

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И О НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ*

Г. Георгиев (Яссы)

Поле единичных векторов является одной из геометрических конфигураций встречающихся довольно часто в различных областях прикладной математики, физики и т. д. Так например в гидродинамике на нём можно строить поле скоростей, вихрей и т. д. различных стационарных потоков, а на семействе полей ортов, зависящее от одного параметра, можно строить соответствующие поля различных нестационарных потоков. Поэтому исследование дифференциально геометрической структуры векторных полей имея теоретический интерес, содержит возможности её применения в различных областях физико-математических наук.

С полем единичных векторов связаны, одна конгруэнция линий (его векторные линии) и одна поверхность, вообще неголомомная ортогональная, в каждой точке области, к вектору поля этой точки. Этот двойной геометрический смысл поля, был только за последнее время ясно выражен.

В связи с последним утверждением я дам один пример.

В начале нашего столетия (1899—1900 г.) итальянский геометр Levi-Civita исследовал один новый класс конгруэнций кривых обладающих следующим свойством. Известно, что через линии одной конгруэнции вообще нельзя провести два семейства поверхностей которые пересекались бы ортогонально вдоль каждой из этих линий. Levi-Civita исследовал конгруэнцию линий через которые можно провести бесчисленное множество пар семейств поверхностей пересекающихся ортогонально, и назвал ее изотропной.

В тридцатых годах (1930 г.) румынский академик Gr. Moisil исследовал один новый класс неголомомных поверхностей, вложенных в эвклидовое пространство. Эти поверхности обладают свойством пропорциональности первых двух фундаментальных дифференциальных форм и естественно, были названы неголомомными сферами.

Только очень недавно (1954 г.) было указано что поле касательных к линиям изотропной конгруэнции является полем нормалей

* Содержание доклада на Научной сессии болгарских математиков, София октябрь 1956.

неголономной сферы, то-есть обе задачи суть два аспекта одно и того же векторного поля.

1. Пусть MI_3 будет данное поле единичных векторов удовлетворяющее условиям регулярности в его области определения. В каждой точке M присоединяем неголономный репер состоящий из трёх взаимно ортогональных ортов I_i ($i=1, 2, 3$). Для малых смещений точки M имеем

$$(1) \quad dM = \omega_0^i I_i,$$

где ω_0^i формы Пфаффа дающие смещения по осям I_i . Пусть

$$(2) \quad \bar{\omega} = pI_1 + qI_2 + rI_3$$

будет осью мгновенного вращения репера, соответствующая смещению dM ; тогда

$$(3) \quad dI_i = \omega \times I_i \quad (\times - \text{векторное произведение}).$$

Формы Пфаффа ω_0^i, p, q, r связаны уравнениями структуры

$$(4) \quad \begin{aligned} d\omega_0^1 &= [r, \omega_0^2] - [q, \omega_0^3] \text{ и т. д.} \\ dp &= [r, q] \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad [\] - \text{внешнее произведение.}$$

Если область определения поля трёхмерна, то ω_0^i удовлетворяют неравенству

$$(5) \quad d\tau = [\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3] \neq 0,$$

а потому можно выразить

$$(6) \quad p = p_i \omega_0^i, \quad q = q_i \omega_0^i, \quad r = r_i \omega_0^i.$$

Иначе говоря, малые смещения точек и векторов определяются если дана функциональная матрица (Darboux)

$$(7) \quad [p_i \quad q_i \quad r_i]$$

линии которой дают компоненты мгновенной оси вращения репера, соответственно для смещений ω_0^i ; элементы этой матрицы удовлетворяют уравнениям структуры.

Для исследования кривых конгруэнции достаточно дополнить систему (6) уравнениями

$$(8) \quad \omega_0^1 = \omega_0^2 = 0,$$

а для изучения неголономной ортогональной поверхности система (6) дополняется уравнением

$$(9) \quad \omega_0^3 = 0$$

и исследуется при каких условиях эта дополненная система находится в инволюции.

Все элементы матрицы Darboux имеют хорошее геометрическое истолкование связанное с кривизной и кручением векторных линий поля или с нормальной и геодезической кривизнами и геодезическим кручением направлений касающихся неголономной поверхности.

