

ЕДНО АСИМПТОТИЧНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ НЕПРЕКЪСНАТ
ПРОЦЕС НА ВЪЗСТАНОВЯВАНЕ

Апостол Обретенов

Нека $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ е непрекъснат процес на възстановяване, т. е. x_k са взаимно независими, неотрицателни и еднакво разпределени нерешетъчни случайни величини. В теорията на възстановяването величините x_k се разглеждат като продължителност на съществуване на заменяем елемент: първият елемент, който съществува в началния момент $t=0$, се заменя с друг в момента $t=x_1$, който от своя страна се заменя от следващия в момента $t=x_1+x_2$ и т. н. Сумата $S_n=x_1+x_2+\dots+x_n$ дава момента, в който е станала n -та замяна или n -то възстановяване. Да означим с N_t най-голямото n , за което $S_n \leq t$. Очевидно N_t е броят на възстановяванията до момента t (включително и възстановяването в момента t).

Нека $F(x)$ е функцията на разпределение на x_k

$$F(x) = P(x_k < x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

и μ_i е i -тият момент на x_k

$$\mu_i = \int_0^{\infty} x^i dF(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

В случая, когато $F(x)$ е с дискретно разпределение и двата първи момента са крайни, при съответна нормировка N_t е асимптотично нормално разпределено [1]. Ако вторият момент (или и първият) не съществува, при някои допълнителни условия, наложени на $F(x)$, N_t има за гранично разпределение определен устойчив закон на разпределение [1]. Доказателствата и при трите случая ($\mu_1 < +\infty$, $\mu_2 < +\infty$; $\mu_1 < +\infty$, $\mu_2 = \infty$; $\mu_1 = +\infty$), дадени от Фелер, се основават на съотношението

$$P(S_n \leq t) = P(N_t \geq n)$$

и критерия на Дьоблин [2]. Пренасянето на твърдението за асимптотична нормалност от дискретния на непрекъснатия случай е дадено от Такач [3]. В настоящата работа се намира асимптотичното разпределение на величината N_t в случая, когато $\mu_1 = +\infty$ и при допълнително ограничение на поведението на $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$ (теорема 2). Даденото доказателство за

непрекъснатия случай може да се пренесе и за дискретния, като по този начин се получава доказателство, различно от това на Фелер. За случая $\mu_1 < +\infty$, $\mu_2 = +\infty$ използваният начин на доказване не дава резултат и само се получава асимптотичното поведение на моментите на N_t (теорема 3).

Асимптотичното разпределение на N_t ще намерим, като използваме известната теорема на Фреше — Шохат ([4] стр. 198). За тази цел първо ще ни е необходимо да намерим асимптотичното поведение на всички моменти от цял неотрицателен ред на N_t при $t \rightarrow \infty$. Отначало ще докажем следната

Лема. Нека $a(x)$ и $b(x)$ са ненамаляващи функции, дефинирани в интервала $(0, \infty)$, $a(0) = b(0) = 0$, и интегралът

$$c(x) = \int_0^x a(x-t) db(t)$$

е определен за всяко x от $(0, \infty)$. Тогава, ако при $x \rightarrow \infty$ са изпълнени съотношенията

$$(1) \quad a(x) \sim \frac{x^r}{\Gamma(r+1)}, \quad r > 0,$$

$$(2) \quad b(x) \sim \frac{x^s}{\Gamma(s+1)}, \quad s > 0,$$

то при $x \rightarrow \infty$ имаме

$$(3) \quad \int_0^x a(x-t) db(t) \sim \frac{x^{r+s}}{\Gamma(r+s+1)}.$$

Доказателство. Да означим с $a^*(y)$ и $b^*(y)$ лапласовите трансформации съответно на функциите $a(t)$ и $b(t)$, т. е.

$$a^*(y) = \int_0^\infty e^{-yt} da(t),$$

$$b^*(y) = \int_0^\infty e^{-yt} db(t).$$

Понеже $a(t) = 0$ (e^{-yt}) за всяко $y > 0$, то имаме

$$(4) \quad a^*(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-yt} da(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[e^{-yT} a(T) + y \int_0^T e^{-yt} a(t) dt \right] \\ = y \int_0^\infty e^{-yt} a(t) dt.$$

От съотношението (1) следва, че за достатъчно голямо T са изпълнени неравенствата

$$(5) \quad y[\Gamma^{-1}(r+1)-\varepsilon] \int_T^{\infty} e^{-yt} t^r dt < y \int_T^{\infty} e^{-yt} a(t) dt < y[\Gamma^{-1}(r+1)+\varepsilon] \int_T^{\infty} e^{-yt} t^r dt.$$

От (4), като използваме неравенствата (5), намираме

$$(6) \quad a^*(y) \sim y^{-r}, \quad y \rightarrow 0.$$

По същия начин се получава и за $b^*(y)$ съотношението

$$(7) \quad b^*(y) \sim y^{-s}, \quad y \rightarrow 0.$$

От (6) и (7) следва

$$(8) \quad a^*(y)b^*(y) \sim y^{-(r+s)}, \quad y \rightarrow 0.$$

Тъй като лапласовата трансформация $c^*(y)$ на $c(x)$ е

$$(9) \quad c^*(y) = a^*(y)b^*(y)$$

и функцията $c(x)$ е ненамаляваща, от (9) и асимптотичното съотношение (8) по теорема от тауберов тип ([5], теорема 108) следва

$$c(x) \sim x^{r+s} \Gamma^{-1}(r+s+1).$$

С това лемата е доказана.

