

SUR LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE D'UN MOUVEMENT TROUBLÉ

F. H. van den Dungen (Bruxelles)

1 — Soit un système holonome de coordonnées q^i ($i = 1, 2, \dots, n$) de momentoïdes p_i et de fonction hamiltonienne $H(p_i, q^i, t)$. Le théorème de l'action variée établit que la variation de l'action

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i dq^i - H dt$$

calculée le long d'une trajectoire naturelle ne dépend que de termes calculés aux extrémités

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} p_i dq^i - H dt = [p_i \delta q^i - H \delta t]_{t_0}^{t_1}$$

Si nous supposons que $t_1 = t_0 + dt$, nous obtenons

$$\delta (p_i dq^i - H dt) = d(p_i \delta q^i - H \delta t)$$

ou

$$(1) \quad \delta p_i dq^i - dp_i \delta q^i - \delta H dt - dH \delta t = 0.$$

Ainsi donc la différentielle extérieure (ou covariant bilinéaire) du pfaffier

$$(2) \quad p_i dq^i - H dt$$

est identiquement nulle

$$(3) \quad d.(p_i dq^i - H dt) = 0.$$

Il est bien connu qu'en annulant dans cette expression les coefficients des δp_i , δq^i , δt , on obtient:

$$\begin{aligned} dq^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \\ dp_i &= - \frac{\partial H}{\partial q^i} dt \end{aligned} \qquad dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

c'est-à-dire les $2n$ équations canoniques et leur équation résultante.

La solution générale du système étant de la forme

$$p_i = p_i(t, C_1, \dots, C_{2n})$$

(4)

$$q^i = q^i(t, C_1, \dots, C_{2n})$$

on peut former les δp_i et δq^i en donnant des accroissements arbitraires à δt et δC_α ($\alpha = 1 \dots 2n$) par exemple

$$\delta q^i = \frac{\partial q^i}{\partial t} \delta t - \frac{\partial q^i}{\partial C_\alpha} \delta C_\alpha.$$

En introduisant ces variations dans (1), on obtient $2n + 1$ identités.

2 — Imaginons que le système subisse une perturbation telle que la fonction hamiltonienne devienne

$$H + \omega R,$$

ω étant un paramètre constant infiniment petit.

Le pfaffien devient dès lors

$$(5) \quad p_i dq^i - (H + \omega R) dt.$$

La méthode de variation des constantes de Lagrange consiste à représenter le mouvement troublé par les mêmes solutions (4) où cette fois les C_α sont des fonctions du temps. Il en résulte que dans (5), on doit avoir

$$dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} dt + \frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha} dC_\alpha$$

$$dq^i = \frac{\partial q^i}{\partial t} dt + \frac{\partial q^i}{\partial C_\alpha} dC_\alpha$$

où les dérivées $\partial p_i / \partial t$, $\partial q^i / \partial t$ sont calculées à C_α constants, c'est-à-dire dans le cas du mouvement non troublé.

La différentielle extérieure de (5) se réduit dès lors, compte tenu de (3) à

$$(6) \quad \frac{\partial p_i}{\partial C_\alpha} \delta C_\alpha \frac{\partial q^i}{\partial C_\beta} dC_\beta - \omega \delta R dt - \frac{\partial q^i}{\partial C_\alpha} \delta C_\alpha \frac{\partial p_i}{\partial C_\beta} dC_\beta + \omega DR \delta t = 0.$$

Si R est exprimé en fonction des C_α au moyen de (4),

$$R(p_i, q^i, t) = Z(C_\alpha, t).$$

On tire de (6) les $2n + 1$ relations

$$[C_\alpha, C_\beta] dC_\beta = \omega \frac{\partial Z}{\partial C_\alpha} dt$$

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t}.$$

(11)

La dernière relation résulte des $2n$ précédentes qui sont les équations de Lagrange pour la méthode de la variation des constantes.

3 — Terminons par l'application de ces équations au mouvement du pendule de Foucault.

Nous plaçons l'origine des axes attachés à la Terre, en la position d'équilibre du pendule et pour l'étude de ses petits mouvements, nous remplaçons la sphère de rayon l par le paraboloïde osculateur en O

$$z = \frac{1}{2l} (x^2 + y^2)$$

les axes x et y étant horizontaux et z vertical ascendant.

Si les axes locaux sont fixes,

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2).$$

D'où la solution générale

$$x = a \cos \varphi \cos \psi (t - t_1) + b \sin \varphi \sin \psi (t - t_1)$$

$$y = a \sin \varphi \cos \psi (t - t_1) - b \cos \varphi \sin \psi (t - t_1).$$

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}$$

avec

$$\psi = \sqrt{g/l}$$

a demi grand axe de la trajectoire elliptique

b demi petit axe

φ angle que fait le grand axe avec l'axe des x

t_1 instant de passage par un sommet sur le grand axe.

