

ВЪРХУ НЕРАЗЛОЖИМИТЕ ЕЛЕМЕНТИ НА НЯКОИ КОНУСИ ОТ АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ

Я. Тагамлици

1. Нека G е просто свързана отворена област в комплексната равнина и K е конусът на функциите $f(z)$, които са холоморфни и еднолистни в G , които имат положителна реална част и които са нормирани с условието $\operatorname{Im}(f(z_0))=0$, където z_0 е вътрешна точка на G . Не е трудно да се види, че конусът K не е празен. За да се убедим в това, точно е да изобразим G по познати пътища конформно върху ограничена област G_1 и след това да изобразим кой да е кръг, който съдържа G_1 във вътрешността си, върху полуравнината, която се намира от дясната страна на ординатната ос.

Полагаме

$$P(f) = f(z_0).$$

Очевидно $P(f)$ е един реален функционал, защото $\operatorname{Im}(f(z_0))=0$. Този функционал е линеен и е способен да приема само положителни стойности, защото $f(z_0) = \operatorname{Re}(f(z_0)) > 0$. По такъв начин ние получихме в K една линейна норма. От друга страна, конусът K представлява очевидно една нормална фамилия и следователно единичната сфера $P(f) \leq 1$, допълнена с нулевия елемент, е компактна относно обичайната сходимост. Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че конусът K има поне един неразложим елемент. Нашата задача ще бъде да изучим по-подробно неразложимите елементи на K .

Теорема 1. *За да бъде една функция $f(z)$ от K неразложима в K , е необходимо и достатъчно тя да изобразява G върху цялата полуравнина, която се намира от дясната страна на ординатната ос.*

Доказателство. Ние ще установим първо необходимостта на условието.

И така нека $f(z)$ е неразложим елемент на K . Ние ще покажем, че всяко комплексно число с положителна реална част е функционална стойност на $f(z)$. Доказателството ще извършим, като допуснем противното. Нека числото $\alpha = a + bi$, където $a > 0$, не е функционална стойност на $f(z)$. В такъв случай аналитичната функция

$$(1) \quad g(z) = \frac{f(z) - bi \pm \sqrt{(f(z) - \alpha)(f(z) + \bar{\alpha})}}{2}$$

няма особени точки в G . И наистина $f(z)$ не приема стойността α съгласно

направеното предположение и не приема стойността $-\alpha$, защото $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$. По такъв начин

$$(f(z) - \alpha)(f(z) + \bar{\alpha}) \neq 0$$

и следователно $g(z)$ няма особени точки в G . От друга страна, областта G е просто свързана и следователно функцията $g(z)$ притежава еднозначен клон в G . Ние ще изберем един такъв клон, ще запазим за него означението $g(z)$ и ще положим

$$h(z) = \frac{f(z) - bi - \sqrt{(f(z) - \alpha)(f(z) + \bar{\alpha})}}{2}.$$

Така дефинираните функции $g(z)$ и $h(z)$ очевидно удовлетворяват уравненията

$$4g^2(z) - 4g(z)(f(z) - bi) + a^2 = 0,$$

$$4h^2(z) - 4h(z)(f(z) - bi) + a^2 = 0,$$

както това се вижда с непосредствено пресмятане. От така получените зависимости се вижда, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ не се анулират, защото $a \neq 0$. Това обстоятелство ни позволява да пишем

$$(2) \quad g(z) + \frac{a^2}{4g(z)} + bi = f(z),$$

$$(3) \quad h(z) + \frac{a^2}{4h(z)} - bi = f(z).$$

Не е трудно да се види, че така дефинираните функции $g(z)$ и $h(z)$ са еднолистни. Ще покажем това например за функцията $g(z)$. И наистина да допуснем, че

$$g(z_1) = g(z_2), \quad z_1 \in G, \quad z_2 \in G.$$

В такъв случай от (2) получаваме

$$f(z_1) = f(z_2),$$

което е възможно само при $z_1 = z_2$, защото функцията $f(z)$ е еднолистна. Еднолистността на $h(z)$ се вижда по същия начин. Не е трудно да се види, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ имат положителна реална част. Ще покажем това например за функцията $g(z)$ по следния начин. От (2) имаме

$$g(z) + \frac{a^2 \overline{g(z)}}{4g(z)\overline{g(z)}} + bi = f(z)$$

и следователно

$$\operatorname{Re}(g(z)) + \frac{a^2}{4|g(z)|^2} \operatorname{Re}(\overline{g(z)}) = \operatorname{Re}(f(z))$$

