива. Това ще рече, че в този случай, независимо от това, дали скоростта на вихровата двойка е нула, или различна от нула, съпротивлението на цилиндъра става равно на нула. То се изменя с изменение на положението на вихровата двойка по траекториите (23), по такъв начин, че когато вихрите се намират вляво от (извън) Фьопъл-овата крива, съпротивлението е положително (насочено по посока на оста Ox), а когато те се намират вдясно на (вътре във) Фьопъл-овата крива, то е отрицателно (вж. фиг. 6).

От геометрични съображения е ясно, че докато вихровата двойка обикаля (циркулира) по една затворена крива, оста на цилиндъра изпитва едно непрекъснато налягане надясно и наляво; при движението ѝ по траекториите с безкрайно отдалечени точки в зависимост от положението, в което си мислим вихровата двойка, цилиндърът може да изпитва непрекъснато и само отрицателно налягане.

Накрая ще покажем, че въз основа на връзката, която представя уравнението на намерените траектории на вихрите (23) за циркулацията, последната може да бъде елиминирана от формулата за съпротивителната сила. При пресмятането ѝ очевидно е най-уместно да нямаме работа с тази непозната и мъчна за определяне величина. По такъв начин за формулата (50) сега ще имаме при

$$(59) \quad \Gamma = 8\pi U \frac{y}{r^2} (r^2 - 1) : \ln \frac{Cy^2}{R^2} (r^2 - 1)^2$$

и значение за R^2 , дадено с развита форма, изразя

$$(60) \quad P_x = 64\pi\sigma U^2 \frac{x}{r^4} \frac{y^2}{r^4} \frac{(r^2-1)^2}{R^2} \{(2ry)^2 - (r^2-1)^2\} \ln^{-2} \frac{C}{R^2} y^2 (r^2-1)^2.$$

Извърши ли се едно единствено опитно определение на константата C , с това ще получим възможност да използваме формула (60) за всяко положение на вихровата двойка по траекторията ѝ, с което моделът ще бъде изпробван. Особено ценни биха били сведенията за изменението на съпротивлението с отдалечаване на вихровата двойка от цилиндъра по направление на оста Ox .

Интересен се явява въпросът за пресмятане на тоталното съпротивление, когато вихърът опише една затворена траектория, в който случай се очаква то да бъде равно на нула*.

Постъпила на 8. 11. 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. F ö r p l, L. Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder. Sitzb. d. bayer. Akad. d. Wiss. (1913), 1—17.
2. R u b a c h, H. Über die Entstehung und Fortbewegung des Wirbelpaares hinter zylindrischen Körper. Forschungsarbeiten aus dem Gebiet des Ingenieurwesens; Heft 185 (1916).
3. M ü l l e r, W. Mathematische Strömungslehre. V. 24 (1928), 106—111.
4. K o t s c h i n, N. E. - K i b e l, I. A. - R o s e, N. W. Theoretische Hydromechanik, Bd. I (übersetzt aus russisch); § 20, (1954), 320—327. Кочин, Н. Е.-Кибель, И. А. - Розе, Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть первая, изд. 4, § 20, стр. 351; 1948.

* Изказаното предположение бе потвърдено от проф. А р к а д и й С т о я н о в, който бе така любезен да предостави на авторите следното доказателство:

Формулата (50) изразява P_x във функция на x и y , които са функции на t , определяеми от (10); тогава $P_x = P_x(t)$. Средната ѝ стойност в интервала (t_1, t_2) е равна на

$$(61) \quad P_{cp} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} P_x(t) dt.$$

Тъй като формулите (50) и (51) са идентични, то

$$(62) \quad P_x dt = 2\sigma \Gamma d \left\{ y \left(1 - \frac{1}{r^2} \right) \right\}$$

и следователно

$$(63) \quad P_{cp} = \frac{2\sigma \Gamma}{t_2 - t_1} \left\{ y_2 \left(1 - \frac{1}{r_2^2} \right) - y_1 \left(1 - \frac{1}{r_1^2} \right) \right\}$$

Ако точката $M(x, y)$ опише затворена крива, тогава $P_{cp} = 0$.

