БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) VIII

ВЪРХУ ПЕРМАНЕНТНИТЕ РОТАЦИИ НА ЖИРОСТАТ В НЮТОНОВО ЦЕНТРАЛНО СИЛОВО ПОЛЕ

Атанас Анчев

Перманентните ротации на тежък жиростат с една неподвижна точка и тяхната устойчивост са разгледани в работите [1], [2] и [3]. В настоящата работа се намират частни решения на уравненията на движението на жиростат с една неподвижна точка в Нютоново централно силово поле, съответствуващи на перманентните ротации на жиростата. С помощта на втория метод на Ляпунов са намерени достатъчни условия за устойчивост на перманентните ротации. За някои частни случаи са показани и условия за неустойчивост.

Нека неподвижната точка O на жиростата е на разстояние R от центъра O_1 на привличането. Неподвижната координатна система $O\xi\eta\zeta$ с начало в неподвижната точка O на жиростата избираме така, че оста $O\zeta$ да минава през центъра на привличането O. Подвижната координатна система, свързана с твърдата част на жиростата, избираме със същото начало, а осите ѝ да съвпадат с главните инерчни оси на жиростата за неподвижната му точка. Главните инерчни моменти спрямо подвижните оси x, y, z бележим съответно с A, B и C.

Нека γ_1, γ_2, γ_3 са директорните косинуси на оста $O\zeta$ относно подвижната координатна система. Когато размерите на жиростата са малки в сравнение с разстоянието $R=O_1O$, силовата функция на Нютоновото централно поле може да се представи във вида [4]

$$U=-\frac{\mu M}{R^2}(x_0\gamma_1+y_0\gamma_2+z_0\gamma_3)-\frac{3\mu}{2R^3}(A\gamma_1^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2), \tag{0.1}$$

където μ е константата на привличането, M — масата на жиростата, а x_0, y_0, z_0 са координатите на масовия му център G относно подвижната координатна система.

Ще предполагаме, че вътрешните движения на жиростата са стационарни. За проекциите на жиростатичния момент **k** върху подвижните оси тогава имаме

$$k_x=k_1=\text{const},\ k_y=k_2=\text{const},\ k_z=k_3=\text{const}. \tag{0.2}$$

Спрямо същите оси моментите на силите, произхождащи от силовата функция (0.1), са

$$L_x = \frac{\mu M}{R^2}(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3) + \frac{3\mu}{R^3}(C-B)\gamma_2\gamma_3$$

$$(0.3) \qquad L_y = \frac{\mu M}{R^2}(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1) + \frac{3\mu}{R^3}(A-C)\gamma_3\gamma_1,$$

$$L_z = \frac{\mu M}{R^2}(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2) + \frac{3\mu}{R^3}(B-A)\gamma_1\gamma_2.$$

Ако положим

$$(0.4) \qquad \alpha = \frac{\mu M}{R^2}, \quad \beta = \frac{3\mu}{R^3}$$

и вземем пред вид (0.2) и (0.3), за уравненията на движението на жиростата в подвижната координатна система получаваме

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr + qk_3 - rk_2 = \alpha(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3) + \beta(C-B)\gamma_2\gamma_3,$$

$$(0.5) \qquad B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp + rk_1 - pk_3 = \alpha(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1) + \beta(A-C)\gamma_3\gamma_1,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq + pk_2 - qk_1 = \alpha(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2) + \beta(B-A)\gamma_1\gamma_2,$$

$$(0.6) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2,$$

където p, q, r са проекциите върху подвижните оси на моментната ъглова скорост на жиростата.

Уравненията (0.5), (0.6) допускат първите интеграли

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \text{const},$$

$$(0.7) \qquad (Ap + k_1)\gamma_1 + (Bq + k_2)\gamma_2 + (Cr + k_3)\gamma_3 = \text{const},$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

които лесно се получават, както при тежко твърдо тяло с една неподвижна точка.

§ 1. Перманентни оси на ротация

Ако съществува перманентна ос на ротация за жиростата, то тя е неподвижна както относно неподвижната координатна система $O\xi\eta\zeta$, така и относно подвижната $Oxyz$. Нека относно последната

$$l_1 = \text{const}, \; l_2 = \text{const}, \; l_3 = \text{const}$$

са директорните косинуси на перманентната ос, а ω — съответната ъглова скорост. Проекциите на моментната ъглова скорост можем да представим във вида

$$p = \omega l_1, \; q = \omega l_2, \; r = \omega l_3.$$

Като ги заместим в (0.5) и (0.6), получаваме уравненията

$$
\begin{aligned}
&Al_1 \frac{d\omega}{dt} + (C-B)\,\omega^2 l_2 l_3 + \omega(l_2k_3 - l_3k_2) = \alpha(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3) + \beta(C-B)\,\gamma_2\gamma_3, \\
(1.2)\quad &Bl_2 \frac{d\omega}{dt} + (A-C)\,\omega^2 l_3 l_1 + \omega(l_3k_1 - l_1k_3) = \alpha(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1) + \beta(A-C)\,\gamma_3\gamma_1, \\
&Cl_3 \frac{d\omega}{dt} + (B-A)\,\omega^2 l_1 l_2 + \omega(l_1k_2 - l_2k_1) = \alpha(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2) + \beta(B-A)\,\gamma_1\gamma_2, \\
&\frac{d\gamma_1}{dt} = \omega(l_3\gamma_2 - l_2\gamma_3), \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \omega(l_1\gamma_3 - l_3\gamma_1), \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \omega(l_2\gamma_1 - l_1\gamma_2).
\end{aligned}
$$