Теорема 1. Нека $H_r(t) = MN_r^*$ е r -тият момент на случайната величина N_t , т. е.

$$MN_r^* = \int_0^{\infty} x^r dP(N_t < x), \quad r = 1, 2, \dots$$

Ако функцията на разпределение $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$ има асимптотичното поведение

$$(10) \quad 1 - F(x) \sim x^{-a}, \quad 0 < a < 1,$$

моментите $H_r(t)$ са от следния ред:

$$(11) \quad H_r(t) \sim \frac{t^{ra} \Gamma(r+1)}{\Gamma^r(1-a) \Gamma(r+1)}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Доказателство. Горното твърдение в дискретния случай е разгледано в [6]. Да дефинираме случайните величини Y_k по следния начин:

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{ако } S_k \leq t; \\ 0, & \text{ако } S_k > t. \end{cases}$$

Очевидно $Y_i Y_j = Y_j$ при $i \leq j$ и $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k$. Нека $P_r(i)$ са полиномите относно i , определени от рекурентното равенство

$$(12) \quad P_r(i) = iP_{r-1}(i) + \sum_{k=i}^{i-1} P_{r-1}(k), \quad P_0 = 1.$$

Индуктивно олучаваме, че $P_r(i)$ е полином от степен r със старши коефициент, равен на $r+1$. Също лесно се вижда, че $P_r(1) = 1$ за всички $r = 0, 1, 2, \dots$. Като използваме равенството (12), по индукция намираме за степените на N_i представянето

$$(13) \quad N_i^{r+1} = \sum_{k=1}^{\infty} P_r(k) Y_k \quad (r = 0, 1, \dots).$$

Да означим с $F_k(t)$, $k \geq 1$, функцията на разпределение на S_k

$$F_k(t) = F_{k-1} * F = \int_0^t F_{k-1}(t-x) dF(x), \quad F_1 = F.$$

Имайки пред вид (13) и че $MY_k = F_k$, за композицията $H_* H$ при $r \geq 1$ намираме

$$(14) \quad H_r * H = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} P_{r-1}(i) F_k(t), \quad H_1 = H.$$

От (13), замествайки полиномите P_r с равното им от (12) и пред вид на (14), получаваме

$$(15) \quad H_{r+1}(t) = (r+1)H_* H + \sum_{k=1}^{\infty} \left[k P_{r-1}(k) - r \sum_{i=1}^{k-1} P_{r-1}(i) \right] F_k(t).$$

Да означим с $Q_{r-1}(x)$ полинома, който се получава, като в израза

$$Q_{r-1}(k) = k P_{r-1}(k) - r \sum_{i=1}^{k-1} P_{r-1}(i)$$

сме заменили k с x след извършване на означеното сумиране. Лесно се съобразява, че $Q_{r-1}(x)$ е от степен $r-1$. В такъв случай, ясно е, че може да определим r на брой константи $a_1, a_2, \dots, a_r$, независещи от k и такива, че

$$(16) \quad Q_{r-1}(k) = a_1 \sum_{i=1}^{k-1} P_{r-2}(i) + a_2 \sum_{i=1}^{k-1} P_{r-3}(i) + \dots + a_{r-1} \sum_{i=1}^{k-1} P_0(i) + a_r.$$

Ако в лявата част на (15) вместо $Q_{r-1}(k)$ поставим израза му от (16), то съобразно с (14) получаваме

$$(17) \quad H_{r+1}(t) = (r+1)H_* H + a_1 H_{r-1} * H + \dots + a_r H, \quad r \geq 1.$$

Представянето (17) при $r=0$ не е валидно. При $r=0$ от (13) имаме

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t),$$

или

$$(18) \quad H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x) dF(x).$$

Съотношението (11) ще докажем индуктивно. За това първо да намерим асимптотичното поведение на функцията $H(t)$. Ако $F^*(s)$ и $H^*(s)$ са лапласовите трансформации съответно на $F(x)$ и $H(x)$,