Ако точката $M(x, y)$ опише част от отворена (или от затворена) крива, тогава „тоталното“ съпротивление $P_{cp}(t_2 - t_1)$ зависи само от координатите на точката в началното и крайното положение.

5. Handbuch der Physik, Bd. VII. Mechanik der Flüssigen und gasförmigen Körper; red. von R. Grammel; Ideale Flüssigkeiten, von M. Lagally; Kap. I, IV, d) (1927), 83—84.
6. Tomotika, S. Sugawara, N. Note of the Influence of Vortices upon the Resistance of a Circular Cylinder moving through a Fluid. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, Vol. 20 (1938), 467—477.
7. Bickley, W. G. The Influence of vortices upon the Resistance experienced by Solids moving through a Liquid. Proc. Roy. Soc. London, A 119 (1928), 146—156.
8. Müller, W. Über den Einfluss von Wirbeln auf den Strömungsdruck an einem Kreiszylinder. Zeitschr. f. techn. Physik, Vol. (1927), 8—62.
9. Lagally, M. Über den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche. Sitzb. d. bayer. Akad. d. Wiss. (1922), 209—227.
10. Lagally, M. Berechnung der Kräfte und Momente, welche strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben. ZAMM, Bd. 2 (1922), 409—422.
11. Walton, E. T. S. On the Motion of Vortices near a circular Cylinder in a Stream of Liquid, R. I. A. Proc., vol. XXXVIII, Sect. A, 1928.

ТРАЕКТОРИИ И СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ ВИХРЕВОЙ ПАРЕ ЗА КРУГОВЫМ ЦИЛИНДРОМ

Бл. Долапчиев и Бл. Сендов

РЕЗЮМЕ

1. В настоящем сообщении дается точное решение гидродинамической проблемы „цилиндр-вихревая пара“ в идеальном флуиде, уже рассмотренной Л. Фьопплом [1] и Х. Рубахом [2]. До сих пор не были известны траектории вихревой пары за цилиндром**, а также не было удовлетворительного толкования формулы сопротивления в зависимости от положения вихревой пары по отношению к цилиндру. Предлагаемое точное решение дает, вместе с результатами Фьоппла и Рубаха, исчерпывающую характеристику проблемы „цилиндр-вихревая пара“, игнорируя происхождение вихрей и наличие других вихревых пар, имеющих место в случае обтекания цилиндра реальном флуидом.

Как известно, комплексный потенциал (1) интерпретирует модель „цилиндр-вихревая пара“, где U — скорость обтекания в бесконечности, Γ — модуль постоянной циркуляции, z_1 — аффикс верхнего вихря по отношению к оси Ox , $z_2 = z_1$ и $z_3 = \frac{1}{z_1}$, $z_4 = \frac{1}{z_1}$ — аффиксы инверсно-зеркальных вихрей. Определяя комплексную скорость

$$v(z_1) = \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z=z_1} = u_1 - iv_1,$$

получаем для проекции скорости вихря z_1 выражение (10), где индекс „1“ отброшен. Искомые траектории вихрей определяются системой дифференциальных уравнений (10). Из условия $u=0$, $v=0$ Фьоппл получил геометрическое место (кривая Фьоппла) (7), на которой вихревая пара остается в покое, если в данном положении циркуляция Γ вихрей удовлетворяет условию (8). Фьоппл, Рубах и, другие авторы считали условие (8) законом изменения циркуляции, при соблюдении которого вихревая пара имеет для траектории кривую Фьоппла (7), несмотря на то, что реляция (8) не что иное, как одно из условий равновесия вихревой пары по кривой (7), (фиг. 4), и что в идеальном флуиде циркуляция вихрей постоянна.