Системата (1.2) има следните първи интеграли:

$$
\begin{aligned}
&(Al_1^2 + Bl_2^2 + Cl_3^2)\,\omega^2 - 2U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = a = \mathrm{const}, \\
(1.3)\quad &(Al_1\gamma_1 + Bl_2\gamma_2 + Cl_3\gamma_3)\,\omega + k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + k_3\gamma_3 = b = \mathrm{const}, \\
&\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 = c = \mathrm{const}, \\
&\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{aligned}
$$

Ако от първите два интеграла (1.3) елиминираме ω, получаваме

$$
(1.4)\quad \frac{(b - k_1\gamma_1 - k_2\gamma_2 - k_3\gamma_3)^2 (Al_1^2 + Bl_2^2 + Cl_3^2)}{(Al_1\gamma_1 + Bl_2\gamma_2 + Cl_3\gamma_3)^2} - 2U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = a.
$$

Уравнението (1.4) и последните два интеграла (1.3) образуват алгебрична система от уравнения относно $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и очевидно тези величини, определени от тази система, ще бъдат постоянни. Тогава от (1.2) следва

$$
\frac{\gamma_1}{l_1} = \frac{\gamma_2}{l_2} = \frac{\gamma_3}{l_3}
$$

и следователно

$$
(1.5)\quad \gamma_i = \pm l_i, \quad i = 1, 2, 3.
$$

Последното показва, че перманентната ос на ротация е оста $O\zeta$. От кой да е от първите два интеграла (1.3) съгласно (1.5) следва, че

$$
(1.6)\quad \omega = \mathrm{const},
$$

т. е. перманентните ротации около оста $O\zeta$ се извършват с постоянна ъглова скорост.

Преди да преминем към определянето на положението на перманентната ос в подвижната координатна система и на съответната ъглова скорост, ще отбележим, че избирането на единия или другия знак в (1.5) съответствува на насочването по $O\zeta$ на едната или другата полуос от правата, около която се извършва въртенето на жиростата. В изчисленията, които следват, ще работим само със знака $+$ от (1.5), а за да получим съответното друго решение, трябва да се замести l_i с $-l_i$.

Нека масовият център G не съвпада с точката на закрепването O на жиростата и не лежи в някоя от главните инерчни равнини. Като вземем пред вид (1.5) и (1.6), уравненията (1.2) добиват вида

$$
\begin{aligned}
&(C-B)\,\omega^2 l_2 l_3+(k_3 l_2-k_2 l_3)\,\omega-a(z_0 l_2-y_0 l_3)-\beta(C-B)\,l_2 l_3=0,\\
(1.7)\qquad &(A-C)\,\omega^2 l_3 l_1+(k_1 l_3-k_3 l_1)\,\omega-a(x_0 l_3-z_0 l_1)-\beta(A-C)\,l_3 l_1=0,\\
&(B-A)\,\omega^2 l_1 l_2+(k_2 l_1-k_1 l_2)\,\omega-a(y_0 l_1-x_0 l_2)-\beta(B-A)\,l_1 l_2=0.
\end{aligned}
$$

Условията за еквивалентност на (1.7), разгледани като квадратни уравнения за ω, са

$$
(1.8)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{C-B}\left(\frac{k_3}{l_3}-\frac{k_2}{l_2}\right)=\frac{1}{A-C}\left(\frac{k_1}{l_1}-\frac{k_3}{l_3}\right)=\frac{1}{B-A}\left(\frac{k_2}{l_2}-\frac{k_1}{l_1}\right)=2s,\\
&\frac{1}{C-B}\left(\frac{z_0}{l_3}-\frac{y_0}{l_2}\right)=\frac{1}{A-C}\left(\frac{x_0}{l_1}-\frac{z_0}{l_3}\right)=\frac{1}{B-A}\left(\frac{y_0}{l_2}-\frac{x_0}{l_1}\right)=2\tau,
\end{aligned}
$$

от които лесно получаваме

$$
(1.9)\qquad (C-B)\,k_1 l_2 l_3+(A-C)\,k_2 l_1 l_3+(B-A)\,k_3 l_1 l_2=0,
$$

$$
(1.10)\qquad (C-B)\,x_0 l_2 l_3+(A-C)\,y_0 l_1 l_3+(B-A)\,z_0 l_1 l_2=0.
$$

Ако жиростатичният момент $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ не е колинеарен с радиус-вектора на масовия център, като вземем пред вид, че

$$
l_1^2+l_2^2+l_3^2=1
$$

и решим уравненията (1.9) и (1.10) относно неизвестните l_1, l_2, l_3, получаваме

$$
(1.11)\qquad l_1=\frac{(C-B)N_2N_3}{H},\quad l_2=\frac{(A-C)N_3N_1}{H},\quad l_3=\frac{(B-A)N_1N_2}{H},
$$