Используя понятие параллелизма $\sim^1$ направлений находящихся в семействе плоскостей связанных с точками пространственной кривой, введенное румынским академиком А. Myller'ом и понятиями адъюнктных точек и схождения в смысле Myller'a (введенные автором), обобщаются, естественным образом, многие семейства и классы линий и сетей; на этом я останавливаться не буду (оно было изложено в 1951 г.).

2. Определение инвариантных реперов данного поля, методом Cartan'a приводит без затруднений, как и можно было ожидать, к инвариантным реперам ортогональной неголономной поверхности, и к трёхграннику Frenet векторных линий поля. Так например для этого последнего имеем $q_3=0$; если же MI_1, I_2 направления касательных к линиям кривизны второго рода, то $p_1=q_2$ и т. д.

З а м е ч а н и я. а) Если ортогональная поверхность к векторам поля будет неголономной сферой ($p_1=q_2, p_2=-q_1$), то её инвариантные реперы неопределены; в этом случае необходимо выбрать каноническим репером поля трёхгранник Frenet его линий.

б) Если векторные линии поля прямые ($p_3=q_3=0$), то трёхгранник Frenet неопределён; в этом случае необходимо прибегнуть к одному из инвариантных реперов его ортогональной поверхности.

с) Если же конгруэнция прямых будет изотропной ($p_3=q_3=0, p_1=q_2, p_2 \neq -q_1$), то репер второго порядка совпадает с репером первого порядка — канонический репер неопределён и имеет одну степень свободы.

К каноническому реперу и инвариантам поля можно придти совершенно элементарным путём следующим образом.

Если элементы строк матрицы (7) считать компонентами трёх векторов $p, q, \bar{r}$, то-есть $p=p_i I_i$ и т. д., то

$$(10) \quad I_3, \text{rot } I_3, p \times \bar{q} \text{ и } \text{rot } \bar{r}$$

являются инвариантными векторами реперов MI_i сохраняющих направление I_3 . Отсюда следует например что трёхгранник

$$(11) \quad I_3, \frac{1}{\sqrt{i_4}} I_3 \times \text{rot } I_3, \frac{1}{\sqrt{i_4}} (I_3 \times (I_3 \times \text{rot } I_3))$$

будет инвариантным репером поля. Компоненты инвариантных векторов (10) по осям трёхгранника (11) дают все искомые инварианты поля:

$$(12) \quad \begin{aligned} I_3 \times \text{rot } I_3 &= -i_1, \quad (I_3, \bar{p}, \bar{q}) = i_3, \quad (I_3 \times \text{rot } I_3)^2 = i_4, \\ (I_3 \times \text{rot } I_3)(\bar{p} \times \bar{q}) &= -i_6, \\ (I_3 \times (I_3 \times \text{rot } I_3))(\bar{p} \times \bar{q}) &= i_6 \quad (i_i \text{ — обозначения С. Бюшгенса}). \end{aligned}$$

Все остальные инварианты, как например (13) $\operatorname{div} I_3 = -i_2$ или $\operatorname{rot} r$ выражаются через $i_1, i_3, -i_6$. На первый взгляд компоненты вектора $\operatorname{rot} r$ по осям трёхгранника (11), будут дифференциальными инвариантами; в самом же деле, так как $\operatorname{rot} r = q \times p(A)$, то эти компоненты будут: $-i_3, i_6, -i_5$. Полная система инвариантов поля состоит из пяти независимых инвариантов, которые впервые были найдены С. Бюшгенсом (1946 г.).

Отмечаю между прочим что при двухмерном поле нормалей поверхности соотношение (A) выражает теорему Eggermann (Gauss).

3. Прямые определяемые векторами данного поля MI_3 образуют комплекс. Канонический репер и инварианты этого комплекса определяются без особого труда если заметить что центр C луча комплекса ($MC = \rho$) его кривизна (α) и угол поворота его канонического репера (α) даны соотношениями:

$$(14) \quad \rho = -\frac{i_4 i_8}{i_5^2 + i_6^2}, \quad \alpha = -\frac{i_4 i_5}{i_5^2 + i_6^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{i_6}{i_5}.$$

Если исключить комплексы центры лучей которых образуют двухмерную поверхность (включающие и специальный комплекс), можно выбрать канонический репер его лучей CI_i и тогда матрица (7) будет:

$$(7') \quad \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & q_2 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} \quad (1:q_2 \text{ — кривизна комплекса})$$