2. Чтобы получить траектории вихревой пары при неизменной циркуляции, в соответствии с принятой моделью (1), надо рассмотреть систему (10), решение которой было нам до сих пор неизвестным. После некоторых преобразований система (10) сводится к системе (13, 14). Элиминируя dt и полагая $(r^2 - 1)^{-1} = Z$, $y^{-1} = Y$, получаем для траекторий вихрей дифференциальное уравнение (20) допускающее отделение переменных с интегралом (23).

Последнее уравнение представляет двухпараметрическую фамилию интегральных кривых (параметры a и $C > 0$). При заданном a чрез каждую точку плоскости Oxy проходит точно одна интегральная кривая, если для этой точки $uv \neq 0$. Исследование дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y)}{u(x, y)}$ показывает, что оно имеет на кривой Фьоппла (7) точно одну особенную точку и точно одну особенную точку на оси Oy . Первая особенная точка является центральной (дегенерированной вихревой траекторией — положением вихрей в устойчивом равновесии), а вторая является двойной (соответствующей неустойчивому равновесию вихрей).

Кроме замкнутых траекторий, в окрестности центральной особенной точки, к фамилии интегральных кривых (23) относятся и незамкнутые траектории, каждая из которых обладает двумя горизонтальными асимптотами. Есть также раздельная незамкнутая траектория с одной горизонтальной асимптотой. На фиг. 3, 5, 6 даны а) картина обтекания „цилиндр-вихревая пара“ (линии тока — моментальной съемки) по Рубаху; б) экспериментально определенные положения вихревой пары при реальном флуиде, также по Рубаху; в) вихревые траектории, определенные нами согласно (23) для значения $a = 1,94$ и для различных значений константы C интегрирования. Легко показать, что вихри движутся по замкнутым траекториям в направлении своей циркуляции. По остальным траекториям вихри движутся аналогично, как показано на фиг. 6. При этом, все неискаженные траектории пересекают кривую (7) Фьоппла с отличной от нуля скоростью. Для разных значений параметра a получаются аналогичные траектории. С уменьшением параметра a (циркуляции Γ) особенные точки на кривой (7) Фьоппла и на оси Oy находятся ближе к оси Ox .

3. Рассмотрим сопротивление цилиндра в присутствии вихревой пары (z_1, z_2) . Фьоппл первым нашел для этого сопротивления формулу (43), которая для $C = \frac{\Gamma}{2\pi}$, „ $y \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)$ принимает вид (45). Позднее, применяя метод Лагалли^[9] для случая дискретных сингуляритетов (вихрей) в флуидном течении, В. Мюллер^[3] также дает формулу сопротивления, которую можно свести к виду (53).

Однако, В. Г. Биклей^[7] обратил внимание на тот факт, что формула Мюллера неточна, потому что она относится только к слагаемой P_s сопротивления, соответствующей сокращенному уравнению Бернулли для движения флуида в случае стационарного режима, упуская из виду слагаемую P_i сопротивления, соответствующую

щую изменению потенциала в течении времени. Таким образом, действительная формула сопротивления, по Биклейю, имеет вид (50).

С. Томотика и Н. Сугавара⁽⁶⁾ заметили, что для идентичности формулы (45) и (50) надо, с одной стороны, чтобы численный коэффициент при (45) был 2, а не 3 (ошибка, допущенная Фьопплом при исчислении комплексных интегралов), а с другой стороны, что циркуляцию Γ можно поставить перед знаком дифференцирования, так как в идеальном флуиде она является постоянной. С этим замечанием Томотики-Сугавары формула (45) принимает вид (51). Эти авторы показали также, что исправленную формулу (51) можно преобразовать в виде (52). Наконец, если в формуле (51) провести дифференцирование по отношению к времени t и принять во внимание значения величин u и v из (10), получается также формула (50) Биклейя, а не формула (45) Мюллера, так как формулы (53) и (52) не тождественны.