където сме означили

$$
(1.12)\qquad
\begin{aligned}
&N_1=k_2z_0-k_3y_0\,,\quad N_2=k_3x_0-k_1z_0\,,\quad N_3=k_1y_0-k_2x_0\,,\\
&H=\pm\sqrt{(C-B)^2N_2^2N_3^2+(A-C)^2N_3^2N_1^2+(B-A)^2N_1^2N_2^2}\,.
\end{aligned}
$$

За определянето на ъгловата скорост от кое да е уравнение (1.7), замествайки (1.11), получаваме уравнението

$$
(1.13)\qquad
\begin{aligned}
&(C-B)(A-C)(B-A)N_1N_2N_3\omega^2-H(AN_1k_1+BN_2k_2+CN_3k_3)\omega\\
&+aH(AN_1x_0+BN_2y_0+CN_3z_0)-\beta(C-B)(A-C)(B-A)N_1N_2N_3=0,
\end{aligned}
$$

което винаги има реални корени, защото, избирайки подходящ знак на H, можем да направим дискриминантата му положителна.

В най-общия случай следователно уравненията на движението (0.5) и (0.6) имат следното частно решение, съответствуващо на перманентна ротация с постоянна ъглова скорост около оста $O\zeta$:

$$
(1.14)\qquad \gamma_1=l_1\,,\ \gamma_2=l_2\,,\ \gamma_3=l_3\,,\ p=\omega l_1\,,\ q=\omega l_2\,,\ r=\omega l_3\,,
$$

при l_1, l_2, l_3, определени от (1.11), а ω — от (1.13).

Уравненията (1.9) и (1.10) имат следното геометрично тълкуване: в текущи координати l_1, l_2, l_3 (1.9) и (1.10) са конуси от втора степен. Конусът (1.9) е определен от следните пет образуващи: главните инерчни оси x, y, z и правите OK, $K(k_1, k_2, k_3)$ и OF, $F(k_1/A, k_2/B, k_3/C)$, а конусът (1.10) — от образуващите x, y, z, OG, $G(x_0, y_0, z_0)$, OT, $T(x_0/A, y_0/B, z_0/C)$. Двата конуса се пресичат по главните инерчни оси и по оста OS, $S(l_1, l_2, l_3)$, която е перманентната ос на ротация. Конусът (1.10) е същият, получен от O. Staude [5] за перманентните оси на ротация на тежко твърдо тяло, а (1.9) е конусът, получен от В. В. Румянцев [1] за тежък жиростат, движещ се по инерция.

Ще отбележим, че в Нютоновото централно силово поле перманентната ос на ротация заема същото положение относно подвижната координатна система, каквото е и полученото от В. Н. Дрофа [2] за тежък жиростат с една неподвижна точка. Изменение има само в уравнението, определящо ъгловата скорост.

§ 2. Частни случаи

В повечето от частните случаи, дължащи се на някои ограничения за разпределението на масата и на жиростатичния момент, положението на перманентната ос на ротация в подвижната координатна система не е еднозначно определено, а има множество оси, които, бидейки насочени по $O\zeta$, могат да бъдат перманентни оси на ротация. Тези от частните случаи, които могат да се обхванат с общото решение (1.14) при поне едно от N_1, N_2, N_3 различно от нула, няма да разглеждаме.

1. Нека разпределението на масата на жиростата е най-общо

$$A \neq B \neq C \neq A, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 \neq 0, \quad z_0 \neq 0, \tag{2.1}$$

но жиростатичният момент да е колинеарен с радиус-вектора на масовия център, т. е.

$$\frac{k_1}{x_0} = \frac{k_2}{y_0} = \frac{k_3}{z_0} = a. \tag{2.2}$$

В този случай двете уравнения (1.9) и (1.10) представляват в текущи координати l_1, l_2 и l_3 един и същ конус и положението на перманентната ос на ротация не е еднозначно определено.

1а. При $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$ и $l_3 \neq 0$ съгласно с означенията (1.8) всяко от уравненията (1.7), определящо ω, можем да представим във вида

$$\omega^2 + 2s\omega - 2\tau a - \beta = 0. \tag{2.3}$$

Като вземем пред вид, че заменяйки l_i с $-l_i$, знакът на τ се променя, можем да заключим, че за всяка образуваща на конуса (1.10), несъвпадаща с някоя от главните инерчни оси, поне една от полуобразуващите може да бъде перманентна ос на ротация с постоянна ъглова скорост — тази, за която уравнението (2.3) има реални корени. В разглеждания случай следователно имаме безбройно много частни решения на уравненията на движението, съответстващи на перманентни ротации с постоянна ъглова скорост. Частните решения имат вида (1.14) за всяка ос от конуса, т. е. за всяка тройка директорни косинуси, удовлетворяващи (1.10), за които уравнението (2.3) има реални корени.