Обозначая (15) $dq_2 = \chi_{i_0,0}$, из уравнений структуры следует

$$(15') \quad \begin{aligned} \chi_1 &= p_1 r_3 - p_2 r_1 - q_2 r_2, \\ \chi_3 &= p_3 r_2 - p_2 r_3 + p_2 q_2, \end{aligned}$$

и одно замечательное соотношение между элементами матрицы (7'):

$$(16) \quad r_1 p_3 - r_3 p_1 + q_2 (p_1 + r_3) = 0.$$

Элементы матрицы (7') удовлетворяющие соотношению (16) и χ_2 дают полную систему метрических инвариантов комплекса прямых.

Инвариант $\frac{1}{q_2}$ был найден Koenigs'ом, а остальные инварианты, вернее их определённые алгебраические выражения были установлены Нааск'ом (1936 г.).

Если обозначить через γ_1, τ_1 и γ_3, τ_3 кривизну и кручение линий полей (CI_1) и (CI_3), то (16) можно написать

$$(16') \quad \gamma_1 \gamma_3 - \tau_1 \tau_3 + q_2 (\tau_1 + \tau_3) = 0.$$

Оно выражает связь между кривизной комплекса прямых и обеими кривизнами центральных линий этого комплекса и комплекса сопряжённого с ним.

Частный случай. Если присоединить к реперу поля (MI_i) ранее введенную тройку векторов $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, то она определяет одну трёхмерную сеть, взаимная сеть которой касается их вихрям ($\text{rot } \bar{p}$ и т. д.). Нетрудно заметить что, если одна из конгруэнций, касающихся например вектору $\bar{p}$, будет нормальной, то и другие две (касающиеся векторам $\bar{q}$ и $\bar{r}$) будут также нормальными конгруэнциями. Действительно, если

$$(17) \quad \text{rot } \bar{p} \cdot \bar{p} = 0, \quad \text{то} \quad (18) \quad (\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) = 0 \text{ и т. д.}$$

В частности для канонического репера комплекса это будет иметь место если

$$(19) \quad p_1 r_3 - p_3 r_1 = 0 \quad (q_2 \neq 0).$$

Тогда из (16) следует немедленно

$$(20) \quad p_1 + r_3 = 0.$$

Геометрически эти соотношения показывают что поле главных нормалей центральных линий комплекса допускает одно семейство ортогональных развертывающихся поверхностей. Из $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) = 0$ выводится непосредственно, что цилиндры этого комплекса прямых вырождаются в плоскости и именно в распрямляющиеся плоскости его центральных линий. Исходя из этого характерного для них свойства эти комплексы были исследованы С. Финиковым (1940 г.).

Следуя вышеуказанному пути можно ввести новые классы комплексов, партикуляризируя например конгруэнцию его центральных линий, а также можно перенести классификации введенные для конгруэнций, на комплексы, если их применить к конгруэнциям их центральных линий.

4. Разложение комплекса прямых на конгруэнции и на семейства конгруэнций. Эта проблема, в ее частном случае, когда лучи комплекса разлагаются на нормальные конгруэнции (проблема Transon'a, 1861 г.) была исследована многими математиками за последнее столетие. Что касается разложения комплекса на другие замечательные конгруэнции, то можно было бы отметить только несколько работ в связи с разложением на параболические или на изотропные конгруэнции.

Для геометрических интерпретаций некоторых результатов, в связи с этой задачей, оказывается полезно ввести на каждом луче комплекса, две точки P_i абсциссы которых даны (21) $CP_i = \frac{\varepsilon}{q_2}$ ($\varepsilon = \pm 1$). Нетрудно установить что касательные плоскости к конусам комплекса имеющим вершины в P_i будут ортогональны, а касательная плоскость к центральному конусу комплекса является их биссекторной плоскостью.