Толкование формулы (45), данное Фьопплом, Мюллером и другими авторами следующее: давление на цилиндр при его равномерном движении в флуиде можно определить по (45) из положения вихревой пары на кривой Фьоппла и его изменения, так как согласно реляции (8) циркуляцию, являющуюся под знаком дифференцирования, можно выразить через соответствующие положения вихревой пары. Как Фьоппл, так и Мюллер добавляют при этом, что данные для применения формулы (45) Фьоппла можно получить только на основании наблюдения за движением вихревой пары. Мы видели, однако, что вихревая пара изменяет свое положение в соответствии с нашим уравнением (23), следовательно формула Биклейя (50), вместе с (23), вполне определяет сопротивление цилиндра.

Из (50) видно, что сопротивление исчезает при нахождении вихревой пары на кривой Фьоппла, несмотря на то, находится ли она там в покое или пересекает эту кривую с отличной от нуля скоростью. При этом сопротивление является положительным вне этой кривой и отрицательным внутри нее. При движении вихревой пары по произвольной траектории из фамилии (23), давление цилиндра меняет свой знак при каждом пересечении кривой Фьоппла. Среднее сопротивление цилиндра при полном описании (повороте) вихря по замкнутой траектории равно нулю (63). „Тотальное“ сопротивление цилиндра при незамкнутой дуге траектории является функцией концов дуги.

Что касается практического применения формулы (50) Биклейя на основании нашего уравнения траектории (23) надо отметить, что (23) позволяет легко элиминировать неизвестную циркуляцию Γ . Таким образом, в формуле (50) сопротивления остаются фигурировать только координаты положения вихревой пары и интеграционная постоянная C . Конечно, определение этой константы можно провести экспериментальным путем, и таким образом проверить применимость модели „цилиндр-вихревая пара“ при различных практических задачах.

BAHNEN EINES SYMMETRISCHEN WIRBELPAARES HINTER EINEM KREISZYLINDER UND DEREN ZUSAMMENHANG MIT DEM ZYLINDERWIDERSTAND

Bl. Dolaptschiew und Bl. Sendow

ZUSAMMENFASSUNG

Es handelt sich um eine exakte Lösung des Problems „Zylinder-Wirbelpaar“, das eng mit dem Problem des Zylinderwiderstandes im Zusammenhang steht und zum ersten mal von L. Föppl (1913) und H. Rubach (1916) behandelt worden ist.

Unter dem Problem „Zylinder-Wirbelpaar“ versteht man eine zweidimensionale Strömung einer idealen, d. h. reibungslosen und inkompressiblen, dazu noch quellenfreien Flüssigkeit, welche Strömung durch das komplexe Potential (1) dargestellt wird. Dieses Potential charakterisiert das Model: Parallele Umströmung eines Kreiszylinders mit Durchmesser 1, mit Geschwindigkeit U im Unendlichen in Richtung der positiven x -Achse und bei Anwesenheit eines symmetrischen Wirbelpaares mit konstanter Zirkulation hinter dem Zylinder. Das absolute Bezugssystem ist fest mit dem Zylinder verbunden, wie dies auf der Fig. 1 gezeichnet ist.

Die so beschriebene Strömung nennen wir Model, da sie mit der wirklichen Strömung einer reellen (mit Viskosität versehenen) Flüssigkeit verglichen wird, bei der sich so eine Grenzschicht um dem Zylinder herum ausbildet, dass diese Grenzschicht bald in der Nähe von der x -Achse zerreißt und sich in zwei reellen Wirbelfäden aufrollt. Dann „reifen“ diese Wirbel allmählich mit der Erhöhung der Zirkulation, entfernen sich vom Zylinder langsam, solange sie ihre Symmetrie verlieren und ferner reissen sich noch andere Wirbelpaare pendelartig vom Zylinder ab, so dass schliesslich eine Kármánsche Wirbelstrasse entsteht.