или още

$$\operatorname{Re}(g(z)) \left(1 + \frac{a^2}{4|g(z)|^2} \right) = \operatorname{Re}(f(z)) > 0$$

и следователно

$$\operatorname{Re}(g(z)) > 0.$$

Неравенството $\operatorname{Re}(h(z)) > 0$ се установява по същия начин.

Макар че функциите $g(z)$ и $h(z)$ са еднолистни и имат положителна реална част, те изобщо могат да не принадлежат на K , защото не са задължени да имат реална стойност в точката z_0 . Поради това ние ще въведем функциите

$$g_1(z) = g(z) + ip,$$

$$h_1(z) = h(z) + iq,$$

където реалните числа p и q се избират така, че числата $g_1(z_0)$ и $h_1(z_0)$ да бъдат реални. Очевидно функциите $g_1(z)$ и $h_1(z)$ принадлежат на K . От друга страна,

$$g_1(z) + h_1(z) = f(z) - ib + ip + iq$$

и тъй като трите числа $g_1(z_0)$, $h_1(z_0)$ и $f(z_0)$ са реални, то $-b + p + q = 0$ т. е.

$$f(z) = g_1(z) + h_1(z).$$

По такъв начин ние разложихме $f(z)$ на сума от две функции от K . Функцията $f(z)$ обаче е неразложима и следователно съществува такова реално неотрицателно число λ , че при ес_ко z от G да имаме

$$g_1(z) = \lambda f(z)$$

т. е.

$$g(z) + ip = \lambda f(z),$$

което заедно с (2) ни дава

$$4(\lambda - 1)d^2(z) + 4(\lambda b - p)ig(z) + \lambda a^2 = 0.$$

По такъв начин ние получихме едно квадратно уравнение относно $g(z)$ в което поне един от двата коефициента $4(\lambda - 1)$ и λa^2 е различен от нула, защото $a \neq 0$. От това следва, че функцията $g(z)$ не може да приема повече от две различни стойности в G . Достатъчно е сега да вземем под внимание, че функцията $g(z)$ е аналитична, за да заключим, че е константа, което не е вярно, защото тя е еднолистна. По такъв начин ние достигнахме до противоречие, с което необходимостта на условието е установена.

Сега ще установим достатъчността на условието, т. е. ще покажем, че ако $f(z)$ принадлежи на K и изобразява G върху цялата полуравнина, която се намира от дясната страна на ординатната ос, то $f(z)$ е неразложим елемент на G . За да покажем това, ще вземем под внимание, както вече споменахме по-горе, че в K неразложим елемент сигурно има, защото единичната сфера $P(f)$, 1 , допълнена с нулевия елемент, е компактна относно обичайната сходимост. Нека $f_0(z)$ е един неразложим елемент на K . Ще покажем, че функцията $f(z)$ е също неразложима. И наистина нека

$$f(z) = g(z) + h(z),$$

където $g(z) \in K$ и $h(z) \in K$. Нека z_1 е точка от G . Реалната част на $f_0(z_1)$ е положителна, защото $f_0(z) \in K$ и следователно може да се намери точка z_2 в G по такъв начин, че да имаме

