ИССЛЕДОВАНИЕ КОРОТКИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ*

А. Г. Постников (Москва)

Оценки рациональных тригонометрических сумм, то есть сумм вида

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i \frac{f(x)}{m}} \tag{1}$$

$f(x)$ — целозначная функция, m—целое число, имеют приложение в задачах на неполную систему вычетов. К таким задачам относятся известные задачи о числе квадратичных вычетов по модулю p (p— простое), находящихся среди чисел $1, 2, \ldots, l$, о числе чисел ряда $\operatorname{ind} 1, \operatorname{ind} 2, \ldots, \operatorname{ind} l$ (индекс по модулю p, p — простое), находящихся между 1 и q, задача о распределении невычетов и первообразных корней, находящихся в рекуррентных рядах, изученная Н. М. Коробовым [1] и т. д.

Пусть τ период функции $f(x)$ по модулю m. Для оценок сумм (1) при $l<\tau$ пользуются легко проверяемым тождеством:

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i \frac{f(x)}{m}} = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\tau-1} \sum_{x=0}^{\tau-1} \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i \left(\frac{f(x)}{m} + \frac{k(x-y)}{\tau}\right)} =$$

$$\frac{l}{\tau} \sum_{x=0}^{\tau-1} e^{2\pi i \frac{f(x)}{m}} + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{\tau-1} \left(\sum_{x=0}^{\tau-1} e^{2\pi i \left(\frac{f(x)}{m} + \frac{kx}{\tau}\right)} \right) \left(\sum_{y=0}^{l-1} e^{-2\pi i \frac{ky}{\tau}} \right),$$

которое сводит оценку модуля сумм (1) по неполному периоду к оценке модуля суммы по полному периоду

$$\sum_{x=0}^{\tau-1} e^{2\pi i \left(\frac{f(x)}{m} + \frac{kx}{\tau}\right)}.$$

Для последних сумм, в ряде случаев, известны точные оценки. Таким образом получаются, например, такие факты:

* Содержание доклада перед Научной сессией болгарских математиков. София, октябрь 1956.

1) Пусть p — простое число, $f(x)$ многочлен с целыми коэффициентами, не всеми делящимися на p

$$\left|\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i\frac{f(x)}{p}}\right| \leq C\sqrt{p}\ln p. \tag{3}$$

Здесь для оценок полной суммы использована оценка А. Вейля [2].

2) Пусть $\chi(x)$ характер с основным модулем D

$$\left|\sum_{x=1}^{l} \chi(x)\right| \leq \sqrt{D}\ln D. \tag{4}$$

(См. [3]. В случае $D=p$, $\chi(x)=e^{2\pi i\frac{a\,\mathrm{ind}\,x}{p-1}}$, то есть и здесь тригонометрические суммы вида (1).)

3) Пусть g принадлежит к показателю τ по модулю p

$$\left|\sum_{x=1}^{l} e^{2\pi i\frac{ag^x}{p}}\right| \leq 2\sqrt{p}\ln p \tag{5}$$

(см. цитированную работу [1]).

Характерной чертой этих оценок является то, что они перестают давать нетривиальную информацию для коротких сумм, а именно при $l \leq C\sqrt{p}\ln p$ оценка (3) не лучше тривиальной оценки $\left|\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i\frac{f(x)}{p}}\right| < l$, оценка (4) перестает быть нетривиальной при $l \leq \sqrt{D}\ln D$, оценка (5) перестает быть нетривиальной при $l \leq 2\sqrt{p}\ln p$. Этот факт имеет отражение и в арифметических следствиях полученных из этих оценок: они имеют тоже вполне определенные границы нетривиальности.

Мы остановимся на результатах, полученных в исследовании коротких тригонометрических сумм.

Если $f(x)$ есть многочлен с целыми коэффициентами, то сумма (1) есть частный случай тригонометрической суммы с многочленом или суммы Вейля

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)} \tag{6}$$

(α_n, $\ldots$, α_1 — вещественные числа). Для оценок модуля этих сумм применяются два различных метода: метод Г. Вейля [4] и метод И. М. Виноградова [5, стр. 389], причем оценки, полученные методом Виноградова, вообще говоря, более точны нежели оценки по методу Г. Вейля. Фактом фундаментального значения является то, что оценки, получаемые методом Вейля и Виноградова, имеют более низкую границу нетривиальности, чем оценки, полученные сведением к „полным“ суммам (на это обратил внимание Н. М. Коробов). Если n есть степень многочлена $f(x)$ в сумме (3), то оценка Вейля и Виноградова уже при $l \geqq p^{\frac{1}{n-1}}$ наверное будет нетривиальна (мы сейчас считаем, что n не растет), а оценка, полученная сведением к „полной“ сумме, нетривиальна при $l \geqq \sqrt{p} \ln p$ (что хуже уже при $n \geqq 3$).

Так обстоит дело с короткими рациональными суммами с многочленом. В дальнейшем мы будем рассматривать тригонометрические суммы, когда m есть степень простого числа $m = p^n$ (хотя излагаемый метод может быть распространен и на некоторые классы составных модулей).

Оказывается, что в ряде случаев теоретико-числовую функцию $f(x)$ можно заменить по модулю p^n многочленом с целыми коэффициентами

$$f(x) \equiv Q(x) \pmod{p^n}. \tag{7}$$

Тогда

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p^n}} = \sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i \frac{Q(x)}{p^n}}. \tag{8}$$

Но к оценке

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i \frac{Q(x)}{p^n}} \tag{9}$$

можно применить метод Виноградова и тем самым получить сильную оценку суммы $\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p^n}}$, а главное с низкой границей нетривиальности.