Abgesehen davon, wie die Genesis des ersten Wirbelpaares erfolgt kann man sich das Modell (1) so vorstellen, dass man sich in der potentiellen Umströmung des Zylinders (bei welcher kein Widerstand merkbar ist) ein vollkommen ausgebildetes Wirbelpaar von vornherein denkt. Dieses Model entspricht dem ersten Stadium des reellen Vorganges, wenn keine anderen Wirbelpaare dazugekommen sind. Wir zeigen nun, dass dieses Problem theoretisch und vollkommen exakt gelöst werden kann.

Es seien zunächst die folgenden theoretischen Ergebnisse erwähnt, die von Föppl stammen:

1. Das Wirbelpaar bleibt im Gleichgewicht, d. h. (4) wo, ohne Indizes „1“ und entwickelt geschrieben (6) gilt, wenn die Wirbel entweder auf der y -Achse oder auf der Kurve (7) sich befinden und dort die der Zirkulation (8) haben.

2. Dieses Gleichgewicht ist bei symmetrischen Störungen erster Ordnung stabil und bei unsymmetrischen Störungen instabil.

3. Der Widerstand, den der Zylinder erfährt, ist (45). Wie Tomotika und Sugawara (1938) bemerkt haben, ist diese Formel falsch. Einerseits ist der Koeffizient nicht 3, sondern 2, andererseits muss Γ vor dem Differentiationszeichen $\frac{d}{dt}$ stehen, da in einer idealen Flüssigkeit die Zirkulation konstant vorausgesetzt werden muss. Nun lautet die richtige Formel folgendermassen (51).

Es sind bei Föppl keine Betrachtungen dafür gegeben, wie sich sonst das Wirbelpaar bewegt und keine Deutungen der Widerstandsformel (45). Über ihre Verwendbarkeit schreibt zum Beispiel W. Müller folgendes:

„Der Auswertung der Differentiation müsste die Beobachtung der Bewegung der Wirbel zugrunde gelegt werden, worüber in der Originalarbeit von Rubach das Nähere nachzulesen ist“.

Rubach hat übrigens nur 5 Stellen des Wirbelpaares rechnerisch und experimentell gefunden (s. Fig. 5), die uns kein klares Bild für den Vorgang geben und gar nichts über den Widerstand des Zylinders je nach den Lagen des Wirbelpaares liefern. Es sind, wie bei Föppl so auch bei Rubach, sogar manche Ungenauigkeiten zugelassen, wie zum Beispiel die Behauptung von Föppl, dass sobald das Wirbelpaar auf die Föppl'sche Kurve ankommt, es dort mit Geschwindigkeit Null bleibt, und dass sich das Wirbelpaar entlang dieser Kurve bewegt. Alle diese unklaren und ungelösten Fragen haben ihre Ursache in dem ziemlich komplizierten Differentialgleichungssystem (6), dessen genaue Lösung zunächst gezeigt wird.

Durch gewisse Umformungen ersetzt man das System (6) durch das folgende (13, 14).

Nach der Elimination von dt und den Substitutionen

$$Z = \frac{1}{r^2 - 1} \quad Y = \frac{1}{y}$$

reduziert sich das System (13, 14) auf die Differentialgleichung (20) welche, wie man unschwer ersehen kann, trennbare Variablen hat. Auf diese Art findet man die Gleichung (9) als Lösung des Differentialgleichungssystems (6).

Die Gleichung (23) stellt nun eine zweiparametrische Kurvenfamilie (Parameter a und $C > 0$) dar. Dabei gehören zu dieser Familie als Grenzkurve (für $C \rightarrow 0$) auch der Kreis $|z| = 1$ und die x -Achse $y = 0$, die aber nicht in Frage kommen.