1б. От (1.7) виждаме, че в случаи на всяка от главните инерчни оси съответствуват перманентни ротации с една и съща ъглова скорост. Например за оста x имаме следното частно решение:

$$\gamma_1 = \pm 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \; p = \pm\omega, \; q = r = 0,$$

(2.4)

$$\omega = \frac{ax_0}{k_1} = \frac{ay_0}{k_2} = \frac{az_0}{k_3}.$$

2. Нека

(2.5)
$$x_0 \neq 0, \; y_0 = z_0 = 0,$$
$$k_1 \neq 0, \; k_2 = k_3 = 0.$$

Както се вижда от (1.7), при условията (2.5) са възможни следните частни решения, съответстващи на перманентни ротации на жиростата:

2а. Ако $A \neq B \neq C \neq A$, перманентните ротации около оста x са с произволна ъглова скорост, т. е.

(2.6)
$$\gamma_1 = \pm 1, \; \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \; p = \omega, \; q = r = 0.$$

2б. За осите, несъдържащи масовия център, например за оста z, имаме решението

(2.7)
$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \; \gamma_3 = \pm 1, \; p = q = 0, \; r = \omega = \frac{ax_0}{k_1}$$

2в. Ако жиростатът е симетричен и например

(2.8)
$$A \neq B = C,$$

всяка ос през точката O на закрепването на жиростата е перманентна ос на ротация с определена постоянна големина и посока на ъгловата скорост. Само около оста на симетрията x перманентните ротации са с произволна ъглова скорост. За всяка друга ос ω определяме от уравнението

(2.9)
$$(A - C)\, l_1 \omega^2 - k_1 \omega - ax_0 - \beta (A - C)\, l_1 = 0.$$

За главната инерчна ос x имаме следователно частното решение (2.6) Всяка от осите през O в равнината yOz е главна и за нея имаме частното решение (2.7). За останалите оси при $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$ и $l_3 \neq 0$ имаме решение, аналогично на (1.14), но с ъглова скорост, определена от (2.9).

Уравнението (2.9) показва, че при условията (2.5) и (2.8) за всички оси, разположени върху кръгов конус с връх O и геометричната ос на конуса Ox, перманентните ротации имат една и съща ъглова скорост.

3. Нека масовият център съвпада с точката на закрепването на жиростата, т. е.

(2.10)
$$x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

В случая конусът (1.10) не съществува. При различни предположения за жиростатичния момент можем да получим редица частни решения на уравненията на движението, съответстващи на перманентните ротации на жиростата при условието (2.10). Ще се спрем само на някои от тях.

3а. При най-общо разпределение на масата и жиростатичния момент

(2.11)
$$A \neq B \neq C \neq A, \; k_1 \neq 0, \; k_2 \neq 0, \; k_3 \neq 0$$

перманентна ос на ротация може да бъде всяка образуваща на конуса (1.9). Действително уравнението (2.3), определящо ъгловата скорост, добива вида

(2.12)
$$\omega^2 + 2s\omega - \beta = 0$$

и тъй като дискриминантата му е винаги положителна, то на всяка полуобразуваща на конуса (1.9) съответствуват две перманентни ротации с различни посоки на въртене и различни големини на ъгловите скорости. Ще отбележим, че за двете полуоси, лежащи на една и съща образуваща на конуса, съответните решения на (2.12) са различни, тъй като замяната на l_i с $-l_i$ води до промяна на знака на s. Изключение от последното правят двете полуобразуващи, лежащи на правата OK, за която $s \; 0$.

3б. За образуващите на конуса, съвпадащи с главните инерчни оси, получаваме от (1.7) при условията (2.10) и (2.11), че $\omega=0$. За оста x имаме например решението

$$\gamma_1=\pm 1, \quad \gamma_2=\gamma_3=0, \quad p=q=r=0. \tag{2.13}$$

3в. Нека

$$A \neq B \neq C \neq A, \quad k_1 \neq 0, \quad k_2=k_3=0. \tag{2.14}$$

Перманентните ротации около оста x са с произволна ъглова скорост и имаме частното решение (2.6), а за другите две главни инерчни оси решение, аналогично на (2.13).

3г. При условието (2.10), ако

$$A \neq B=C, \tag{2.15}$$

имаме частни решения, аналогични на тези от т. 2б), но в уравнението (2.9) следва да положим $x_0=0$.

§ 3. Устойчивост на перманентните ротации

Частното решение (1.14) на уравненията на движението (0.5) и (0.6) приемаме за решение, определящо несмутеното движение. Ще изследваме неговата устойчивост по отношение на величините p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3, смущенията на които означаваме съответно с ξ_1, ξ_2, $\quad \eta_1$, η_2, η_3. Ако в уравненията на движението заместим

$$p=\omega l_1+\xi_1, \quad q=\omega l_2+\xi_2, \quad r=\omega l_3+\xi_3,$$

$$\gamma_1=l_1+\eta_1, \quad \gamma_2=l_2+\eta_2, \quad {}_3=l_3+\eta_3$$

и вземем пред вид (1.7), получаваме диференциалните уравнения на смутеното движение

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt}= & -\frac{k_3+(C-B)\,l_3\omega}{A}\xi_2+\frac{k_2-(C-B)\,l_2\omega}{A} \quad \frac{\beta(C-B)\,l_3+\alpha z_0}{A}\eta_2 \\ & +\frac{\beta(C-B)\,l_2 \quad \alpha y_0}{A}\eta_3 \quad \frac{C-B}{A}\xi_2\xi_3+\frac{\beta(C \quad B)}{A}\eta_2\eta_3 \\ \frac{d\eta}{dt} \quad & -l_3\xi_2 \quad l_2\xi_3+\omega l_3\eta_2-\omega l_2\eta_3+\xi_3\eta_2-\xi_2\eta_3 .\end{aligned} \tag{3.1}$$

Останалите четири уравнения на смутеното движение се получават от горните чрез циклична замяна на величините A, B, C, x_0, y_0, z_0 и индексите 1, 2 и 3.

