

ВЪРХУ НЯКОИ ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ЗА УРАВНЕНИЕТО

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0. \quad \text{II}$$

Георги Каратопраклиев

Настоящата работа представлява продължение на работата [1]. Кратко изложение на резултатите от § 1 и 4 е дадено в [2] и [3].

§ 1. Видоизменена задача T_1

В работата [1] отбелязахме, че при $n > 1$ задачата T_1 [4—6] може да няма решение. Сега ще покажем, че постановката на задачата T_1 може да се видоизмени така, че видоизменената задача T_1 да има решение.

1. Нека D е крайна едносвързана област в равнината xOy , ограничена от линия на Жордан σ с краища в точките $A(-1,0)$, $B(1,0)$, разположена в горната полуравнина $y > 0$, и характеристиките $AC: y = -x - 1$ и $BC: y = x - 1$ на уравнението на Лаврентиев—Бицадзе

$$(1.1) \quad u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0,$$

които излизат от точката $C(0, -1)$. Нека $E_k(a_k, 0)$, $k = 1, \dots, n$,

$-1 < a_1 < \dots < a_n < 1$ са дадени точки от отсечката AB . Точките

$$A_k\left(\frac{a_k-1}{2}, -\frac{a_k+1}{2}\right) \text{ и } B_k\left(\frac{a_k+1}{2}, \frac{a_k-1}{2}\right), k=0, \dots, n+1 \quad (a_0=-1, a_{n+1}=1)$$

лежат съответно на характеристиките AC и BC . Означаваме с D_1 елиптическата, а с D_2 хиперболичната част на смесената област D .

Видоизменена задача T_1 . Търси се функция $u(x, y)$ със следните свойства:

1) $u(x, y)$ удовлетворява уравнението (1.1) в областта D с изключение на точките от отсечката AB и характеристиките $E_k A_k$, $E_k B_k$, $k = 1, \dots, n$;

2) $u(x, y)$ е непрекъсната в затворената област $\bar{D}$;

3) частните производни u_x и u_y са непрекъснати в областта D с изключение може би на точките от характеристиките $E_k A_k$, $E_k B_k$, $k = 1, \dots, n$, в които те могат да се обръщат в безкрайност от ред, по-малък от единица, освен това u_x и u_y могат да имат същата особеност и в точките A , B ;

4) $u(x, y)$ удовлетворява граничните условия

$$(1.2) \quad u|_{\sigma} = \varphi,$$

$$(1.3) \quad u|_{A_k A_{k+1}} = \psi'_k(x) \text{ при четни } k,$$

$$(1.4) \quad u|_{B_k B_{k+1}} = \psi_k(x) - a_k \text{ при нечетни } k,$$

където функцията φ е непрекъсната, а $\psi'_k(x)$, $k=0, \dots, n$, са двукратно диференцируеми функции, вторите производни на които удовлетворяват условието на Хьолдер и $\psi'_0(A) = \varphi(A)$ (при нечетно n трябва да бъде изпълнено и условието $\psi'_n(B) = \varphi(B)$); a_k са реални константи, които не се задават отнапред.

Първо ще разгледаме случая $n=2m$.

Видоизменената задача T_1 не може да има повече от едно решение. Това твърдение означава, че ако $\varphi=0$ и $\psi_k(x)=0$, $k=0, \dots, 2m$, то $u(x, y)=0$ и $a_{2k-1}=0$, $k=1, \dots, m$.

В областта D_2 решението $u(x, y)$ на уравнението (1.1) се дава с формулата

$$(1.5) \quad u(x, y) = \tau(x-y) - \tau(x-y) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} r(t) dt,$$

където

$$(1.6) \quad \tau(x) = u(x, 0), \quad r(x) = u_y(x, 0), \quad 1 \leq x \leq 1.$$

От (1.3), (1.4) и (1.5) получаваме

$$(1.7) \quad \tau(x) - \tau(1) + \int_1^x r(t) dt = 2\psi'_{2k-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2a_{2k-1} \text{ при } x \in L_1,$$

$$(1.8) \quad \tau(x) - \tau(-1) - \int_{-1}^x r(t) dt = 2\psi'_{2k}\left(\frac{x-1}{2}\right) \text{ при } x \in L_2,$$

където L_1 и L_2 са съответно съвкупностите от интервалите (a_{2k-1}, a_{2k}) , $k=1, \dots, m$ и (a_{2k}, a_{2k+1}) , $k=0, \dots, m$. Като диференцираме (1.7) и (1.8) и вземем под внимание означенията (1.6), получаваме

$$(1.9) \quad u_x - \lambda(x)u_y = f(x), \quad y=0, \quad a_k < x < a_{k+1}, \quad k=0, \dots, 2m,$$

където

$$(1.10) \quad \lambda(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in L_1, \\ 1 & \text{при } x \in L_2, \end{cases}$$

$$(1.11) \quad f(x) = \begin{cases} 2 \frac{d}{dx} \psi'_{2k-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) & \text{при } x \in L_1, \\ 2 \frac{d}{dx} \psi'_{2k}\left(\frac{x-1}{2}\right) & \text{при } x \in L_2. \end{cases}$$

Оттук, както в задачата T [6], заключаваме, че ако $\psi_k(x) \equiv 0$, $k=0, \dots, 2m$, решението $u(x, y)$ на видоизменената задача T_1 в затворената област $\bar{D}_1$ не може да достига отличен от нула екстремум в интервалите $a_k < x < a_{k+1}$, $k=0, \dots, 2m$. Решението $u(x, y)$ не може да достига отличен от нула екстремум и в точките E_k , $k=1, \dots, 2m$. Наистина, от известното свойство на характеристичния четириъгълник на уравнението на струната следва, че $u(a_{2k-1}, 0) = u(a_{2k}, 0) = a_{2k-1}$, $k=1, \dots, m$. Да допуснем, че $u(x, y)$ достига отличен от нула екстремум в някоя от точките E_{2k} , $k=1, \dots, m$, която да означим с E_{2k_0} . Тогава стойността на $u(x, y)$ в точката E_{2k_0-1} също ще бъде екстремална. От известните свойства на линиите на ниво на $u(x, y)$ [7] следва, че точката E_{2k_0-1} може да бъде отделена от останалите точки E_k с гладка линия на ниво $\Gamma: u(x, y) = \text{const}$, с краища на отсечката AB и изцяло лежаща в областта D_1 . Означаваме с S областта, ограничена от линията Γ и оста O_x , а с l — нейния контур. Към областта S прилагаме формулата на Грин

$$\int_S (u_x^2 + u_y^2) dx dy = - \int_l (u - \text{const}) \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

където n е вътрешната нормала. От тази формула, като вземем пред вид равенствата $u_x + u_y = 0$ при $x \in L_1$ и $u_x - u_y = 0$ при $x \in L_2$, заключаваме, че $u(x, y) = \text{const}$ в цялата област D_1 , което е невъзможно при $\varphi \neq 0$.

Следователно, ако $\psi_k(x) \equiv 0$, $k=0, \dots, 2m$, решението $u(x, y)$ на видоизменената задача T_1 в $\bar{D}_1$ достига отличен от нула екстремум върху линията σ (принцип за екстремум).

От принципа за екстремум непосредствено следва единствеността на решението на видоизменената задача T_1 .

Съществуването на решение на видоизменената задача T_1 ще бъде доказано, ако можем да намерим функцията $u(x, y)$ в областта D_1 . Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $u_{\sigma} = 0$ [8]. Допълнително ще предполагаме, че линията σ е гладка и удовлетворява условието на Ляпунов, а частните производни u_x и u_y са непрекъснати в $\bar{D}_1$ с изключение може би на точките E_k , $k=0, \dots, 2m+1$.