Для разложения комплекса на конгруэнции прямых достаточно расширить систему пфаффовых уравнений:

$$(6) \quad p = p_i \omega_0^i, \quad q = q_i \omega_0^i, \quad r = r_i \omega_0^i$$

уравнением

$$(23) \quad \omega_0^i = bp - aq.$$

Используя уравнения структуры выводится единственное дифференциальное условие:

$$(24) \quad p_3(a_1 + b_2) + \frac{1}{q_2} [q_2 + r_3 + a(r_2 p_3 - r_3 p_2)] + \\ + (p_1 + r_3)[q_2(a^2 + b^2) - 2b] = 0,$$

где например

$$(25) \quad da = a_1 p + a_2 q \text{ и т. д.}$$

Легко заметить что для комплекса (20) это условие упрощается и даёт возможность, зная a (или b) определить b (или a) посредством квадратур (в общем случае оно приводит к уравнению типа Riccati). Приведём несколько частных разложений:

а) Разложению лучей комплекса на нормальные конгруэнции.

$\left(b = -\frac{1}{q_2}\right)$, что всегда возможно, можно дать следующую интерпретацию: один фокус луча конгруэнции и точка, симметрическая второму ее фокусу по отношению к C (центру луча комплекса) делить гармонически пару (P_1, P_2) . В частности, если один из фокусов в P_i , то второй будет в P_γ ($i \neq \gamma$); это может быть только для нормальных конгруэнций комплекса переменные которого удовлетворяют соотношению

$$(25) \quad \chi_2 p_3 - \chi_3 p_2 + q_2^2 (q_2 + 3p_1 + 4r_3) = 0.$$

Это же уравнение, если оно выражает связь между инвариантами для каждого луча, то оно даёт класс комплексов, при разложении лучей которых на семейства нормальных конгруэнций, фокусы этих последних будут неизменно в P_i .

б) Для задачи E. Cosserat (1892), которая состоит в определении комплексов лучи которых можно разложить на ∞^1 изотропные конгруэнции, имеем $a = 0$, $b = \frac{1}{q_2}$. Отсюда следует, первым долгом, что средняя точка луча каждой изотропной конгруэнции совпадает с центром луча комплекса (С. Фиников). Кроме того, средний параметр (анормальность) конгруэнции будет

$$(26) \quad \pi = \frac{2}{q_2}$$

В этом случае (24) даёт:

$$(27) \quad p_3 b_2 + 1 - b p_1 = 0$$

или

$$(27') \quad \chi_2 p_3 - \chi_3 p_2 + q_2^2 (p_1 - q_2) = 0.$$

Это соотношение между инвариантами комплекса характерно ком-

плексам которые можно разлагать на изотропные конгруэнции (С. Фиников).

З а м е ч а н и е. Если имеем отдельно $b = \frac{1}{q_2}$ ($a \neq 0$), то в этом случае фокусы разлагаемых конгруэнций делят гармонически пару (P_1, P_2) , а одна из предельных точек этих конгруэнций будет в C .

Здесь естественно возникает вопрос возможно ли чтобы средняя точка конгруэнции совпадала с одной из точек P_i ($a = \frac{2\epsilon}{q_2}$).

В этом случае инварианты класса таких комплексов удовлетворяют соотношению

$$(28) \quad \chi_2 p_3 - \chi_3 p_2 + q_2^2 (q_2 + 3p_1 + 4r_3 + \epsilon p_2) = 0.$$

Интересно заметить что разлагаемые конгруэнции, имеющие одну из предельных точек в C , а среднюю точку луча конгруэнции в одной из P_i , будут параболическими.

Итак имеем следующую теорему:

— При разложении лучей комплекса на конгруэнции если удовлетворены два из следующих трёх условий, то справедливо и третье:

1°. Пара фокусов луча конгруэнции делят гармонически пару (P_1, P_2) комплекса ($b = \frac{1}{q_2}$).

2°. Средняя точка луча конгруэнции находится в P_i ($a = \frac{2\epsilon}{q_2}$).

3°. Конгруэнция параболическая ($a^2 = \frac{4b}{q_2}$).

В этом случае, средняя поверхность (которая совпадает с единственной фокальной поверхностью) касается конуса комплекса с вершиной в P_i гауссова кривизна которой, в этой точке, будет

$$(29) \quad K = -\frac{q_2^2}{4}.$$

с) Для разложения комплекса на параболические конгруэнции (задача F. Klein'a), достаточно выразить что

$$(30) \quad b = \frac{1}{4} a^2 q_2;$$

задача имеет бесконечное число решений. Если же потребуем чтобы фокус каждой разлагаемой параболической конгруэнции был в C , то это возможно только для комплексов инварианты которых удовлетворяют соотношению

$$(31) \quad q_2 + r_3 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} q_2 \text{ — кривизна комплекса,} \\ r_3 \text{ — кручение центральных линий комплекса} \end{array} \right)$$