Уравненията (3.1) допускат следните първи интеграли:

$$V_1=A\xi_1^2+B\xi_2^2+C\xi_3^2+2\omega(Al_1\xi_1+Bl_2\xi_2+Cl_3\xi_3)+2a(x_0\eta_1+y_0\eta_2+z_0\eta_3)$$

(3.2)

$$+\beta(A\eta_1^2+B\eta_2^2+C\eta_3^2)+2\beta(Al_1\eta_1+Bl_2\eta_2+Cl_3\eta_3)=\text{const},$$

$$V_2=A\xi_1\eta_1+B\xi_2\eta_2+C_3\xi_3\eta_3+\omega(Al_1\eta_1+Bl_2\eta_2+Cl_3\eta_3)$$

(3.2)

$$+Al_1\xi_1+Bl_2\xi_2+Cl_3\xi_3+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3=\text{const},$$

$$V_3=\eta_1^2\quad\eta_2^2+\eta_3^2+2(l_1\eta_1+l_2\eta_2+l_3\eta_3)=0.$$

Функцията на Ляпунов построяваме във вида

$$V=V_1-2\omega V_2+\lambda V_3+\frac{\nu}{4}V_3^2=A\xi_1^2+B\xi_2^2+C\xi_3^2$$

(3.3)

$$-2\omega(A\xi_1\eta_1+B\xi_2\eta_2+C\xi_3\eta_3)+(\lambda+A\beta+\nu l_1^2)\eta_1^2+(\lambda+B\beta+\nu l_2^2)\eta_2^2$$

$$+(\lambda+C\beta+\nu l_3^2)\eta_3^2+2\nu l_1l_2\eta_1\eta_2+2\nu l_1l_3\eta_1\eta_3+2\nu l_2l_3\eta_2\eta_3+f(\eta_1,\eta_2,\eta_3),$$

където въз основа на (1.7) избираме λ във вида

(3.4)

$$\lambda=A\omega^2+\frac{k_1}{l_1}\omega-\frac{ax_0}{l_1}-A\beta=B\omega^2+\frac{k_2}{l_2}\omega-\frac{ay_0}{l_2}$$

$$-B\beta=C\omega^2+\frac{k_3}{l_3}\omega-\frac{az_0}{l_3}-C\beta;$$

ν е произволна константа, а

$$f(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{\nu}{4}(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)[\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2+2(l_1\eta_1+l_2\eta_2+l_3\eta_3)].$$

При достатъчно малки смущения ξ_i, η_i функцията V ще бъде положително дефинитна, ако такава е нейната квадратична част

$$W=V-f(\eta_1,\eta_2,\eta_3).$$

Необходимите и достатъчни условия за положителна дефинитност на последната, а следователно и на (3.3) съгласно с теоремата на Силвестър се явяват неравенствата

(3.5)

$$\lambda+A\beta+\nu l_1^2-A\omega^2>0,\quad \begin{vmatrix}\lambda+A\beta+\nu l_1^2-A\omega^2 & \nu l_1l_2\\ \nu l_1l_2 & \lambda+B\beta+\nu l_1^2-B\omega^2\end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda\quad A\beta+\nu l_1^2-A\omega^2 & \nu l_1l_2 & \nu l_1l_3\\ \nu l_1l_2 & \lambda+B\beta+\nu l_2^2-B\omega^2 & \nu l_2l_3\\ \nu l_1l_3 & \nu l_2l_3 & \lambda+C\beta+\nu l_3^2-C\omega^2\end{vmatrix}>0.$$

Тъй като функцията V при условията (3.5) е положително дефинитен интеграл на уравненията на смутеното движение (3.1), съгласно с теоремата на Ляпунов за устойчивост [6] неравенствата (3.5) са достатъчни условия за устойчивостта на несмутеното движение (1.14), т. е. на перманентните ротации на жиростата.