Посредством конформно изображение областта D_1 може да се трансформира в полукръга $|z| < 1$, $\text{Im } z > 0$, при което линията σ се трансформира в полуокръжността σ_0 , а отсечката AB — в себе си [9]. Поради това отнапред можем да предполагаме, че σ съвпада със σ_0 .

Въвеждаме функцията $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, която е холоморфна в областта D_1 и удовлетворява условието $\Phi(-1) = 0$.

Условията (1.9) могат да бъдат записани във вида

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \text{Re}(1-i)\Phi'(x) &= f(x) && \text{при } x \in L_2, \\ \text{Im}(1-i)\Phi'(x) &= -f(x) && \text{при } x \in L_1. \end{aligned}$$

От условието $u_{\sigma_0} = 0$ следва, че функцията $\Phi(z)$ аналитично се продължава през σ_0 в цялата горна полуравнина, при това

$$(1.13) \quad \Phi(z) = \begin{cases} u(x, y) + iv(x, y) & \text{при } z \in D_1, \\ -u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) + iv\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) & \text{при } z \in D_1^*, \end{cases}$$

където D_1^* е инверсията на D_1 относно σ_0 .

От (1.13) следва, че функцията $\Phi(z)$ трябва да удовлетворява условието

$$(1.14) \quad \Phi\left(\frac{1}{z}\right) = -\Phi(z).$$

Нека $a_{2j} < 0 < a_{2j+1}$. От (1.13) и (1.12) получаваме

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(1-i)\Phi'(x) &= \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \in \bar{L}_1, \\ \operatorname{Im}(1-i)\Phi'(x) &= -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \in \bar{L}_2, \end{aligned}$$

където $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$ са съответно съвкупностите от интервалите (b_{2k}, b_{2k-1}) $k=1, \dots, m$ и (b_{2k+1}, b_{2k}) , $k=0, \dots, j-1, j+1, \dots, m$, $(-\infty, b_{2j})$ (b_{2j+1}, ∞) ; $b_k = \frac{1}{a_k}$.

При $z = \infty$ функцията $\Phi'(z)$ има нула от втори ред, понеже $u(x, y)$ е ограничена [10].

Следователно намирането на $\Phi'(z)$ се свежда до следната гранична задача от теорията на холоморфните функции: да се намери частично-холоморфна в горната полуравнина функция $\Phi'(z)$, която има нула от втори ред при $z = \infty$ и удовлетворява граничните условия (1.12) и (1.15).

Общото решение от класа h_0 на тази задача се дава с известната формула на Келдиш — Седов [11, 10]

$$(1.16) \quad (1-i)\Phi'(z) = \frac{1}{\pi i} \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \frac{g(t)}{t-z} dt + \frac{C_0 + C_1 z + \dots + C_{2m-1} z^{2m-1}}{R(z)},$$

където

$$(1.17) \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in L_2, \\ -if(x) & \text{при } x \in L_1, \\ \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{при } x \in \bar{L}_1, \\ -\frac{i}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{при } x \in \bar{L}_2, \end{cases}$$

$$(1.18) \quad \begin{aligned} R_1(z) &= \left[(z+1) \prod_{k=1}^m (z-a_{2k})(z-b_{2k}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ R_2(z) &= \left[(z-1) \prod_{k=1}^m (z-a_{2k-1})(z-b_{2k-1}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ R(z) &= \left[(z^2-1) \prod_{k=1}^{2m} (z-a_k)(z-b_k) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

под $\frac{R_1(z)}{R_2(z)}$ подразбираме клона, който е холоморфен в разрязаната по L_2 и $\bar{L}_1$ равнина и при $z = \infty$ приема стойност 1, а под $R(z)$ — клона, който е холоморфен в разрязаната по същия начин равнина и приема положителни стойности при $x > b_{2j+1}$; $C_0, \dots, C_{2m-1}$ са произволни реални константи.

От (1.16), като вземем пред вид (1.17), след прости преобразувания получаваме

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \Phi'(z) = & \frac{1-i R_1(z)}{2\pi i R_2(z)} \int_{L_1} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt \\ & + \frac{1+i R_1(z)}{2\pi i R_2(z)} \int_{L_1} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt \\ & + \frac{1+i C_0 + C_1 z + \dots + C_{2m-1} z^{2m-1}}{2 R(z)}. \end{aligned}$$

Функцията $\Phi(z)$ се дава с формулата

$$(1.20) \quad \Phi(z) = \int_{-1}^z \Phi'(\zeta) d\zeta.$$

Лесно се вижда, че $\Phi(z)$ удовлетворява условието (1.14) само тогава,

когато

$$C_k = C_{2m-k-1}, \quad k=0, \dots, m-1.$$

Константите C_k и a_{2k+1} , $k=0, \dots, m-1$ определяме от условията

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(a_{2k+1}) &= \psi_{2k} \left(\frac{a_{2k+1}-1}{2} \right) + \psi_{2k+1} \left(\frac{a_{2k+1}+1}{2} \right) \\ &\quad - \psi_{2m}(0) + a_{2k+1}, \quad k=0, \dots, m-1, \\ \operatorname{Re} \Phi(a_{2k+2}) &= \psi_{2k+2} \left(\frac{a_{2k+2}-1}{2} \right) + \psi_{2k+1} \left(\frac{a_{2k+2}+1}{2} \right) \\ &\quad - \psi_{2m}(0) + a_{2k+1}, \quad k=0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Тези условия представляват линейна система от $2m$ уравнения относно C_k и a_{2k+1} :

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \beta_{kj} C_j - a_{2k+1} &= \beta_k, \quad k=0, \dots, m-1, \\ \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{kj} C_j - a_{2k+1} &= \gamma_k, \quad k=0, \dots, m-1, \end{aligned}$$

където β_{kj} и γ_{kj} не зависят от $\psi_k(x)$, а $\beta_k=0$ и $\gamma_k=0$ при $\psi_k(x) \equiv 0$, $k=0, \dots, 2m$.

От единствеността на решението на видоизменената задача T_1 следва, че системата (1.21) има само едно решение.

В областта D_1 , $u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z)$. В областта D_2 функцията $u(x, y)$ се дава с формула (1.5), където $\tau(x)$ и $\nu(x)$ се определят съответно от (1.20) и (1.19).

Нека $n = 2m - 1$. В този случай стойностите на функцията $u(x, y)$ в точките E_k , $k = 1, \dots, 2m - 1$, са известни с точност до константа δ , която е равна на стойността на $u(x, y)$ в точката $C(0, -1)$.

Единствеността на решението се доказва, както при $n = 2m$. Функцията $\Phi(z)$ се дава с (1.20), като в разглеждания случай

$$\begin{aligned} \Phi'(z) = & \frac{1-i}{2\pi i} \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \int_{L_1} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt \\ & + \frac{1+i}{2\pi i} \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \int_{L_2} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt \\ & + \frac{1+i}{2} \frac{C_0 + C_1 z + \dots + C_{2m-2} z^{2m-2}}{R(z)} \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \left[(z^2 - 1) \prod_1^{m-1} (z - a_{2k})(z - b_{2k}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ R_2(z) &= \left[\prod_1^m (z - a_{2k-1})(z - b_{2k-1}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ R(z) &= \left[(z^2 - 1) \prod_1^{2m-1} (z - a_k)(z - b_k) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Константите C_k , $k = 0, \dots, 2m - 2$, трябва да удовлетворяват условията

$$C_{m-1} = 0, \quad C_k = -C_{2m-k-2}, \quad k = 0, \dots, m - 2.$$

За определянето на C_k , a_{2k+1} , $k = 0, \dots, m - 2$ ($a_{2m-1} = \varphi(B) - \psi_{2m-1}(B)$) и δ имаме следните условия:

$$\operatorname{Re} \Phi(a_{2k+1}) = \psi_{2k} \left(\frac{a_{2k+1} - 1}{2} \right) + \psi_{2k+1} \left(\frac{a_{2k+1} + 1}{2} \right) + a_{2k+1} - \delta, \quad k = 0, \dots, m - 1,$$

$$\operatorname{Re} \Phi(a_{2k+2}) = \psi_{2k+2} \left(\frac{a_{2k+2} - 1}{2} \right) + \psi_{2k+1} \left(\frac{a_{2k+2} + 1}{2} \right) + a_{2k+1} - \delta, \quad k = 0, \dots, m - 2.$$