$$(4) \quad f(z_2) = f_0(z_1).$$

Равенството (4) заедно с равенството

$$f(z_2) = g(z_2) + h(z_2)$$

ни дава

$$(5) \quad f_0(z_1) = g(z_2) + h(z_2).$$

Нека $F(u)$ е обратната функция на $f(z)$. Функцията $F(u)$ е холоморфна, защото $f(z)$ е еднолистна. Дефиниционната област на $F(u)$ съвпада със съвкупността от функционалните стойности на $f(z)$, т. е. е точно полуравнината, която се намира от дясната страна на ординатната ос. От $z = F(f(z))$ и (4) имаме

$$z_2 = F(f_0(z_1))$$

и следователно (5) може да се напише във вида

$$f_0(z_1) = g(F(f_0(z_1))) + h(F(f_0(z_1))).$$

Точката z_1 обаче е избрана произволно в G . По такъв начин $f_0(z)$ е разложена на сума от две еднолистни функции с положителна реална част. За да разложим $f_0(z)$ на две събираеми от K , достатъчно е да въведем двете функции

$$g_1(z) = g(F(f_0(z))) + ip,$$

$$h_1(z) = h(F(f_0(z))) + ig,$$

където реалните числа p и g се избират така, че числата $g_1(z_0)$ и $h_1(z_0)$ да бъдат реални. В такъв случай ще имаме

$$f_0(z) + ip + ig = g_1(z) + h_1(z)$$

и като вземем под внимание, че числата $g_1(z_0)$, $h_1(z_0)$ и $f_0(z_0)$ са реални, получаваме $p + q = 0$ и следователно

$$f_0(z) = g_1(z) + h_1(z).$$

По такъв начин ние разложихме $f_0(z)$ на две събираеми от K . От друга страна, функцията $f_0(z)$ е неразложима и следователно съществува неотрицателно число λ , за което е изпълнено при всяко z от G равенството

$$g_1(z) = \lambda f_0(z)$$

или още

$$(6) \quad g(F(f_0(z))) + ip = \lambda f_0(z).$$

Да изберем точката z_3 произволно в G и да определим z_4 по такъв начин, че да имаме $f(z_3) = f_0(z_4)$. Това е възможно, защото $\operatorname{Re}(f(z_3)) > 0$, а функцията $f_0(z)$ е неразложима и следователно съгласно доказаното по-горе всяко комплексно число с положителна реална част е неговата функционална стойност. От (6) получаваме

$$g(F(f_0(z_4))) + ip = \lambda f_0(z_4)$$

и следователно

$$g(F(f(z_3))) + ip = \lambda f(z_3)$$

или

$$(7) \quad g(z_3) + ip = \lambda f(z_3),$$

защото $F(f(z_3)) = z_3$. Равенството (7) е установено при всяко z_3 от G . Специално при $z_3 = z_0$ получаваме

$$g(z_0) = ip = \lambda f(z_0)$$

и следователно $p=0$, защото числата $g(z_0)$, λ и $f(z_0)$ са реални. По такъв начин окончателно получаваме при всяко z от G равенството

$$g(z) = \lambda f(z),$$

с което е установена неразложимостта на $f(z)$.

Приложение. Нека $f_0(z)$ е даден неразложим елемент на K . Такъв елемент, както вече отбелязахме, сигурно има. Съгласно доказаното $f_0(z)$ изобразява областта G конформно върху полуравнината, която е съставена от комплексните числа с положителна реална част. По такъв начин ние получихме теоремата на Риман, според която всяка просто свързана област може да се изобрази конформно върху кръгова област.

2. Нека S е конусът на еднолистните аналитични функции $f(z)$ в единичния кръг $|z| < 1$, които са реални, т. е. за реални стойности на z приемат реални стойности, и са нормирани с условията $f(0)=0$ и $f'(0)>0$. Очевидно единичната сфера $f'(0) \leq 1$, допълнена с нулевия елемент, е компактна относно обичайната сходимост. От това следва, че в S сигурно има неразложими елементи. Ние ще си поставим за задача да изучим по-отблизо тези неразложими елементи.