Ако изберем $\nu=0$ и вземем пред вид (3.4), достатъчните условия за устойчивост (3.5) добиват вида

$$(3.6)\qquad \frac{k_1\omega-ax_0}{l_1}>0,\ \frac{k_2\omega-ay_0}{l_2}>0,\ \frac{k_3\omega-az_0}{l_3}>0.$$

Неравенствата (3.5) и (3.6) ще използуваме и при изследване на устойчивостта на перманентните ротации в някои от частните случаи, разгледани в § 2. За случая 1а при условията (2.2) неравенствата (3.6) можем да представим във вида

$$(3.7)\qquad \frac{k_1}{l_1}\left(\omega-\frac{\alpha}{a}\right)>0,\ \frac{k_2}{l_2}\left(\omega-\frac{\alpha}{a}\right)>0,\ \frac{k_3}{l_3}\left(\omega-\frac{\alpha}{a}\right)>0.$$

За случая 3а при условието (2.10) неравенстната (3.6) добиват вида

$$(3.8)\qquad \omega\frac{k_1}{l_1}>0;\ \omega\frac{k_2}{l_2}>0;\ \omega\frac{k_3}{l_3}>0\ \text{ или }\ \frac{k_1}{p}>0, \frac{k_2}{q}>0, \frac{k_2}{r}>0.$$

Достатъчните условия за устойчивост (3.7) и (3.8) дават възможност да определим областите на устойчивост върху конуса на перманентните оси (1,10), т. е. да намерим тези от полуобразуващите, около които перманентните ротации са устойчиви. Например неравенствата (3.8) показват, че ако векторът ъглова скорост $\vec{\omega}$ (p, q, r) и векторът жиростатичен момент $\mathbf{k}(k_1, k_2, k_3)$ с общо начало в O са в един и същ октант на координатната система, перманентните ротации са устойчиви. Последното е изпълнено за всяка от полуобразуващите на конуса, лежащи в октанта, съдържащ $\mathbf{k}$, при единия от корените на уравнението (2.12) и за всяка от полуобразуващите, лежащи в октанта, симетричен на горния относно O, при другия корен на уравнението (2.12). Тъй като координатните оси и правата OK са образуващи на конуса, то има образуващи, разположени в посочените октанти.

Аналогично се разглеждат и неравенствата (3.7).

За изследване устойчивостта на перманентните ротации около главните инерчни оси използуваме функция на Ляпунов от вида (3.3), но при съответен избор на константата λ.

При изследване устойчивостта на частното решение (2.4) избираме $\lambda=A\omega^2-A\beta$ и при $l_1=1$, $l_2=l_3=0$, $\nu>0$ неравенствата (3.5) в случая се редуцират на

$$(3.9)\qquad \begin{aligned}(A-B)(\omega^2-\beta)>0,\\ (A-C)(\omega^2-\beta)>0,\end{aligned}$$

явяващи се достатъчни условия за устойчивост на перманентните ротации около главната инерчна ос x.

При тежък жиростат [3] имаме същото частно решение (2.4) и достатъчно условие за неговата устойчивост е инерчният момент спрямо x да е максимален, т. е. $A>B\geqq C$. В случай на жиростат в Нютоново централно силово поле, както се вижда от (3.9), това не е достатъчно, а още и

$$\omega^2-\beta>0. \tag{3.10}$$

В сега разглеждания случай перманентните ротации са устойчиви и когато x е ос на минималния инерчен момент ($A<B<C$), както се вижда от (3.9), при условието

$$\omega^2-\beta<0, \tag{3.11}$$

което може да бъде изпълнено при достатъчно голям жиростатичен момент, тъй като $\frac{ax_0}{k_1}=\frac{ay_0}{k_2}=\frac{az_0}{k_3}$.

При условията (2.5) имаме частното решение (2.6), съответствуващо на перманентните ротации около главната инерчна ос x с произволна ъглова скорост. В случая избираме

$$\begin{gathered}\lambda=A\omega^2-A\beta+\omega k_1-ax_0,\\ \nu>ax_0-\omega k_1.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Достатъчните условия за устойчивост (3.5) съгласно с (2.5) и (3.12) се редуцират в случая на неравенствата

$$\begin{gathered}(A-B)(\omega^2-\beta)+\omega k_1-ax_0>0,\\ (A-C)(\omega^2-\beta)+\omega k_1-ax_0>0.\end{gathered} \tag{3.13}$$

При анализа на достатъчните условия за устойчивост на частното решение (2.6) неравенствата (3.13) е удобно да представим и във вида

$$\begin{gathered}(A-B)(\omega-\omega_1')(\omega-\omega_2')>0,\\ (A-C)(\omega-\omega_1'')(\omega-\omega_2'')>0,\end{gathered} \tag{3.14}$$

където

$$\begin{gathered}\omega_{1,2}'=\frac{-k_1}{2(A-B)}\pm\sqrt{\frac{k_1^2}{4(A-B)^2}+\beta+\frac{ax_0}{A-B}},\\ \omega_{1,2}''=\frac{-k_1}{2(A-C)}\pm\sqrt{\frac{k_1^2}{4(A-C)^2}+\beta+\frac{ax_0}{A-C}}\end{gathered} \tag{3.15}$$

За да покажем и условия за неустойчивост на решението (2.6), ще разгледаме характеристичното уравнение на системата от диференциални уравнения в първо приближение на смутеното движение (3.1), което има вида

$$\varrho^2(\varrho^4+m\varrho+n)=0$$

и в което

$$\begin{aligned}n&=\frac{[(A-B)(\omega^2-\beta)+k_1\omega-ax_0][(A-C)(\omega^2-\beta)+\omega k_1-ax_0]}{BC}\\ &=\frac{(A-B)(A-C)(\omega-\omega_1')(\omega-\omega_2')(\omega-\omega_1'')(\omega-\omega_2'')}{BC}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ако n стане отрицателно, то характеристичното уравнение ще има поне един корен с положителна реална част и съгласно с една теорема на Ляпунов [6] несмутеното движение е неустойчиво.