Тези условия представляват линейна система от $2m - 1$ уравнения относно C_k , a_{2k+1} и δ

$$(1.22) \quad \sum_{j=0}^{m-2} \beta_{kj} C_j - a_{2k+1} + \delta = \beta_k, \quad k=0, \dots, m-1,$$

$$\sum_{j=0}^{m-2} \gamma_{kj} C_j - a_{2k+1} + \delta = \gamma_k, \quad k=0, \dots, m-2,$$

където β_{kj} и γ_{kj} не зависят от $\psi_k(x)$, а $\beta_k=0$ и $\gamma_k=0$ при $\psi_k(x) \equiv 0$, $k=0, \dots, 2m-1$.

Както в случая на четен брой точки, системата (1.22) има само едно решение.

При $n=1$ видоизменената задача T_1 съвпада със задачата T_1 . В този случай задачата T_1 има решение.

Забележка 1. При $a_{2j}=0$ ($a_{2j+1}=0$) решението $u(x, y)$ може да се получи чрез граничен преход във формулата (1.20) или като се използват резултатите от § 93 на [10].

Забележка 2. Както в задачата T [6], принципът за екстремум позволява да се докаже съществуването на решение на видоизменената задача T_1 без допълнителните предположения, че u_x и u_y са непрекъснати в D_1 и линията σ удовлетворява условието на Ляпунов.

Забележка 3. Ако предположим, че $\psi_k(x)$, $k=0, \dots, n$, са само еднократно диференцируеми функции, първите производни на които удовлетворяват условието на Хьолдер, то функцията $u(x, y)$, която се дава с формула (1.5), ще представлява обобщено решение на (1.1) в D_2 .

2. Доказателство за съществуване на решение посредством метода на интегралните уравнения. Ще предпологаме, че $n=2m$. Случаят $n=2m-1$ се разглежда аналогично.

Връзката между функциите $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесена от областта D_1 (предполагаме, че σ съвпада със σ_0 и $\varphi \equiv 0$), има вида [5]

$$(1.23) \quad \tau(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [\ln x-t - \ln(1-tx)] \nu(t) dt = 0.$$

Функцията $\nu(x)$ ще търсим в класа H^* . Ако можем да намерим $\nu(x)$, съществуването на решение ще бъде доказано, както в задачата T [6].

Като изключим $\tau(x)$ от (1.9) и (1.23), за определянето на $\nu(x)$ получаваме сингуларното интегрално уравнение

$$(1.24) \quad \lambda(x) \nu(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) \nu(t) dt = -f(x).$$

Както при $n=0$ [8], заключаваме, че общото реално решение от класа h_0 на уравнението (1.24) се дава с формулата

$$\nu(x) = -\operatorname{Im} \Phi^{+'}(x),$$

където $\Phi^{+'}(x)$ се определя от (1.19) по известната формула на Сохоцки—Племел. След прости пресмятания получаваме

$$(1.25) \quad v(x) = \pm \frac{f(x)}{2} \pm \frac{H(x)}{2\pi} \sum_{i=0}^{2m} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{(-1)^{i+1}}{H(t)} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ \pm \frac{C_0(1+x^{m-1}) + \dots + C_{m-1}x^{m-1}(1+x)}{2P_1(x)},$$

където

$$H(x) = \begin{vmatrix} R_1(x) \\ R_2(x) \end{vmatrix} \quad H_1(x) = R(x)$$

в първите две слагаеми знакът (+) се взема при $x \in L_1$, а знакът (-) при $x \in L_2$; в третото слагаемо при четно m знакът (+) се взема в интервалите (a_{2k}, a_{2k+1}) , $k=0, 2, \dots, m$, и (a_{2k-1}, a_{2k}) , $k=2, 4, \dots, m$, а знакът (-) в интервалите (a_{2k-1}, a_{2k}) , (a_{2k}, a_{2k+1}) , $k=1, 3, \dots, m-1$; при нечетно m знакът (+) се взема в (a_{2k-1}, a_{2k}) , (a_{2k}, a_{2k+1}) , $k=1, 3, \dots, m$, а знакът (-) в (a_{2k}, a_{2k+1}) , $k=0, 2, \dots, m-1$, и (a_{2k-1}, a_{2k}) , $k=2, 4, \dots, m-1$.

Сега ще изложим друг твърде прост начин за намиране на общото решение от класа h_0 на уравнението (1.24). Оказва се, че това решение изобщо е комплексно.

Въвеждаме функцията

$$(1.26) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) v(t) dt,$$

която е холоморфна извън реалната ос и удовлетворява условието

$$(1.27) \quad \Phi\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \Phi(z).$$

От (1.24), (1.27) и формулите на Сохоцки-Племел [12]

$$(1.28) \quad \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = v(x),$$

$$(1.29) \quad \Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) v(t) dt,$$

намирането на функцията $\Phi(z)$, както в [5], се свежда до следната гранична задача от теорията на холоморфните функции: да се намери частично-холоморфна функция $\Phi(z)$ с гранична линия реалната ос, която удовлетворява (1.27) и граничното условие

$$(1.30) \quad \Phi^+(x) = G(x) \Phi^-(x) + g(x),$$

$$(1.31) \quad G(x) = \begin{cases} i & \text{при } x \in L_1 + \bar{L}_2, \\ -i & \text{при } x \in L_2 + L_1, \end{cases}$$

$$(1.32) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1+i}{2} f(x) & \text{при } x \in L_1, \\ \frac{i-1}{2} f(x) & \text{при } x \in L_2, \\ \frac{i-1}{2x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{при } x \in \bar{L}_1, \\ \frac{1+i}{2x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{при } x \in \bar{L}_2, \end{cases}$$

и $L_1, L_2, \bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$ са същите съвкупности от интервали, както по-горе.
Посредством смяната

$$(1.33) \quad F^+(z) = \Phi^+(z), \quad F^-(z) = i\Phi^-(z)$$

задачата (1.30) се свежда до задачата

$$(1.34) \quad F^+(x) = G_1(x) F^-(x) + g(x),$$

където

$$G_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in L_1 + \bar{L}_2, \\ -1 & \text{при } x \in L_2 + \bar{L}_1. \end{cases}$$

От (1.27) и (1.33) следва, че

$$(1.35) \quad F^+\left(\frac{1}{z}\right) = -iz^2 F^-(z).$$

Общото решение от класа h_0 на задачата (1.34) се дава с формулата [10]

$$(1.36) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \frac{g(t)}{t-z} dt + \frac{C_0 + C_1 z + \dots + C_{2m-1} z^{2m-1}}{R(z)}$$

където $R_1(z)$, $R_2(z)$ и $R(z)$ са функциите (1.18), а $C_k = r_k + is_k$, $k = 0, \dots, 2m-1$, са произволни комплексни константи.