Теорема. *Неразложимите в S функции $f(z)$ имат вида*

$$(8) \quad f(z) = \frac{Cz}{1 - 2tz + z^2},$$

където $-1 \leq t \leq 1$ и $C > 0$, и, обратно, функциите от вида (8) са неразложими в S .

Доказателство. Първо ще установим, че неразложимите елементи на S имат вида (8). И наистина нека $f(z)$ е неразложим елемент на S . Ще покажем, че всяко комплексно число, чиято имагинерна част е различна от нула, е функционална стойност на $f(z)$. Да допуснем противното. Нека $\alpha = a + bi$, където $b \neq 0$ не е функционална стойност на $f(z)$. Тогава числото $\bar{\alpha} = a - bi$ също не е функционална стойност на $f(z)$, защото функцията $f(z)$ е реална. Да разгледаме функцията

$$g(z) = \frac{f(z) - a + \sqrt{(f(z) - \alpha)(f(z) - \bar{\alpha})}}{2}.$$

Тази функция няма особени точки в кръга $|z| < 1$, защото

$$(f(z) - \alpha)(f(z) - \bar{\alpha}) \neq 0$$

и следователно притежава в него еднозначен клон. Ние ще изберем такъв клон, ще запазим за него означението $g(z)$ и ще положим

$$h(z) = \frac{f(z) - a - \sqrt{(f(z) - \alpha)(f(z) - \bar{\alpha})}}{2}.$$

След прости пресмятания получаваме

$$(9) \quad 4g^3(z) - 4g(z) \left(f(z) - \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \right) + \frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{4} = 0,$$

$$(10) \quad 4h^3(z) - 4h(z) \left(f(z) - \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} \right) + \frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{4} = 0.$$



От тези равенства се вижда, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ при реални стойности на z приемат реални стойности, защото дискриминантата

$$4f^2(z) - 4(\alpha + \bar{\alpha})f(z) - 4\alpha\bar{\alpha}$$

на квадратните уравнения (9) и (10) е положителна, тъй като представлява квадратен тричлен на $f(z)$ с отрицателна дискриминанта

$$4(\alpha - \bar{\alpha})^2$$

и положителен свободен член. От равенствата (9) и (10) се вижда също тъй, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ не се анулират, защото $\bar{\alpha} \neq \alpha$. От (9) и (10) получаваме

$$(11) \quad g(z) + \frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{16g(z)} + \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = f(z),$$

$$(12) \quad h(z) + \frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{16h(z)} + \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = f(z),$$

което ни учи, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ са еднолистни. И наистина да допуснем например, че $g(z_1) = g(z_2)$, където $|z_1| < 1$ и $|z_2| < 1$. В такъв случай от (11) получаваме $f(z_1) = f(z_2)$ и следователно $z_1 = z_2$, защото функцията $f(z)$ е еднолистна. Еднолистността на $h(z)$ е също тъй очевидна. Да пресметнем $g'(0)$ и $h'(0)$. От (11) и (12) намираме

$$g'(0) - \frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{16g^2(0)} g'(0) = f'(0),$$

$$h'(0) - \frac{(\alpha - \bar{\alpha})^2}{16h^2(0)} h'(0) = f'(0).$$

Това пресмятане може да се извърши, защото, както вече отбелязахме, $g(0) \neq 0$ и $h(0) \neq 0$. По такъв начин получаваме

$$(13) \quad g'(0) > 0,$$

$$(14) \quad h'(0) > 0,$$

защото $-(\alpha - \bar{\alpha})^2 > 0$.