которое показывает что соприкасающиеся плоскости центральных

линий комплекса огибают семейство поверхностей гауссова кривизна которых

$$(32) \quad K = q_2^2.$$

д) Если конгруэнции на которые разлагаются лучи комплекса обладают свойством что один из фокусов луча будет в S , а другой в одной из точек P_i , то этот комплекс удовлетворяет инвариантному соотношению

$$(33) \quad p_1 + q_2 + 2r_3 + \varepsilon p_2 = 0.$$

В этом случае угол между фокальными плоскостями для каждого луча конгруэнции будет $\frac{\pi}{4}$.

е) Если разлагаются лучи линейного комплекса на конгруэнции, то, в этом случае, инварианты этих конгруэнций удовлетворяют дифференциальному соотношению

$$(34) \quad [da, q] + [p, d\pi] = 0,$$

где π средний параметр конгруэнции.

5. Геометрические свойства поля единичных векторов и связанного с ним комплекса находят себе хорошее применение в некоторых задачах гидродинамики. Для этого оказывается очень полезно удалить из дифференциальных следствий гидродинамических уравнений, все гидродинамические и кинематические элементы кроме логарифмической производной плотности по направлению вектора скорости.

Например, в случае стационарного потока идеальной и баротропной жидкости на которую действуют внешние консервативные силы (движение B) исключая из уравнений гидродинамики

$$(35) \quad (\bar{v} \nabla) \bar{v} = \text{grad } B \quad \text{и} \quad \text{div}(\rho \bar{v}) = 0$$

функцию B и величину $|\bar{v}|$ скорости, причём предполагаю что плотность жидкости (вообще переменная) дана. Для этого выбираю подвижным репером трёхгранник Frenet поля касательных к линиям тока.

Тогда

$$(36) \quad \bar{v} = v l_3, \quad q_3 = 0, \quad d \log v = v_i \omega_0^i$$

и уравнения (35) будут:

$$(37) \quad dB = v^2 [-p_3 \omega_0^2 + (i_2 - \varepsilon_3) \omega_0^3], \quad v_3 + \rho_3 = i_2.$$

З а м е ч а н и е. Из второго уравнения неразрывности, независимо от динамических условий, то есть для стационарного потока какой либо жидкости следует теорема: Если для стационарного потока жидкости удовлетворены два из следующих условий:

1° жидкость несжимаема ($\rho_3 = 0$),

2° движение на каждой линии тока равномерно ($v_3 = 0$),

3° конгруэнция линий тока минимальная ($i_2 = 0$), то справедливо и третье условие.

Внешний дифференциал первого уравнения (37) даёт одно из условий интегрируемости

$$(38) \quad p_3^2(p_1+r_3)-p_3(i_2-\rho_3)_1+(i_2-\rho_3)(i_{1,3}-i_1\rho_3)=0,$$

а также v_1 и v_2 . Значения этих последних приводят к

$$(39) \quad dH = \frac{1}{i_2-\rho_3} \left\{ p_3(p_1+r_3)\omega_0^1 + [p_2p_3-p_{3,3}-3p_3(i_2-\rho_3)]\omega_0^2 + \right. \\ \left. + [(i_2-\rho_3)_3 + 2(i_2-\rho_3)^2]\omega_0^3 \right\},$$

где

$$(40) \quad H = v^2(i_2-\rho_3), \quad i_2-\rho_3 \neq 0.$$

Внешний дифференциал этого последнего соотношения приводит к остальным условиям интегрируемости; они содержат инварианты поля и их производные до второго порядка включительно, а также и ρ_3 .

Напишу эти условия интегрируемости для частного случая винтового (продольного) движения:

$$(41) \quad v_1=0, \quad v_2=-p_3,$$

$$(42) \quad \rho_3 = (\lg i_1)_3 \quad \text{Grad} [i_2 - (\lg i_1)_3] = \\ = p_3 \left\{ (p_1+r_3)I_1 + [q_1 - (\lg p_3)_3]I_2 \right\} \quad (\text{Grad} - \text{поверхностный}).$$

Для винтового потока Громеки ($i_1=2c$) из первого соотношения следует что жидкость должна быть несжимаема. В этом случае линии кривизны второго рода неголономной поверхности ортогональной к линиям тока имеют одинаковое постоянное геодезическое кручение ($=c$).