От (1.36), като вземем пред вид (1.32), получаваме

$$(1.37) \quad \begin{aligned} F(z) = & \frac{1+i}{4\pi i} \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \int_{L_1} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt \\ & + \frac{i-1}{4\pi i} \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \int_{L_2} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt \\ & + \frac{C_0 + C_1 z + \dots + C_{2m-1} z^{2m-1}}{R(z)} \end{aligned}$$

Лесно се проверява, че функцията $F(z)$ удовлетворява условието (1.35) само тогава, когато

$$C_k = C_{2m-k-1}, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

От (1.28) и (1.33) следва, че

$$(1.38) \quad v(x) = F^+(x) + iF^-(x).$$

При $x \in L_1$ получаваме

$$(1.39) \quad F^+(x) = \frac{1+i}{4} f(x) + \frac{1+i}{4\pi i} \Pi(x) \int_{L_1} \frac{f(t)}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ + \frac{1+i}{4\pi i} \Pi(x) \int_{L_2} \frac{f(t)}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ + \frac{C_0(1+x^{2m-1}) + \dots + C_{m-1} x^{m-1}(1+x)}{R^+(x)}$$

$$(1.40) \quad F^-(x) = \frac{1+i}{4} f(x) + \frac{1+i}{4\pi i} \Pi(x) \int_{L_1} \frac{f(t)}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ - \frac{1+i}{4\pi i} \Pi(x) \int_{L_2} \frac{f(t)}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ + \frac{C_0(1+x^{2m-1}) + \dots + C_{m-1} x^{m-1}(1+x)}{R^-(x)}$$

При $x \in L_2$

$$(1.41) \quad F^+(x) = \frac{i-1}{4} f(x) + \frac{i-1}{4\pi i} \Pi(x) \int_{L_1} \frac{f(t)}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ + \frac{i-1}{4\pi i} \Pi(x) \int_{L_2} \frac{f(t)}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ + \frac{C_0(1+x^{2m-1}) + \dots + C_{m-1} x^{m-1}(1+x)}{R^+(x)},$$

$$(1.42) \quad F^-(x) = \frac{i-1}{4} f(x) + \frac{i-1}{4\pi i} \Pi(x) \int_{L_1} \frac{f(t)}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ + \frac{i-1}{4\pi i} \Pi(x) \int_{L_2} \frac{f(t)}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt \\ + \frac{C_0(1+x^{2m-1}) + \dots + C_{m-1} x^{m-1}(1+x)}{R^-(x)}$$

От (1.38)–(1.42) получаваме

$$(1.43) \quad v(x) = \pm \frac{f(x)}{2} \pm \frac{\Pi(x)}{2\pi} \sum_{i=0}^{2m} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{(-1)^{i+1}}{\Pi(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) f(t) dt \\ \pm \frac{1-i}{i\Pi_1(x)} [C_0(1+x^{m-1}) + \dots + C_{m-1}x^{m-1}(1+x)],$$

където функциите $\Pi(x)$ и $\Pi_1(x)$ са същите, както във формула (1.25), и знаците се избират, както в тази формула.

3. Формулата (1.23) е получена от Бицадзе посредством функцията на Грин. Ще покажем, че тази формула може да се получи твърде просто, без да се използва функцията на Грин.

За целта разглеждаме следната гранична задача: да се намери функцията $u(x, y)$, хармонична в областта D_1 , непрекъсната в затворената област $\bar{D}_1$, частните производни u_x и u_y на която са непрекъснати в $\bar{D}_1$ с изключение може би на точките E_k , $k=0, \dots, n+1$, в които те могат да се обръщат в безкрайност от ред, по-малък от единица, и удовлетворяваща граничните условия

$$u|_{\sigma_0} = 0,$$

$$u_y(x, 0) = v(x), \quad -1 < x < 1,$$

където $v(x)$ разглеждаме като дадена функция, принадлежаща към класа H .

Въвеждаме функцията $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, която е холоморфна в областта D_1 и удовлетворява условието $\Phi(-1) = 0$.

Нека $a_j < 0 < a_{j+1}$. Намирането на $\Phi'(z)$, както в точка 1, се свежда до следната гранична задача: да се намери частично-холоморфна в горната полуравнина функция $\Phi'(z)$, която има нула от втори ред при $z = \infty$ и удовлетворява граничното условие

$$\operatorname{Re} i\Phi'(x) = \begin{cases} v(x), & -1 < x < 1, \\ -\frac{1}{x^2} v\left(\frac{1}{x}\right), & -\infty < x < -1, 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Тази задача има единствено решение, което се дава с формулата на Шварц

$$i\Phi'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} t\Phi(t)}{t-z} dt.$$

След прости преобразувания получаваме

$$\Phi'(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) v(t) dt.$$

Функцията $\Phi(z)$ се дава с формулата $\Phi(z) = \int_{-1}^z \Phi'(\zeta) d\zeta$, откъдето на-

мираме

$$\phi(x) = -i \int_1^x r(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [\ln |t-x| - \ln(1+tx)] r(t) dt.$$

Като приравним реалните части от двете страни на това равенство, получаваме формулата (1.23).

§ 2. Задача T_1^2

Видоизменената задача T_1 показва как могат да бъдат поставени и изследвани редица гранични задачи за уравнението (1.1), при които стойностите на търсената функция в областта D_2 се задават върху определени отсечки от характеристиките.

В настоящия и следващия параграф ще разгледаме две такива задачи.

Нека D е областта, която разгледахме в § 1. Означаваме с

$E_{ik} \left(\frac{a_i + a_k}{2}, \frac{a_i - a_k}{2} \right)$, $i \leq k$; $i = 0, \dots, n$; $k = 1, \dots, n+1$, пресечната точка на характеристиките $E_i B_i$, $E_k A_k$ ($E_{0k} = A_k$, $E_{k,n+1} = B_k$).

Задача T_1^2 . Търси се функция $u(x, y)$ със следните свойства:

1) $u(x, y)$ удовлетворява уравнението (1.1) в областта D с изключение на точките от отсечката AB и характеристиките $E_k A_k$, $E_k B_k$, $k = 1, \dots, n$;

2) $u(x, y)$ е непрекъсната в затворената област $\bar{D}$;

3) частните производни u_x и u_y са непрекъснати в областта D с изключение може би на точките от характеристиките $E_k A_k$, $E_k B_k$, $k = 1, \dots, n$, в които те могат да се обръщат в безкрайност от интегрируем ред, освен това u_x и u_y могат да имат същата особеност и в точките A , B ;

4) $u(x, y)$ удовлетворява граничните условия

$$(2.1) \quad u|_{\sigma} = \varphi,$$

$$(2.2) \quad u|_{E_k A_k \cup E_k B_k} = \psi_k(x) + a_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

където функцията φ е непрекъсната, а $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, са двукратно диференцируеми функции, вторите производни на които удовлетворяват условието на Хьолдер, и $\sigma = \varphi(A) \cup \varphi(B)$; a_k , $k = 1, \dots, n$, са реални константи, които не се задават отнапред.

Тази задача представлява непосредствено обобщение на задачата на Трикоми T [4–6]. Наистина при $n=0$ от условията (2.2) остава само условието $u|_{AC} = \psi(x)$, където $\psi(x) = \psi_0(x) + \varphi(A) - \psi_0(A)$.

Задачата T_1^2 се изследва както видоизменената задача T_1 , поради което ще се ограничим с кратки указания.

От (1.5) и (2.2) получаваме

$$(2.3) \quad u_x - u_y = f(x), \quad y=0, \quad a_k < x < a_{k+1}, \quad k=0, \dots, n,$$

където $f(x) = 2 \frac{d}{dx} \psi_k \left(\frac{x+a_k}{2} \right)$, $a_k < x < a_{k+1}$, $k=0, \dots, n$.

От (2.3) заключаваме, че ако $\psi_k(x) \equiv 0$, $k=0, \dots, n$, то решението $u(x, y)$ на задачата T_1^2 в затворената област $\bar{D}_1$ достига отличен от нула екстремум върху линията σ (принцип за екстремум). От този принцип следва единствеността на решението на задачата T_1^2 .