Функциите $g(z)$ и $h(z)$ са реални, еднолистни и удовлетворяват условията (13) и (14), обаче те не принадлежат на S , защото не се анулират в началото. Поради това ние ще въведем функциите

$$g_1(z) = g(z) - g(0),$$

$$h_1(z) = h(z) - h(0),$$

които принадлежат на S . Очевидно имаме

$$f(z) = g_1(z) + h_1(z).$$

От друга страна, функцията $f(z)$ е неразложима в S . Това ни дава възможност да пишем

$$g_1(z) = \lambda f(z),$$

където λ е неотрицателна константа. От това равенство и от (11) получаваме

$$(15) \quad 16(1-\lambda)g^2(z) - [16g(0) + 8\lambda(\alpha + \bar{\alpha})]g(z) - \lambda(\alpha - \bar{\alpha})^2 = 0,$$

което е едно квадратно уравнение относно $g(z)$. По такъв начин функцията $g(z)$ не може да приема повече от две различни стойности, защото поне един от двата коефициента $16(1-\lambda)$ и $-\lambda(\alpha - \bar{\alpha})^2$ на квадратното уравнение (15) е различен от нула. По такъв начин ние достигнахме до противоречие, защото функцията $g(z)$ е еднолистна и следователно приема безбройно много стойности. По такъв начин ние доказахме, че функцията $f(z)$ приема всяка комплексна стойност, чиято имагинерна част е различна от нула. Общият вид на еднолистните в единичния кръг функции с това свойство е обаче известен. Това са функциите от вида (8). С това първата част на интересуващата ни теорема е доказана.

Сега ще покажем, че функциите от вида (8) са неразложими в S . Това може да стане по различни начини. Ние ще изложим следното съвсем елементарно доказателство.

Избираме произволно реално число t_0 в затворения интервал $-1 \leq t \leq 1$ и разглеждаме в този интервал функцията

$$\varphi(t) = \frac{a}{1-2at+a^2} - \frac{\lambda b}{1-2bt+b^2}$$

където числата a , b и λ са реални, $a+b \neq 2t_0$ и $0 < a < b < 1$. В такъв случай

$$\varphi'(t) = \frac{2a^2}{(1-2at+a^2)^2} - \frac{2\lambda b^2}{(1-2bt+b^2)^2}.$$

Избираме числото λ така, че да имаме $\varphi'(t_0) = 0$. Това може да се направи, защото $b \neq 0$. Не е трудно да се убедим, че при този избор на λ производната $\varphi'(t)$ не се анулира в интервала $-1 \leq t \leq 1$ в точки, различни от t_0 , и наистина от $\varphi'(t) = 0$ имаме

$$\frac{a}{1-2at+a^2} = \frac{b\sqrt{\lambda}}{1-2bt+b^2}$$

или още

$$a + ab^2 - b(1+a^2)\sqrt{\lambda} + 2ab(\sqrt{\lambda} - 1)t = 0.$$

По такъв начин ние получихме линейно уравнение относно t , поне един от коефициентите на което е различен от нула. И така $\varphi'(t)$ се анулира в интервала $-1 \leq t \leq 1$ само в точката t_0 . От друга страна, с непосредствено пресмятане се убеждаваме, че $\varphi''(t_0) \neq 0$, защото $a+b \neq 2t_0$. По такъв начин ние добиваме възможност да твърдим, че функцията $\varphi(t)$ приема в точката t_0 стойност, която е или строго по-голяма от всичките останали функционални стойности в интервала $-1 \leq t \leq 1$, или строго по-малка. Ние ще разгледаме случая, когато стойността $\varphi(t_0)$ е най-голяма. Случаят, когато тя е най-малка, се разглежда по същия начин.

Да образуваме линейния функционал

$$F(f) = f(a) - \lambda f(b)$$

и да означим с L максималната стойност, която той добива в единичната сфера $f'(0) \leq 1$ на S . По такъв начин при всяко $f(z)$ от S имаме

$$F(f) \leq Lf'(0).$$

Да разгледаме конуса S , който е съставен от онези функции на S , за които е изпълнено равенството

$$F(f) = Lf'(0).$$

Този конус очевидно не е празен и притежава неразложим елемент, защото единичната сфера $f'(0) \leq 1$ на S , допълнена с нулевия елемент, е компактна относно обичайната сходимост, а следователно сечението ѝ с конуса S_1 , допълнено с нулевия елемент, е също тъй компактно. Нека $f_0(z)$ е един неразложим елемент на S_1 . Ще покажем, че той е неразложим и в S . И наистина нека