Aus der analytischen Untersuchung dieser Familie ergeben sich folgende charakteristische Eigenschaften der betrachteten Kurven, die auch gewisse kinematische Bedeutung haben:

- 1) Der Punkt $A(1, 0)$ ist ein Singularpunkt.
- 2) Die anderen Singularitäten der Kurvenfamilie (23) liegen bei verschiedenen a auf der y -Achse und auf der Föppl'schen Kurve (7).
- 3) Die Kurven der Familie (23) haben zwei, eine oder keine Asymptoten, die horizontal sind und durch die Gleichung (31) gegeben werden.
- 4) Es gibt eine einparametrische Kurvenschaar der Familie (23), nämlich (35) mit je einen Asymptote.
- 5) Die Umhüllungskurve der Kurvenschaar (35) ist die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$.

6) Es gibt Kurven der Familie, die keine unendlichen Punkte haben.

Daraus folgen sofort die kinematischen Eigenschaften:

1) Wenn man ein Wirbelpaar symmetrisch auf der Föppl'schen Kurve ohne Geschwindigkeit legt, so bleibt es dort unbeweglich falls seine Zirkulation die Relation (8) befriedigt. Dieser Punkt ist schon eine ausgeartete Bahnkurve.

2) Für ein endliches y , das der Gleichung (31) genügt, hat man $\lim_{r \rightarrow \infty} u = U - \frac{a}{2y}$, $\lim_{r \rightarrow \infty} v = 0$.

3) Hat eine Kurve der Familie (23) Punkte, die ausser der Föppl'schen Kurve liegen, so trifft der Wirbel, der sich auf dieser Kurve bewegt, die Föppl'sche Kurve mit Geschwindigkeit, die von Null verschieden ist, im Gegensatz zu Föppl.

4) Auf dem Ast, der näher der x -Achse läuft, bewegt sich der Wirbel in negativer Richtung bezüglich der angenommenen positiven Orientierung der x -Achse und umgekehrt.

5) Die Wirbel laufen auf ihren Bahnkurven im Sinne ihrer Zirkulationen.

Auf Figur 6 sind die verschiedenen Wirbelbahnen gezeichnet, für einen fixierten Wert von a und für verschiedenen Integrationskonstanten C .

Nun sind wir imstande, der zitierten Behauptung von Müller dagegen, die Formel (45) zu differenzieren und statt $x = u$, $y = v$ wieder die Ausdrücke (6) einzuführen, woraus wir den folgenden expliziten Ausdruck für den Zylinderwiderstand erhalten, (50). Dieser Ausdruck fällt genau mit dem Ausdruck zusammen, den Bickley (1928) auf eine andere Art gefunden hat, nicht aber mit dem Ausdruck von W. Müller [Seite 109, Formel (7)], welcher nach einer Methode von Lagalli (1922) gearbeitet hat.

Aufgrund der Widerstandsformel (50) geben wir folgende Deutungen:

1) Der Widerstand wird immer gleich Null sobald der Wirbel auf der Föppl'schen Kurve sich befindet, unabhängig davon, ob seine Geschwindigkeit gleich Null oder ungleich Null auf der Föppl'schen Kurve ist.

2) Der Widerstand hat einen negativen Wert, wenn der Wirbel sich „in“ der Föppl'schen Kurve befindet und umgekehrt.

3) Aufgrund von 1) und 2) wackelt der Zylinder um seine Achse während der Bewegung des Wirbelpaares auf die entsprechende Bahnkurve.

4) Läuft der Wirbel entlang einer geschlossenen Bahn, so ist der mittlere Zylinderwiderstand gleich Null. Wenn der Wirbel eine offene Bahnstrecke beschreibt, so hängt der Zylinderwiderstand nur von der Anfangs — und Endlage des Wirbels auf der Strecke ab.

In der Tat erhält man (nach A. Stojanow) aus der korrigierten Widerstandsformel (51), dass (63) gilt.

Zum Schluss sei darauf aufmerksam gemacht, dass die Kombination (23) und (50) die Verwendung der Widerstandsformel — genauso wie die Kármánsche Widerstandsformel (mit einem unbekannten Parameter weniger) bei einer Wirbelstrasse — gestatten.