За простота ще предполагаме, че линията σ съвпада с полуокръжността σ_0 с краища в точките A, B и $u|_{\sigma_0} = 0$. Допълнително ще предполагаме, че u_x и u_y са непрекъснати в $\bar{D}_1$ с изключение може би на точките E_k , $k=0, \dots, n$.

Въвеждаме функцията $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, която е холоморфна в областта D_1 и удовлетворява условието $\Phi(-1) = 0$.

Нека $a_j < 0 < a_{j+1}$. Както в § 1, определянето на $\Phi'(z)$ се свежда до следната гранична задача: да се намери частично-холоморфна в горната полуравнина функция $\Phi'(z)$, която има нула от втори ред при $z = \infty$ и удовлетворява¹ граничните условия

$$\operatorname{Re} (1-i) \Phi'(x) = f(x); \quad -1 < x < 1,$$

$$\operatorname{Im} (1-i) \Phi'(x) = -\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right), \quad -\infty < x < -1, \quad 1 < x < \infty.$$

Решението на тази задача се дава с формулата на Келдиш—Седов, която след прости преобразувания добива вида

$$\Phi'(z) = \frac{1+i}{2} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \left(\frac{t-1}{t+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt.$$

Функцията $\Phi'(z)$ е ограничена в точката $z = -1$, обръща се в безкрайност от ред $\frac{1}{2}$ в точката $z = 1$, а в точките $z = a_k$, $k=1, \dots, n$ се обръща в безкрайност от логаритмичен тип.

Функцията $\Phi(z)$ се дава с формулата (1.20). Константите a_k , $k=1, \dots, n$, се определят еднозначно от условието за непрекъснатост на функцията $u(x, y)$ в точките a_k , $k=1, \dots, n$,

$$a_k = \operatorname{Re} \Phi(a_k) - \psi_k(a_k), \quad k=1, \dots, n.$$

Търсената функция $u(x, y)$ се намира, както в § 1.

Забележка. Вместо върху отсечките $E_k E_{k,k+1}$, $k=0, \dots, n$ стойностите на $u(x, y)$ с точност до константа могат да се зададат върху всяка съвкупност l от $n+1$ отсечки $E_{ik} E_{i,k+1}$, $i, k=0, \dots, n$, проекциите на някои две от които при $n \geq 2$ върху отсечката AB по направление на характеристиката BC не съвпадат (ако две отсечки от l имат общ край, то в него трябва да съвпадат стойностите на съответните функции, което води до връзка между константите; ако четири края на отсечки от l са върхове на някакъв характеристичен четириъгълник, то съответните функции трябва да удовлетворяват правилото на характеристичния четири-

¹ Подразбира се, че точките на прекъсване на $f(x)$ се изключват.

ъгълник на уравнението на струната, което води до връзка между произволните константи).

В случая, когато съвкупността l се състои от отсечките $A_k A_{k+1}$, $k=0, \dots, n$, получаваме задачата T_0 [1].

§ 3. Задача T_1^3

Областта D е същата, както в § 2. Нека $n=6m-1$, $m-1$.

Задача T_1^3 Търси се функция $u(x, y)$, която да притежава свойствата 1--3 от § 2 и да удовлетворява граничните условия

$$(3.1) \quad u|_{\sigma} = \varphi,$$

$$u|_{E_{6k-6}, E_{6k-6, 6k-5}} = \psi_{6k-6}(x); \quad u|_{E_{6k-6, 6k-5}, E_{6k-6, 6k-4}} = \psi_{6k-5}(x);$$

$$(3.2) \quad u|_{E_{6k}, E_{6k-1, 6k}} = \psi'_{6k-1}(x); \quad u|_{E_{6k-1, 6k}, E_{6k-2, 6k}} = \psi'_{6k-2}(x);$$

$$u|_{E_{6k-5, 6k-3}, E_{6k-5, 6k}} = \psi'_{6k-3}(x) + a_{6k-3};$$

$$u|_{E_{6k-3, 6k-1}, E_{6k-4, 6k-1}} = \psi_{6k-4}(x) + a_{6k-4};$$

$$(3.3) \quad u(a_{6k-3}, 0) = q_k,$$

$$k=1, \dots, m,$$

където функцията φ е непрекъснатата, а $\psi_k(x)$, $k=0, \dots, 6m-1$, са двукратно диференцируеми функции, вторите производни на които удовлетворяват условието на Хьолдер и освен това

$$\psi'_{6k-6} \left(\frac{a_{6k-6} + a_{6k-5}}{2} \right) = \psi'_{6k-5} \left(\frac{a_{6k-6} + a_{6k-5}}{2} \right), \quad k=1, \dots, m,$$

$$\psi'_{6k-1} \left(\frac{a_{6k-1} + a_{6k}}{2} \right) = \psi'_{6k-2} \left(\frac{a_{6k-1} + a_{6k}}{2} \right), \quad k=1, \dots, m,$$

$$\psi_{6k-1}(a_{6k}) = \psi_{6k}(a_{6k}), \quad k=1, \dots, m-1; \quad \psi_0(A) = \varphi(A); \quad \psi_{6m-1}(B) = \varphi(B);$$

q_k са дадени реални константи, а a_{6k-3} и a_{6k-4} са реални константи, които не се задават отнапред.

Особеното в тази задача е това, че се задават отнапред стойностите на функцията $u(x, y)$ в някои от точките E_k , като същевременно някои от граничните функции в D_2 се задават с точност до константа.

От (1.5) и (3.2) получаваме

$$(3.4) \quad u_x - \lambda(x) u_y = f(x), \quad y=0, \quad a_k < x < a_{k+1}, \quad k=0, \dots, 6m-1,$$

където

$$\lambda(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in L_1, \\ 1 & \text{при } x \in L_2, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 \frac{d}{dx} \psi'_{6k-6} \left(\frac{x+a_{6k-6}}{2} \right), & a_{6k-6} < x < a_{6k-5}, \\ 2 \frac{d}{dx} \psi'_{6k-5} \left(\frac{x+a_{6k-6}}{2} \right), & a_{6k-5} < x < a_{6k-4}, \\ 2 \frac{d}{dx} \psi'_{6k-4} \left(\frac{x+a_{6k-1}}{2} \right), & a_{6k-4} < x < a_{6k-3}, \\ 2 \frac{d}{dx} \psi'_{6k-3} \left(\frac{x+a_{6k-5}}{2} \right), & a_{6k-3} < x < a_{6k-2}, \\ 2 \frac{d}{dx} \psi'_{6k-2} \left(\frac{x+a_{6k}}{2} \right), & a_{6k-2} < x < a_{6k-1}, \\ 2 \frac{d}{dx} \psi'_{6k-1} \left(\frac{x+a_{6k}}{2} \right), & a_{6k-1} < x < a_{6k}, \end{cases}$$

$$k=1, \dots, m;$$

L_1 и L_2 са съответно съвкупностите от интервалите (a_{6k-4}, a_{6k-3}) , (a_{6k-2}, a_{6k}) , $k=1, \dots, m$, и (a_{6k-6}, a_{6k-4}) , (a_{6k-3}, a_{6k-2}) , $k=1, \dots, m$.

От (3.4) заключаваме, че ако $\psi_k(x) \equiv 0$, $k=0, \dots, 6m-1$ и $q_k=0$, $k=1, \dots, m$, то решението $u(x, y)$ на задачата T_1^3 в затворената област $\bar{D}_1$ достига отличен от нула екстремум върху линията σ (принцип за екстремум). Оттук следва единствеността на решението на задачата T_1^3 .