$$f_0(z) = g(z) + h(z),$$

където $h(z) \in S$ и $h(z) \in S$. В такъв случай

$$F(f_0) = F(g) + F(h),$$

$$f'_0(0) = g'(0) + h'(0)$$

и следователно

$$Lf'_0(0) - F(f_0) = [Lg'(0) - F(g)] + [Lh'(0) - F(h)].$$

От друга страна,

$$Lf'_0(0) - F(f_0) = 0,$$

$$Lg'(0) - F(g) = 0,$$

$$Lh'(0) - F(h) \geq 0$$

и следователно $F(g) = Lg'(0)$ и $F(h) = Lh'(0)$,

т. е. $g(z) \in S_1$ и $h(z) \in S_1$. Елементът $f_0(z)$ обаче е неразложим в S_1 и следователно

$$g(z) = \alpha f_0(z), \quad h(z) = \beta f_0(z),$$

където α и β са неотрицателни константи. По такъв начин е установена неразложимостта на $f_0(z)$ в S .

Ние обаче вече установихме, че неразложимите елементи на S трябва да се търсят измежду функциите (8). Това ни дава право да твърдим, че при някое τ от интервала $-1 \leq t \leq 1$ имаме

$$f_0(z) = \frac{Cz}{1 - 2\tau z + z^2}, \quad C > 0,$$

и следователно

$$F(f_0) = \frac{Ca}{1 - 2\tau a + a^2} - \frac{\lambda Cb}{1 - 2\tau b + b^2} = C\varphi(\tau),$$

което заедно с

$$F(f_0) = Lf'_0(0) = LC$$

ни дава

$$\varphi(\tau) = L.$$

От друга страна, функциите (8) принадлежат на S и следователно

$$F\left(\frac{z}{1 - 2tz + z^2}\right) \leq L,$$

т. е.

$$\varphi(t) \leq L.$$

По такъв начин ние установихме, че функцията $\varphi(t)$ приема при $t=\tau$ максимална стойност. От друга страна, ние знаем, че тя приема максимална стойност само в точката t_0 и следователно $\tau=t_0$, т. е.

$$\frac{z}{1-2t_0z+z^2}=f_0(z).$$

Ние обаче видяхме, че функцията $f_0(z)$ е неразложима в S . С това е установена и неразложимостта на

$$\frac{z}{1-2t_0z+z^2}$$

при всеки избор на t_0 в затворения интервал $[-1, 1]$.

Постъпила на 30. XII. 1961 г

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ НЕКОТОРЫХ КОНУСОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Я. Тагамлицкий

(Резюме)

В конусе регулярных и однолистных функций в некоторой односвязной области G , которые имеют положительную действительную часть, неразложимы те и только те функции, которые отображают G конформно на полуплоскость комплексных чисел с положительной действительной частью. В качестве приложения доказывается теорема Римана о конформных отображениях.

В конусе регулярных однолистных, нормированных и действительных в единичном круге функций неразложимыми являются функции вида

$$f(z)=\frac{cz}{1-2tz+z^2}, \quad c>0, \quad -1\leq t\leq 1$$

и только эти функции.

DIE IRREDUZIBLEN ELEMENTE GEWISSE KEGEL VON ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

J. Tagamlitzki

(Zusammenfassung)

Im Kegel der in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G schlichten analytischen Funktionen, die einen positiven Realteil besitzen, sind genau diejenigen Funktionen irreduzibel, die G auf die Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 0$ konform abbilden. Daraus ergibt sich der Satz von Riemann über die konforme Abbildung.

Im Kegel der schlichten normierten reellen analytischen Funktionen sind genau die Funktionen

$$f(z) = \frac{cz}{1 - 2tz + z^2}, \quad c > 0, \quad 1 \leq t \leq 1$$

irreduzibel.