Например, пусть g принадлежит к показателю τ_0 по модулю p и пуст k_0 выбрано из условия $g^{\tau_0} \equiv 1 \pmod{p^{k_0}}$ и $g^{\tau_0} \not\equiv 1 \pmod{p^{k_0+1}}$, то есть $g^{\tau_0} = 1 + p^{k_0} u$, где u целое число, p не делит u. Пусть x целое число. Тогда

$$g^{\tau_0 x} = (1 + p^{k_0} u)^x = \sum_{f=0}^{x} C_x^f (p^{k_0} u)^f,$$

$$g^{\tau_0 x} \equiv 1 + p^{k_0} (u C_x^1 + \ldots + u^n p^{k_0 (n-1)} C_x^n) \pmod{p^{(k_0+1)n}}.$$

Но $1 + p^{k_0} (u C_x^1 + \qquad + u^n p^{k_0 (n-1)} C_x^n)$ есть многочлен. С помощью этой мысли Н. М. Коробов получил недавно оценки коротких сумм вида

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i \frac{a g^x}{p^n}}$$

Оценка Н. М. Коробова нетривиальна уже при $l > p^{2(n \ln n)^{-1}}$.

Наличие сравнения (8) понятно с точки зрения p-адического анализа. В рассматриваемых случаях $f(x)$ является оборванным рядом для аналитической функции p-адического аргумента. Так, например [6], если оборвать ряд для $\log(1+px)$ в p-адической области, то получится $\operatorname{ind}(1+px)$ (индекс по модулю p^n).

В нескольких задачах теории чисел бывает нужна оценка тригонометрической суммы

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i f(x)}, \tag{10}$$

где $f(x)$ аналитическая функция ($f(x)$ — предполагается вещественной). Такой задачей является, например, задача о росте дзета-функции, где нужны оценки сумм вида ([7], главы V и VI).

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{it \ln(x+N)} \quad (t \text{ — вещественное}). \tag{11}$$

Для оценок сумм (10) функцию $f(x)$ разлагают в степенной ряд и пишут приближенное равенство

$$f(x) \approx Q(x),$$

где $Q(x)$ — многочлен, представляющий начало тейлоровского разложения $f(x)$. Тогда сумма (10) заменяется суммой

$$\sum_{x=0}^{l-1} e^{2\pi i Q(x)} \tag{12}$$

к которой прилагается оценка И. М. Виноградова. Ясно, что прием оценок коротких рациональных сумм есть p-адический аналог изложенного классического приема, а равенство (7) есть p-адический аналог равенства (12).

В работе [6] этим приемом производится исследование суммы:

$$\sum_{x=1}^{l} e^{2\pi i \frac{\operatorname{ind} x}{p^{n-1}(p-1)}} = \sum_{x=1}^{l} \chi(x), \tag{13}$$

(где $\operatorname{ind} x$ берется по модулю p^n), то есть суммы аналогичной сумме (11). Полученные результаты (по аналогии с классической теорией) находят приложение в задаче о распределении нулей L-рядов Дирихле. Кроме того ([8]) полученная оценка сумм (13) позволяет получить такую теорему о распределении индексов.

Т е о р е м а. Пусть M число членов ряда $\operatorname{ind} 1, \operatorname{ind} 2, \ldots, \operatorname{ind} l$ находящихся среди чисел $1, 2, \ldots, q$, где индекс берется по модулю p^n и $q \leq p^{n-1}(p-1)$, $l \leq p^n - 1$.

Пусть $l \geq p^2$ и $n \geq n_0$, но n фиксированное. Имеет место асимптотическая формула:

$$M = \frac{lq}{p^{n-1}(p-1)} + O\left(p^{\frac{n^2 C_1}{\log n}} \, l^{1-\frac{C_1}{n^2 \log n}}\right) \quad (C_1 \text{ — константа}).$$

При малых l остаточный член получается точнее чем в формуле, полученной на основании оценок полных сумм, где он, грубо говоря, равен $O\left(p^{\frac{n}{2}}\ln p\right)$, см. [9], стр. 111, задача 12 в.

Получено в редакцию 6. XI. 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов, Н. М. Распределение невычетов и первообразных корней в рекуррентных рядах. ДАН СССР, **88** (1953).
2. Weil, A. On some exponential sums. Proc. Nat. Acad. Sci. Washington, **34** (1948).
3. Polya, G. Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste. Nachichten d. G. W. Göttingen, **1** (1918), 21—29.
4. Van der Corput, I. G. Neue zahlentheoretische Abschätzungen. Math. Annalen, **89** (1923), 215.
5. Виноградов, И. М. Избранные труды. Москва, 1952.
6. Постников, А. Г. О сумме характеров по модулю равному степени простого числа. Изв. АН СССР, **19** (1955).
7. Титчмарш, Е. К. Теория дзета-функции Римана. Москва, 1952.
8. Постников, А. Г. Исследования по методу тригонометрических сумм И. М. Виноградова. Диссертация. Москва, 1956.
9. Виноградов, И. М. Основы теории чисел. Москва, 1949.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА КРАТКИ РАЦИОНАЛНИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИ СУМИ

А. Г. Постников (Москва)

РЕЗЮМЕ

Работата съдържа преглед на някои нови методи за изследване на непълните системи от остатъци.

ÜBER KURZE RATIONALE TRIGONOMETRISCHE SUMMEN

A. G. Postnikov (Moskau)

ZUSAMMENFASSUNG

In diesem Vortrag wird eine Übersicht über eine der neuen Untersuchungsmethoden über das nichtvollkommene Restklassensystem gegeben.