Съществуването на решение ще докажем при същите предположения, както в § 2. В разглеждания случай определянето на $\Phi'(z)$ се свежда до следната гранична задача: да се намери частично-холоморфна в горната полуравнина функция $\Phi'(z)$, която има нула от втори ред при $z=\infty$ и удовлетворява граничните условия

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi'(x)=f(x) \quad \text{при } x \in L_2; \quad \operatorname{Im}(1-i)\Phi'(x)=-f(x) \quad \text{при } x \in L_1,$$

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi'(x)=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \in \bar{L}_1; \quad \operatorname{Im}(1-i)\Phi'(x)=-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \in \bar{L}_2,$$

където $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$ са съответно съвкупностите от интервалите (b_{6k-3}, b_{6k-4}) , (b_{6k}, b_{6k-2}) , $k=1, \dots, m$, и (b_{6k-4}, b_{6k-6}) , $k=1, \dots, m$, (b_{6k-2}, b_{6k-3}) , $k=1, \dots, j-1$, $j+1, \dots, m$, $(-\infty, b_{6j-3})$, (b_{6j-2}, ∞) ; $b_k = \frac{1}{a_k}$ и се подразбира, че $a_{6j-3} < 0 < a_{6j-2}$.

Общото решение от класа h_0 на тази задача се дава с формулата на Келдиш—Седов, която след прости преобразувания добива вида

$$(3.5) \quad \Phi'(z) = \frac{1-i}{2\pi i} \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \int_{L_1} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt$$

$$\frac{1+i}{2\pi i} \frac{R_1(z)}{R_2(z)} \int_{L_2} \frac{R_2(t)}{R_1(t)} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1-tz} \right) f(t) dt$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{i C_0 + C_1 z + \dots + C_{4m-2} z^{4m-2}}{R(z)},$$

където

$$R_1(z) = \left[(z^2 - 1) \prod_{i=1}^{2m} (z - a_{2i})(z - b_{3i}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$R_2(z) = \left[\prod_{i=1}^m (z - a_{6k-2})(z - a_{6k-4})(z - b_{6k-2})(z - b_{6k-4}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$R(z) = \left[(z^2 - 1) \prod_{i=1}^{3m-1} \prod_{k=1}^m (z - a_{2i})(z - a_{6k-3})(z - b_{2i})(z - b_{6k-3}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

а C_k , $k=0, \dots, 4m-2$, са произволни реални константи.

Функцията $\Phi(z)$ се дава с формулата (1.20). За да бъде удовлетворено условието (1.14), необходимо и достатъчно е

$$C_{2m-1} = 0, \quad C_k = -C_{4m-k-2}, \quad k=0, \dots, 2m-2.$$

За определянето на константите C_k , $k=0, \dots, 2m-2$, имаме следните условия:

$$\operatorname{Re} \Phi(a_{6k}) = \psi_{6k}(a_{6k}), \quad k=1, \dots, m-1,$$

$$\operatorname{Re} \Phi(a_{6k-3}) = q_k, \quad k=1, \dots, m.$$

Тези условия представляват система от $2m-1$ линейни уравнения относно C_k

$$(3.6) \quad \sum_{j=0}^{2m-2} \gamma_{kj} C_j = \gamma_k, \quad k=0, \dots, 2m-2,$$

където γ_{kj} не зависят от $\psi_k(x)$, а $\gamma_k = 0$ при $\psi_k(x) \equiv 0$, $k=0, \dots, 6m-1$, $q_k = 0$, $k=1, \dots, m$.

От единствеността на решението на задачата T_1^3 следва, че системата (3.6) има само едно решение.

Константите a_{6k-4} и a_{6k-3} , $k=1, \dots, m$, се определят еднозначно от условието за непрекъснатост на $u(x, y)$ съответно в точките $E_{6k-3, 6k-1}$ и $E_{6k-5, 6k-3}$, $k=1, \dots, m$.

Търсената функция $u(x, y)$ се намира, както в § 1.

§ 4. Задача T_a

В този параграф се разглежда една гранична задача за уравнението (1.1), която представлява обобщение на задачата на Трикоми T [4–6] в случая, когато търсената функция $u(x, y)$ и нейната частна производна

$u_y(x, y)$ имат прекъсване от първи род върху линията на параболично израждане. Към задача от такъв тип се свежда изучаването на някои въпроси от геометрията и безмоментната теория на черупките [16].

Нека D е крайна едносвързана област в равнината xOy , ограничена от линия на Жордан σ с краища в точките $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, разположена в горната полуравнина $y > 0$, и характеристиките $AC: y = -x - 1$ и $BC: y = x - 1$ на уравнението (1.1), които излизат от точката $C(0, -1)$. Означаваме с D_1 и D_2 съответно елиптичната и хиперболичната част на смесената област D .

Задача T_a . Търси се функция $u(x, y)$ със следните свойства:

- 1) $u(x, y)$ удовлетворява уравнението (1.1) в областта D при $y \neq 0$;
- 2) $u(x, y)$ е непрекъсната в затворената област $\bar{D}$ при $y \neq 0$;
- 3) частните производни u_x и u_y са непрекъснати в областта D при $y \neq 0$, а в точките A и B те могат да се обръщат в безкрайност от ред, по-малък от единица;
- 4) върху отсечката AB функциите $u(x, y)$ и $u_y(x, y)$ удовлетворяват условията

$$(4.1) \quad u(x, +0) = \alpha(x) u(x, -0),$$

$$(4.2) \quad u_y(x, +0) = \beta(x) u_y(x, -0),$$

където $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ са дадени функции, различни от нула в интервала $[-1, 1]$, диференцируеми са съответно двукратно и еднократно и функциите $\alpha''(x)$ и $\beta'(x)$ удовлетворяват условието на Хьолдер, освен това е изпълнено условието

$$(4.3) \quad \alpha'(x) \beta(x) \leq 0, \quad -1 < x < 1;$$

- 5) $u(x, y)$ удовлетворява граничните условия

$$(4.4) \quad u|_{\sigma} = \varphi,$$

$$(4.5) \quad u|_{AC} = \psi(x),$$

където функцията φ е непрекъсната, а $\psi(x)$ е двукратно диференцируема функция, втората производна на която удовлетворява условието на Хьолдер и $\varphi(A) = \alpha(-1) \varphi(-1)$.

При $\alpha(x) = \beta(x) = 1$ задачата T_a съвпада със задачата T .

В областта D_2 решението $u(x, y)$ има вида

$$(4.6) \quad 2u(x, y) = \frac{\tau(x+y)}{\alpha(x+y)} + \frac{\tau(x-y)}{\alpha(x-y)} + \int_{x-y}^{x+y} \frac{\nu(t)}{\beta(t)} dt,$$

където $\tau(x) = u(x, +0)$, $\nu(x) = u_y(x, +0)$, $-1 \leq x \leq 1$. От (4.6) и (4.5) получаваме

$$(4.7) \quad \frac{\tau(x)}{\alpha(x)} + \frac{\tau(-1)}{\alpha(-1)} - \int_{-1}^x \frac{\nu(t)}{\beta(t)} dt = 2\psi\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

или като диференцираме

$$(4.8) \quad \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \tau'(x) - \frac{\alpha'(x)\beta(x)}{\alpha^2(x)} \tau(x) - \nu(x) = 2\beta(x) \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{x-1}{2}\right), \quad -1 < x < 1.$$

Оттук, като вземем под внимание условието (4.3), заключаваме, както в задачата T , че при $\psi(x) = 0$ решението $u(x, y)$ на задачата T_α в затворената област $\bar{D}_1$ достига отлична от нула екстремум върху линията σ (принцип за екстремум).

От принципа за екстремум непосредствено следва единствеността на решението на задачата T_α .