Для исключенного выше случая

$$(43) \quad i_2-\rho_3=0$$

условия интегрируемости особенно просты

$$(44) \quad p_1+r_3=0, \quad (\lg p_3)_3=p_2,$$

и имеют прозрачный геометрический смысл. В данном случае, для винтового потока, конгруэнция линий тока которого будет изотропной, нетрудно доказываться что соприкасающаяся и распрямляющаяся плоскости линий тока огибают два семейства поверхностей, второе из которых состоит из минимальных поверхностей.

Вообще вышеуказанный приём даёт возможность установить геометрический аспект конгруэнции линий тока и решать например задачи следующего типа: при каких условиях какаянибудь замечательная конгруэнция линий или какойнибудь замечательный комплекс прямых являются соответственно линиями тока или их касательными некоторого движения (B).

Можно исследовать и другой геометрический аспект гидродинамической задачи движений (B) и именно: при каких условиях

одно семейство поверхностей и одна конгруэнция линий находящихся на поверхностях этого семейства, могут быть соответственно бернуллиевыми поверхностями (S_B) и линиями тока движения (B).

Пусть MI_3 будет полем нормалей к семейству данных поверхностей (S_B) и $\vec{v} = vI_1$ полем скоростей. В этом случае аналогичным путём устанавливаются условия интегрируемости; эти условия здесь формулируются довольно просто. Для этого присоединим к полю MI_1 векторное поле

$$(45) \quad J = \frac{\partial I_1}{\partial \omega_0^1} - \frac{\operatorname{div}(\rho I_1)}{\rho} I_1.$$

Тогда полученный результат будет: чтобы семейство поверхностей ($i_1=0$) было (S_B) и одна конгруэнция на них была конгруэнцией линий тока жидкости с плотностью ρ , подвергаемой движению (B), необходимо и достаточно

$$(46) \quad \operatorname{rot} J = \beta (J \times I_3)$$

и

$$(47) \quad \operatorname{Grad} \lg \beta = [2(r_2 + \rho_1) - q_3] I_1 - (2r_1 + p_3) I_2.$$

Уравнение (46) даёт два условия интегрируемости, содержащие инварианты поля и их производные первого порядка, а (47) — единственное условие интегрируемости содержащее производные второго порядка от инвариантов (второе соотношение содержащееся в (47) будет следствием предыдущих условий и уравнений структуры).

Если жидкость несжимаема и семейство (S_B) состоит из параллельных поверхностей, уравнение (47) сводится к

$$(48) \quad \operatorname{Grad} \lg \beta = 2(r_2 I_1 - r_1 I_2).$$

В скобке стоит чебышевский вектор сети (I_1, I_2) на каждой из этих поверхностей.

Вообще, для стационарного потока несжимаемой жидкости, из вышеустановленных условий интегрируемости, выводятся, без затруднений, большинство из результатов установленных различными математиками (B. Caldonazzo, B. Finzi, M. Pastori, A. Masotti, C. C. Бюшгенс, L. Castoldi, V. Vilcovici и т. д.), которые исследовали дифференциальную геометрию этих потоков. Для движения (B) сжимаемых жидкостей дифференциально геометрические аспекты почти не были исследованы, а потому установленные условия интегрируемости содержат много новых свойств. Даю один из простых примеров. В случае поперечного движения (B) ($\operatorname{rot} v \cdot v = 0$) сжимаемой жидкости выводятся без затруднений следующие новые свойства:

а) вихревые линии образуют биортогональную конгруэнцию, то есть они находятся на пересечении двух семейств ортогональных между собой поверхностей;

б) гауссова кривизна неголономной поверхности ортогональной полю вихрей равна нулю и совпадающие асимптотические направления этой поверхности касаются линий тока.

Некоторые из свойств, установленных В. Caldonazzo для несжимаемых жидкостей, остаются в силе и для случая сжимаемых жидкостей; например: линии тока на бернулиевых поверхностях будут геодезическими линиями, а вихревые линии будут изотаксическими линиями. Для несжимаемых жидкостей я заметил что вихревые линии на поверхностях ортогональных к линиям тока являются линиями одинаковой средней кривизны этих поверхностей.