В зависимост от разпределението на масата и жиростатичния момент имаме следните възможни случаи:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &\frac{k_1^2}{4(A-B)^2}+\frac{ax_0}{A-B}+\beta<0,\\ &\frac{k_1^2}{4(A-C)^2}+\frac{ax_0}{A-C}+\beta<0. \end{aligned}$$

Случаят (I) е възможен: 1) когато x е ос на максималния инерчен момент, т. е. $A>B\geqq C$ при $x_0<0$, и тогава неравенствата (3.13) са изпълнени при всяко ω, следователно перманентните ротации около главната инерчна ос x при указаното разпределение на масата са устойчиви при произволна ъглова скорост; 2) когато x е ос на минималния инерчен момент, т. е. $A<B<C$ при $x_0>0$, и тогава няма ъглова скорост, при която биха могли да бъдат изпълнени неравенствата (3.13).

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} &\frac{k_1^2}{4(A-B)^2}+\frac{ax_0}{A-B}+\beta<0,\\ &\frac{k_1^2}{4(A-C)^2}+\frac{ax_0}{A-C}+\beta>0. \end{aligned}$$

Случаят (II) е възможен: 1. ако $x_0<0$, $A>B$. Първото от неравенствата (3.13) е удовлетворено за всяко ω, а второто при:

1а. $A>C$ за всяко ω, подчинено на едно от неравенствата

$$\omega<\omega_2'' \quad \text{или} \quad \omega>\omega_1''; \tag{3.17}$$

това са достатъчните условия за устойчивост при указаното разпределение на масата на жиростата. При ъглова скорост, подчинена на

$$\omega_2''<\omega<\omega_1'', \tag{3.18}$$

както се вижда от (3.16), знакът на n е отрицателен и следователно имаме неустойчивост.

1б. Ако $A<C$, то неравенствата (3.18) определят областта на устойчивост, а (3.17) — тази на неустойчивост.

1в. Ако $A=C$ и приемем за определеност, че $k_1>0$, второто от неравенствата (3.13) добива вида

$$\omega>\frac{ax_0}{k_1} \tag{3.19}$$

и е достатъчно условие за устойчивост, а при

$$\omega<\frac{ax_0}{k_1}$$

знакът на n е отрицателен и имаме неустойчивост.

2. Ако $x_0 > 0$, $A < B$. Първото от неравенствата (3.13) не може да бъде удовлетворено.

2а. Ако $A > C$, неравенствата (3.17) определят областта на неустойчивост.

2б. Ако $A < C$, неравенствата (3.18) определят областта на неустойчивост.

2в. Ако $A = C$ и $k_1 > 0$, (3.19) определя областта на неустойчивост.

$$
\text{(III)} \qquad \begin{aligned} &\frac{k_1^2}{4(A-B)^2} + \frac{a x_0}{A-B} + \beta > 0, \\ &\frac{k_1^2}{4(A-C)^2} + \frac{a x_0}{A-C} + \beta > 0, \end{aligned}
$$

За определеност в случая (III) ще предполагаме, че $k_1 > 0$, $x_0 \geq 0$.

1. Нека $A > B > C$ и $\omega_2' < \omega_2'' < 0 < \omega_1' < \omega_1''$ При ω, подчинено на

$$
(3.20) \qquad \omega > \omega_1'' \quad \text{или} \quad \omega < \omega_2',
$$

неравенствата (3.14) се удовлетворяват и следователно (3.20) са достатъчни условия за устойчивост на перманентните ротации, а при ω, подчинено на $\omega_1' < \omega < \omega_1''$ или $\omega_2' < \omega < \omega_2''$, както се вижда от (3.16), знакът на n е отрицателен и имаме неустойчивост. Ако $B = C$, имаме $\omega_{1,2}' = \omega_{1,2}''$.

2. Ако $A = B > C$ и $\omega_2'' < 0 < \frac{a x_0}{k_1} < \omega_1''$, имаме устойчивост при $\omega > \omega_1''$, а неустойчивост — при $\frac{a x_0}{k_1} < \omega < \omega_1''$ или $\omega < \omega_2''$.

Ако $A = B > C$, но $\omega_2'' < 0 < \omega_1' < \frac{a x_0}{k_1}$, перманентните ротации са устойчиви при $\omega > \frac{a x_0}{k_1}$, а неустойчиви — при $\omega_1'' < \omega < \frac{a x_0}{k_1}$ или $\omega < \omega_2''$

3. Нека $B > A > C$ и $\omega_2'' < \omega_2' < \omega_1'' < \omega_1'$. Устойчивост има при $\omega_1'' < \omega < \omega_1'$, а неустойчивост — при $\omega < \omega_2''$ или $\omega_2' < \omega < \omega_1''$.

При $B > A > C$, но $\omega_2'' < \omega_2' < \omega_1' < \omega_1''$ (възможно само при $x_0 > 0$) условията за устойчивост не се удовлетворяват за никое ω, а неустойчивост имаме при $\omega < \omega_2''$, $\omega_2' < \omega < \omega_1'$, $\omega > \omega_1''$.