Съществуването на решение на задачата T_α ще бъде доказано, ако можем да намерим функцията $\nu(x)$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $u|_\sigma = 0$. Наистина да разгледаме следната гранична задача: да се намери функция $u_0(x, y)$, която е хармонична в областта D_1 , непрекъсната е в $\bar{D}_1$ и удовлетворява граничните условия

$$(4.9) \quad u_0|_\sigma = \varphi,$$

$$(4.10) \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad -1 < x < 1.$$

Означаваме с D_1^* областта, симетрична на D_1 относно отсечката AB , а с D^* — сумата на D_1 , D_1^* и интервала $(-1, 1)$.

От условието (4.10) следва, че $u_0(x, y)$ се продължава хармонично в областта D_1^* . Функцията

$$u_0^*(x, y) = \begin{cases} u_0(x, y) & \text{в } D_1 \\ u_0(x, -y) & \text{в } D_1^* \end{cases}$$

е хармонична в D^* и се получава, като решим задачата на Дирихле в тази област. Означаваме $u_0(x, +0) = \tau_0(x)$, $-1 \leq x \leq 1$ и разглеждаме функцията

$$w(x, y) = \begin{cases} u_0(x, y) & \text{в } D_1, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_0(x+y)}{\alpha(x+y)} + \frac{\tau_0(x-y)}{\alpha(x-y)} \right] & \text{в } D_2. \end{cases}$$

Очевидно $w(x, y)$ е решение на задачата T_α , което удовлетворява условията

$$w|_\sigma = \varphi; \quad w|_{AC} = \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_0(-1)}{\alpha(-1)} + \frac{\tau(2x+1)}{\alpha(2x+1)} \right];$$

$$w(x, +0) = \alpha(x) w(x, -0); \quad w_y(x, +0) = w_y(x, -0).$$

Следва, че функцията $u_1(x, y) = u(x, y) - w(x, y)$ е решение на задачата T_α , което удовлетворява условията

$$u_1|_\sigma = 0; \quad u_1|_{AC} = \psi(x) - \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_0(-1)}{\alpha(-1)} + \frac{\tau(2x+1)}{\alpha(2x+1)} \right];$$

$$u_1(x, +0) = \alpha(x) u_1(x, -0); \quad \frac{\partial u_1(x, +0)}{\partial y} = \beta(x) \frac{\partial u_1(x, -0)}{\partial y}$$

Допълнително ще предполагаме, че линията σ е гладка и удовлетворява условието на Ляпунов, а u_x и u_y са непрекъснати в $\bar{D}_1$ с изключение може би на точките A и B . При тези предположения, както в § 1, без ограничение на общността можем да предполагаме, че линията σ съвпада с полуокръжността σ_0 с краища в точките A и B (при конформното изображение $\zeta = F(z)$, $z = x + iy$, ($F'(0) > 0$) видът на условията (4.7) и (4.3) се запазва).

Функцията $v(x)$ ще търсим в класа H^* . Като изключим $\tau(x)$ от (1.23), и (4.7), за определянето на $v(x)$ получаваме сингулярното интегрално уравнение

$$(4.11) \quad \alpha(x) v(x) + \frac{\beta(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) v(t) dt + \alpha'(x) \beta(x) \int_{-1}^1 \frac{\omega(x, t)}{\beta(t)} v(t) dt = f(x)$$

където

$$\omega(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [-1, x], \\ 0 & \text{при } t \in \bar{[-1, x]}, \end{cases}$$

$$\text{а } f(x) = -2\beta(x) \left[\alpha(x) \psi \left(\frac{x-1}{2} \right) \right]'$$

Към уравнението (4.11) може да бъде приложен известният метод за регуляризиране на Карлеман—Векуа [10]. За целта написваме (4.11) във вида

$$(4.12) \quad \alpha(x) v(x) + \frac{\beta(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) v(t) dt = g(x),$$

където

$$(4.13) \quad g(x) = f(x) - \alpha'(x) \beta(x) \int_{-1}^1 \frac{\omega(x, t)}{\beta(t)} v(t) dt,$$

и разглеждаме функцията $g(x)$ (която удовлетворява условието на Хьолдер) като известна.

Уравнението (4.12) е от типа на уравненията, свързани с циклична група, и следователно се решава в явен вид [13]. В разглеждания случай цикличната група е $\omega_0(z) = z$, $\omega_1(z) = \frac{1}{z}$. Особеното в случая е, че кон-

турът на интегриране е отворен и трансформацията $\omega_1(z) = \frac{1}{z}$ оставя краищата $z = -1$ и $z = 1$ неподвижни. Поради това не може да се търси решение на (4.12) от класа h_0 . Индексът на това уравнение е равен на нула.

Лесно се проверява, че функцията

$$X(z) = e^{\Gamma(z)},$$

където

$$\Gamma(z) = \int_{-1}^1 \theta(t) \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t(1-tz)} \right] dt,$$

$$\theta(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}, \quad -\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2},$$

е канонично решение на спрегнатата задача, към която се свежда решението на уравнението (4.12). За $\nu(x)$ получаваме

$$(4.14) \quad \nu(x) = A(x)g(x) - \frac{B(x)Z(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{Z(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt,$$

където

$$A(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha^2(x) + \beta^2(x)}, \quad B(x) = \frac{\beta(x)}{\alpha^2(x) + \beta^2(x)}, \quad Z(x) = \sqrt{\alpha^2(x) + \beta^2(x)} e^{\Gamma(x)}.$$

От (4.14), като вземем пред вид (4.13), за определянето на $\nu(x)$ получаваме интегрално уравнение на Фредхолм, което е еквивалентно на уравнението (4.11)

$$(4.15) \quad \nu(x) + \int_{-1}^1 K(x, t) \nu(t) dt = h(x),$$

където

$$K(x, t) = \frac{A(x) \alpha'(x) \beta(x) \omega(x, t)}{\beta(t)},$$

$$- \frac{B(x) Z(x)}{\pi \beta(t)} \int_{-1}^1 \frac{\alpha'(t_1) \beta(t_1) \omega(t_1, t)}{Z(t_1)} \left(\frac{1}{t_1 - x} - \frac{t_1}{1 - t_1 x} \right) dt_1$$

$$h(x) = A(x)f(x) - \frac{B(x) Z(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{Z(t)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt.$$

За уравнението (4.15) са в сила основните теореми на Фредхолм [10, 14]. От единствеността на решението на задачата T_a следва, че уравнението (4.15) има само едно решение. От формула (4.14) непосредствено следва, че така полученото решение $\nu(x)$ принадлежи към класа H^* в интервала $[-1, 1]$ и е непрекъснато диференцируемо в интервала $(-1, 1)$.

Интересно е да се отбележи, че при $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} < 0$ решението $\nu(x)$ се обръща в безкрайност от ред, по-малък от единица, в точката $x = -1$, а при $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} > 0$ както трябва да се очаква, $\nu(x)$ се обръща в безкрайност от ред, по-малък от единица, в точката $x = 1$.

Следствие. При $\alpha(x)=c=\text{const}$ ядрото $K(x, t)\equiv 0$ и от (4.15) получаваме решението $\kappa(x)$ в явен вид

$$(4.16) \quad \kappa(x) = \frac{cf(x)}{c^2 + \beta^2(x)} - \frac{\beta(x)e^{\Gamma(x)}}{\pi\sqrt{c^2 + \beta^2(x)}} \int_{-1}^1 \frac{f(t)e^{-\Gamma(t)}}{\sqrt{c^2 + \beta^2(t)}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} \right) dt.$$

Да отбележим, че в този случай съществуването на решение на задачата T_a може да се докаже, като се използват резултатите от работата [15], ако уравнението (1.1) се сведе към система от смесен тип.