Si les axes locaux sont entraînés par la rotation de la Terre (vitesse angulaire constante ω), on étudie le mouvement par rapport à un trièdre de même origine O en translation par rapport au trièdre géocentrique: le trièdre de Bour. On doit dès lors remplacer les momentôides dans (8) par

$$\begin{aligned} p_x - \frac{\partial I}{\partial \dot{x}} \\ p_y - \frac{\partial I}{\partial \dot{y}} \end{aligned} \quad \text{avec } I = \bar{\omega} \cdot \mathfrak{M}_r,$$

où $\mathfrak{M}_r$ est le moment cinétique relatif (ici moment de la quantité de mouvement) par rapport à O (Règle de Kamerlingh Onnes):

D'autre part on doit tenir compte du potentiel des réactions d'inertie centrifuge

$$K = -\bar{j}_0 \cdot \sum m r.$$

Si l'on développe la fonction hamiltonienne en fonction de ω , on obtient

$$H + \omega R$$

où

$$R = \sin \lambda (p_y x - p_x y),$$

λ étant la latitude de l'origine O sur la terre (le trièdre utilisé est lévogyre).

Les équations de Lagrange pour la variation des constantes sont

$$[a, b] \dot{b} + [a, \varphi] \dot{\varphi} + [a, b_1] \dot{b}_1 = \omega \frac{\partial Z}{\partial a}$$

où

$$Z = abm \psi \sin \lambda$$

et de façon explicite

$$b \psi \dot{\varphi} + a \psi^2 \dot{t}_1 = b \psi \omega \sin \lambda, \quad b \dot{a} + a \dot{b} = 0,$$

$$a \psi \dot{\varphi} + b \psi^2 \dot{t}_1 = a \psi \omega \sin \lambda, \quad a \dot{a} + b \dot{b} = 0.$$

La solution est

$$\dot{a} = \dot{b} = \dot{t}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\varphi} = \omega \sin \lambda.$$

Il apparaît donc que le plan de l'ellipse tourne avec la vitesse $\omega \sin \lambda$. C'est l'effet Foucault.

Si l'on tient compte des termes en $x^4 \dots$ dans le développement (7), on introduit une autre perturbation, c'est l'effet Poiseux des petits mouvements du pendule sphérique: le plan de la petite ellipse tourne dans le sens du mouvement du pendule. Les conditions de l'expérience de Foucault sont telles que cette perturbation est négligeable par rapport à la précédente.

Reçu le 23. 2. 59

ВЪРХУ УРАВНЕНИЯТА НА ЛАГРАНЖ НА ЕДНО СМУТЕНО ДВИЖЕНИЕ

Ф. Х. ван ден Дунген (Брюксел)

РЕЗЮМЕ

Нека q^i ($i = 1, 2, \dots, n$) са координатите на една холономна система и p_i са моментондите, като H е хамилтоновата функция. Вариацията на действието $\int_{t_0}^{t_1} p_i dq^i - H dt$, пресметната по една естествена траектория, е равна на $[p_i \delta q^i - H \delta t]_{t_0}^{t_1}$. Ако поставим $t_1 = t_0 + dt$, получаваме уравнение, означено в работата с (1). Известно е, че ако в това уравнение се анулират коефициентите на δp_i , δq^i , δt , получават се $2n + 1$ уравнения, от които първите $2n$ уравнения са каноничните уравнения на движението и последното може да се изведе като следствие от каноничните уравнения. Общото решение на системата се дава с (4), $p_i = p_i(t, C, \dots, C_{2n})$, $q^i = q^i(t, C_1, \dots, C_{2n})$.

Авторът разглежда такова пертурбиране на системата, при което хамилтоновата функция става $H + \omega R$, където ω е един константен безкрайно малък параметър. Прилага се методът на Лагранж за вариране на константите, който се състои в представяне на движението със същите решения (4), където обаче в случая C_a са функции на времето. Като се работи както по-горе, намират се $2n + 1$ уравнения, от които последното е следствие от другите $2n$ уравнения, които са уравненията на Лагранж, получени чрез метода на вариране на константите.

В края на работата тези уравнения се прилагат в движението на махалото на Фуко.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ЛАГРАНЖА ОТНОСИТЕЛНО СМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Ф. Х. ван ден Дунген (Брюссель)

РЕЗЮМЕ

Пусть q^i ($i = 1, 2, \dots, n$) является координатами одной голономной системы и p_i являются моментоидами, где H — гамильтониан. Вариация действия $\int_{t_0}^{t_1} p_i dq^i - H dt$, вычисленная вдоль одной естественной траектории, равна $[p_i \delta q^i - H \delta t]_{t_0}^{t_1}$. Если поставим $t_1 = t_0 + dt$ получаем уравнение, обозначенное в работе (1). Известно, что если в этом уравнении аннулировать коэффициенты действия $\delta p_i, \delta q^i, \delta t$ получаются $2n + 1$ уравнения, из которого первые $2n$ являются каноническими уравнениями движения, а последнее из них можно вывести в виде следствия из канонических уравнений. Общее решение системы дается (4), $p_i = p_i(t, C_1, \dots, C_{2n})$,

$$q^i = q^i(t, C_1, \dots, C_{2n}).$$

Автор рассматривает такое смущение системы, при котором гамильтониан становится $H + \omega R$, где ω постоянный, бесконечно малый параметр. Применяется метод Лагранжа вариации постоянных, который состоит в представлении движения теми же самыми решениями (4), где, однако, C_a являются функциями времени. Сделав те же самые операции, как и вышеуказанные, находим $2n + 1$ уравнения, являющиеся следствием других $2n$ уравнения Лагранжа, полученные методом вариации постоянных.

В конце работы эти уравнения применяются в движении маятника Фуко.