4. Ако $B > A = C$, и $\omega_2' < \omega_1' < \frac{a x_0}{k_1}$, условията за устойчивост не са изпълнени, а неустойчивост имаме при $\omega_2' < \omega < \omega_1'$ и $\omega > \frac{a x_0}{k_1}$.

Ако $B > A = C$, но $\omega_2' < \frac{a x_0}{k_1} < \omega_1'$, устойчивост имаме при $\frac{a x_0}{k_1} < \omega < \omega_1'$, а неустойчивост — при $\omega_2' < \omega < \frac{a x_0}{k_1}$ и $\omega > \omega_1'$.

5. Ако $B > C > A$ и $\omega_2' < \omega_2'' < \omega_1' < \omega_1''$, устойчивост имаме при $\omega_2'' < \omega < \omega_1'$, а неустойчивост — ако $\omega_2' < \omega < \omega_2''$ или $\omega_1' < \omega < \omega_1''$ Дру-

гите възможности за подреждането на $\omega'_{1,2}$ и $\omega''_{1,2}$ се третират аналогично на предните случаи.

При условията (2.10) и (2.14) за перманентните ротации около оста x, извършващи се с произволна ъглова скорост, достатъчните условия за устойчивост получаваме от (3.13), полагайки $x_0=0$, а именно

$$(3.21)\qquad \begin{aligned} &(A-B)(\omega^2-\beta)+\omega k_1>0,\\ &(A-C)(\omega^2-\beta)+\omega k_1>0. \end{aligned}$$

При анализа на тези неравенства постъпваме, както при неравенствата (3.13), но в сегашния случай е възможно само разпределението (III).

За изследване устойчивостта на частното решение (2.7) избираме $\lambda=C\omega^2-C\beta$, $\nu>0$ и съобразявайки се с условията (2.5), достатъчните условия за устойчивост (3.4) се редуцират на

$$(3.22)\qquad \begin{aligned} &(C-A)(\omega^2-\beta)>0,\\ &(C-B)(\omega^2-\beta)>0. \end{aligned}$$

Когато C е максималният инерчен момент, двете неравенства (3.22) са изпълнени, ако

$$\omega^2-\beta=\frac{a^2x_0^2}{k_1^2}-\beta>0,$$

а когато C е минималният инерчен момент, достатъчно условие за устойчивост е

$$\omega^2-\beta=\frac{a^2x_0^2}{k_1^2}-\beta<0.$$

Въпросът за достатъчни условия за устойчивост на перманентните ротации на симетричен жиростат около произволна ос, несъвпадаща с някоя от главните инерчни оси, при ъглова скорост, определена от уравнението (2.9), остава открит.

Постъпила на 14. III. 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В., Об устойчивости движения гиростатов, Прикл. мат. и мех., XXV, 1, 1961, 9—16.
2. Дрофа В. Н., О перманентных осях движения тяжелого гиростата около неподвижной точки, Прикл. мат. и мех., XXV, 5, 1961, 941—945.
3. Анчев А., Об устойчивости перманентных вращений тяжелого гиростата, Прикл. мат. и мех. XXVI, 1, 1962, 22—38.
4. Белецкий В. В., Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил. Прикл. мат. и мех. XXI, 6, 1957, 749—758.
5. Staude O., Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt, Journ. für die reine und angew. Math., **113**, 1894, 318—334.
6. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехтеоретиздат, Москва, 1955.

О ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ГИРОСТАТА В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ НЬЮТОНА

А. Анчев

(*Резюме*)

Рассматривается гиростат, имеющий неподвижную точку при внутренних стационарных движениях в центральном силовом поле Ньютона. Найдены частные решения уравнений движения, соответствующие перманентному вращению гиростата. В общем случае распределения массы и гиростатического момента, положение перманентной оси вращения и величина угловой скорости определены однозначно. Рассмотрены частные случаи распределения массы и гиростатического момента, для которых найдено геометрическое место перманентных осей вращения и соответствующих им угловых скоростей, а также перманентные вращения вокруг главных осей инерции.

С помощью второго метода Ляпунова указаны достаточные условия устойчивости найденых частных решений. В некоторых случаях указаны также и достаточные условия неустойчивости.

ON THE PERMANENT ROTATIONS OF A GYROSTAT IN NEWTONIAN CENTRAL FORCE FIELD

A. Anchev

(*Summary*)

In this paper a gyrostat is examined with one fixed point under interna stationary movements in Newtonian central force field. Particular solutions of the equations of movement are found corresponding to the permanent rotations of the gyrostat. Under arbitrary mass distribution and gyrostatic moment distribution are uniquely determined the directions of the permanent axis of rotation and the magnitude of the angular velocity. Particular cases of mass distribution and of gyrostatic moment distribution are discussed in which are found the geometrical locus of the permanent axes of rotation and the respective angular velocity, as well as the permanent rotations about the principle axes of inertia.

By application of Liapunov's Second method sufficient conditions are given. for stability of the founded particular solutions. In some of the cases also necessary conditions are given for unstability.