От формулата (4.16) при $c=\beta(x)=1$ се получава функцията $\kappa(x)$ за задачата T .

Накрая дължа да изкажа благодарност на Вл. Александров за полезните дискусии върху задачата T_1 .

Постъпила на 14. IX. 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каратопраскиев Г., Върху някои гранични задачи за уравнението $u_{xx} + \text{sgn } u u_{yy} = 0$. I, Изв. на Матем. инст., VII, 1963, 139—150.
2. Каратопраскиев Г., Об одной видоизмененной задаче T_1 для уравнения $u_{xx} + \text{sgn } u u_{yy} = 0$. ДАН СССР, **150**, № 1, 1963, 23—25.
3. Каратопраскиев Г., Об одном обобщении задачи T для уравнения $u_{xx} + \text{sgn } u u_{yy} = 0$, ДАН СССР, **151**, № 6, 1963, 1271—1273.
4. Лаврентьев М. А. и А. В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа, ДАН СССР, **70**, № 3, 1950, 373—376.
5. Бицадзе А. В., О некоторых задачах смешанного типа. ДАН СССР, **70**, № 4, 1950, 561—564.
6. Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, АН СССР, **41**, 1953.
7. Лаврентьев М. А. и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М., 1958.
8. Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959.
9. Каратеодори К., Конформное отображение, М., 1934.
10. Мухелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
11. Келдыш М. В. и Л. И. Седов, Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций, ДАН СССР, **16**, № 1, 1937, 7—10.
12. Гахов Ф. Д., Краевые задачи, М., 1963.
13. Гахов Ф. Д. и Л. И. Чибрикова, О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Матем. сб., **35**, № 3, 1954, 395—436.
14. Goursat E., Cours d'analyse mathématique, t. 3, Paris, 1956.
15. Карамышев Ф. И., Краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа, Сибирский матем. ж., **2**, № 4, 1961, 537—546.
16. Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0. \quad \Pi$$

Г. Каратопраклиев

(Резюме)

В настоящей работе рассматриваются следующие краевые задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (1.1):

Пусть D — односвязная конечная область плоскости xOy , ограниченная линией Жордана σ с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, расположенной в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками $AC: y = -x - 1$ и $BC: y = x - 1$ уравнения (1.1), выходящими из точки $C(0, -1)$. Пусть $E_k(a_k, 0)$, $k = 1, \dots, n$, $-1 < a_1 < \dots < a_n < 1$ — заданные точки отрезка AB . Точки $A_k\left(\frac{a_k - 1}{2}, -\frac{a_k + 1}{2}\right)$ и $B_k\left(\frac{a_k + 1}{2}, \frac{a_k - 1}{2}\right)$, $k = 0, \dots, n+1$ ($a_0 = -1$, $a_{n+1} = 1$) лежат соответственно на характеристиках AC и BC . Обозначим,

через $E_k\left(\frac{a_i + a_k}{2}, \frac{a_i - a_k}{2}\right)$, $i \leq k$, $i = 0, \dots, n$; $k = 1, \dots, n+1$, точку пересечения характеристик $E_i B_i$ и $E_k A_k$. Обозначим през D_1 и D_2 соответственно эллиптическую и гиперболическую части смешанной области D .

Видоизмененная задача T_1 . Требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, y)$ является решением уравнения (1.1) в области D всюду, кроме точек отрезка AB и характеристик $E_k A_k$, $E_k B_k$, $k = 1, \dots, n$; 2) $u(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$; 3) частные производные u_x и u_y непрерывны в области D всюду, кроме, быть может, точек характеристик $E_k A_k$, $E_k B_k$, $k = 1, \dots, n$, в которых u_x и u_y могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка; 4) $u(x, y)$ принимает заданные значения (1.2)–(1.4).

Задача T_1^2 . Требуется определить функцию $u(x, y)$ со свойствами 1–3, как во видоизмененной задаче T_1 , и принимающую заданные значения (2.1) и (2.2).

Задача T_1^3 . Требуется определить функцию $u(x, y)$ со свойствами 1–3, как во видоизмененной задаче T_1 , и принимающую заданные значения (3.1)–(3.3).

Задача T_a . Требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, y)$ является решением уравнения (1.1) в области D при $y \neq 0$; 2) $u(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ при $y \neq 0$; 3) частные производные u_x и u_y непрерывны в области $\bar{D}$ при $y \neq 0$, причем вблизи точек A и B они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 4) на отрезке AB действительной оси функции $u(x, y)$ и $u_y(x, y)$ удовлетворяют условиям склеивания (4.1) и (4.4); 5) $u(x, y)$ принимает заданные значения (4.4) и (4.5).

Доказывается существование и единственность решения этих краевых задач.

ON SOME BOUNDARY PROBLEMS FOR THE EQUATION

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0. \quad \text{II}$$

G. Karatoprakliev

(Summary)

In the present paper are discussed the following boundary problems for the Lavrentiev-Bitsadze's equation (1.1):

Let D be a simply connected domain in the plane xOy , bounded by a Jordan curve σ with ends at the points $A(-1, 0)$ and $B(1, 0)$ disposed in the upper half-plane $y=0$, and the characteristics $AC: y=-x-1$ and $BC: y=x-1$ from the point $C(0, -1)$. Let $E_k(a_k, 0)$, $k=1, \dots, n$; $-1 < a_k < 1$ are given points of the line-segment AB . The points

$A_k\left(\frac{a_k-1}{3}, \frac{a_k+1}{2}\right)$ and $B_k\left(\frac{a_k+1}{2}, \frac{a_k-1}{2}\right)$, $k=0, \dots, n+1$, ($a_0 = -1$, $a_{n+1} = 1$) are lying respectively on the characteristics AC and BC . With

$E_{ik}\left(\frac{a_i+a_k}{2}, \frac{a_i-a_k}{2}\right)$, $i \leq k$, $i=0, \dots, n$; $k=1, \dots, n+1$ we denote the

intersection point of the characteristics E_iB_i and E_kB_k . With D_1 we denote the elliptic and with D_2 the hyperbolic parts of the mixed domain D .

Modified problem T_1 . To find a function $u(x, y)$ with the following properties: 1) $u(x, y)$ satisfies the equation (1.1) on the domain D with exception of the points of the line-segment AB and the characteristics E_kA_k , E_kB_k , $k=1, \dots, n$; 2) $u(x, y)$ is continuous on the closed domain $\bar{D}$; 3) The partial derivatives u_x and u_y are continuous on the domain D with the possible exception of the points of the characteristics E_kA_k , E_kB_k , $k=1, \dots, n$ at which they can turn into infinity of integrable order; 4) $u(x, y)$ satisfies the boundary conditions (1.2)–(1.4).

Problem T_1^2 . To find a function $u(x, y)$ having the properties 1–3, as in the modified problem T_1 , and satisfying the boundary conditions (2.1) and (2.2).

Problem T_1^3 . To find a function $u(x, y)$ having the properties 1–3, as in the modified problem T_1 , and satisfying the conditions (3.1)–(3.3).

Problem T_a . To find a function $u(x, y)$ with the following properties: 1) $u(x, y)$ satisfies the equation (1.1) on the domain D for $y \neq 0$; 2) $u(x, y)$ is continuous on the closed domain $\bar{D}$ for $y \neq 0$; 3) the partial derivatives u_x and u_y are continuous on the domain D for $y \neq 0$, and at the points A and B they can turn into infinity of order lower than one; 4) on the line-segment AB the functions $u(x, y)$ and $u_y(x, y)$ satisfy the conditions (4.1) and (4.2); 5) $u(x, y)$ satisfies the boundary conditions (4.4) and (4.5).

The existence and uniqueness of the solution of these boundary problems are proved.