6. Наконец хочу сказать несколько слов в связи с одной возможностью дать кинематическое истолкование некоторым классам сетей на поверхности и, возможностью их обобщения, на неголономную поверхность.

Пусть на поверхности ортогональной полю MI_3 находятся две конгруэнции линий MI_1, MI_2 ($I_1 \cdot I_2 = \cos \theta$) — говорим что они образуют сеть на данной неголономной поверхности. Каждой конгруэнции MI_i ($i=1, 2$) присоединяем скалярную функцию ρ^i и векторное поле

$$(49) \quad J^i = \frac{\partial I_i}{\partial \omega_0^i} - \frac{\operatorname{div}(\rho^i I_i)}{\rho^i} I_i,$$

а данной сети, присоединяем вектор

$$(50) \quad \bar{b} = \rho_1^1 I_1 + \rho_2^2 I_2.$$

Выбирая сеть для которой J^i находится в плоскостях (I_k, I_3) ($i \neq k=1, 2$) имеем

$$(51) \quad (J^i, I_k, I_3) = 0,$$

откуда следует

$$(52) \quad \rho_1^1 = g_2 + q_3, \quad \rho_2^2 = g_1 - p_3, \quad \text{где}$$

$$(53) \quad g_i = \frac{1}{\sin \theta} (G_i + \theta_i),$$

G_i — геодезическая кривизна линий сети.

Для этой сети вектор $\bar{b}$ будет

$$(54) \quad \bar{b} = \bar{c} + q_3 I_1 - p_3 I_2, \quad \text{где} \quad \bar{c} = g_1 I_2 + g_2 I_1.$$

Если данная неголономная поверхность ортогональна конгруэнции прямых ($v_3 = q_3 = 0$), то $\bar{b} = \bar{c}$. В частном случае семейства параллельных поверхностей $\bar{c}$ есть чебышевский вектор сети (I_1, I_2) на каждой поверхности. Если $\rho^1 = \rho^2$, то на каждой поверхности имеем сеть Дини, а если $\bar{c}$ будет градиентом скалярного поля, то сеть будет ромбической. В этом смысле можно обобщить сети Дини и т. д. на неголономную поверхность.

Скалярные функции ρ^i можно истолковать например как плотности некоторых жидкостей стационарного потока обтекающих данную поверхность. Если одну и ту же жидкость подвергнуть двум движениям (одновременно или неодновременно), то тогда

$\rho^1 = \rho^2$ и сеть их линий тока будет сетью Дини. В частности если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), то $\bar{b} = 0$ и тогда

$$(55) \quad \bar{c} = p_3 I_2 - q_3 I_1 = \frac{\partial I_3}{\partial \omega_0^3}.$$

Если же эта жидкость протекает по параллельным поверхностям, то $\bar{c} = 0$ — получаем чебышевскую сеть. Таким образом можно связать движения некоторых несжимаемых жидкостей с полу-чебышевской или чебышевской сетями.

В заключение хочется подчеркнуть ещё раз что дифференциально геометрическое исследование векторных полей охватывает довольно широкую проблематику классической дифференциальной геометрии, даёт возможность объединить изучение точечных и прямолинейных многообразий эвклидова (и даже аффинного) пространства и, наконец, содержит большие возможности его применения к различным отраслям прикладной науки. Для этого исследования метод внешних форм (Cartan'a) оказывается не только удобным, но и очень плодотворным.

Поступило в редакцию 12. III. 1957

ВЪРХУ ДИФЕРЕНЦИАЛНАТА ГЕОМЕТРИЯ НА ВЕКТОРНИТЕ ПОЛЕТА И НЯКОИ НЕЙНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. Георгиев (Яш)

РЕЗЮМЕ

Излагат се главните резултати, получени напоследък от автора в диференциалната геометрия на полетата от единични вектори и на комплексите от прави, а също така и някои приложения в хидродинамиката.

SUR LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE DES CHAMPS DE VECTEURS ET QUELQUES APPLICATIONS

Gh. Ghéorghiev (Iassy)

R E S U M E

On expose les principaux resultats obtenus récemment par l'auteur dans le domaine de la géométrie différentielle des champs de vecteurs unitaires et des complexes de droites, de même que les applications à l'étude de quelques problèmes d'hydrodynamique.