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x),$$

$$H^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x),$$

от (18) за $H(t)$ следва

$$(19) \quad H^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}.$$

Понеже по условие имаме $1 - F(x) \sim x^{-a}$, от равенството

$$F^*(s) = 1 - s \int_0^\infty [1 - F(x)] e^{-sx} dx$$

намираме, че

$$(20) \quad 1 - F^*(s) \sim s^a \Gamma(1-a), \quad s \rightarrow 0.$$

Съотношението (20) ни дава за лапласовата трансформация $H^*(s)$ от (19) следната асимптотика:

$$(21) \quad \int_0^\infty e^{-sx} dH(x) \sim \frac{s^{-a}}{\Gamma(1-a)}.$$

От определението на функцията $H(t)$ се вижда, че тя е ненамаляваща. Това ни дава право да приложим, като вземем под внимание (21), теорема от тауберов тип ([5], теорема 108), според която

$$(22) \quad H(x) \sim \frac{x^a}{\Gamma(1-a) \Gamma(1+a)}, \quad x \rightarrow \infty,$$

т. е. съотношението (11) е вярно за $\nu=1$. Да допуснем, че (11) е вярно за всички цели неотрицателни числа k до ν включително. Тогава за композицията

$$H_k * H = \int_0^t H_k(t-x) dH(x)$$

по доказаната лема ще имаме

$$(23) \quad H_k * H \sim \frac{t^{(k+1)a} \Gamma(k)}{\Gamma^{k+1}(1-a) \Gamma[(k+1)a+1]}$$

за $k=1, 2, \dots, r$. От представянето (17) за $H_{r+1}(t)$, като вземем пред вид соотношенията (22) и (23), следва

$$H_{r+1}(t) \sim (r+1)H_r * H,$$

или

$$H_{r+1}(t) \sim \frac{t^{(r+1)a} \Gamma(r+1)}{\Gamma^{r+1}(1-a) \Gamma[(r+1)a+1]}.$$

С това теорема 1 е доказана.

Законът на разпределение $G_a(x)$ се нарича стабилен, ако има характеристична функция от вида

$$f_a(z) = \exp \left\{ -|z|^a \left(\cos \frac{\pi a}{2} - i \sin \frac{\pi a}{2} \operatorname{sgn} z \right) \Gamma(1-a) \right\}, \quad 0 < a < 2.$$

Теорема 2. Ако е изпълнено условието (10), случайната величина $t^{-a}N_t$ има гранично разпределение $1 - G_a(x^{-1/a})$, т. е.

$$(24) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t^{-a}N_t \geq x) = G_a(x^{-1/a}).$$

Доказателство. За да докажем горното твърдение, ще използваме следната теорема на Полард [7]:

Ако $\Phi(y)$ е лапласовата трансформация на функцията $1 - G_a(x^{-1/a})$,

$$(25) \quad \Phi(y) = - \int_0^{\infty} e^{-yx} dG_a(x^{-1/a}),$$

то $\Phi(y)$ е сумата на степенния ред

$$(26) \quad \Phi(y) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{y^r}{\Gamma(r a + 1) \Gamma^r(1-a)}.$$

От теорема 1 намираме, че за r -тия момент на величината $t^{-a}N_t$ имаме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma^r(1-a) \Gamma(r a + 1)} = m_r.$$

Лесно се убеждаваме, че

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_{2n}}} = +\infty,$$

което по критерия на Карлеман ([8], стр. 110) осигурява единствеността на функцията $E(x)$, за която

$$m_r = \int_0^{\infty} x^r dE(x).$$

В такъв случай от (25) следва $E(x) = 1 - G_a(x^{-1/a})$ и с прилагане на теоремата на Фреше — Шохат получаваме (24).

Теорема 3. Нека при $x \rightarrow \infty$

$$(27) \quad 1 - F(x) \sim x^{-a}, \quad 1 < a < 2$$

и μ е първият момент на $F(x)$. Ако освен това и функцията

$$q(x) = H(x) - \frac{x}{\mu}$$

е ненамаляваща, при $t \rightarrow \infty$ имаме

$$(28) \quad M\left(N_t - \frac{t}{\mu}\right)^r \sim \frac{(-1)^r r! t^{r+1-a}}{\mu^{r+1}(r-a)(r+1-a)}.$$

Доказателство. Да означим с $\varphi^*(s)$ и $F^*(s)$ лапласовите трансформации на $q(x)$ и $F(x)$. Уравнението (18) ни дава

$$(29) \quad \varphi^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dq(x) = \frac{F^*(s)(1 + \mu s) - 1}{\mu s [1 - F^*(s)]}.$$

Да определим асимптотичното поведение на $\varphi^*(s)$ при $s \rightarrow 0$. За целта функцията $F^*(s)$ представяме по следния начин:

$$(30) \quad F^*(s) = 1 - s\mu + s \int_0^\infty [1 - F(x)](1 - e^{-sx}) dx.$$

Като използваме условието (27), за интеграла отдясно на равенството (30) ще получим

$$(31) \quad \int_0^\infty [1 - F(x)](1 - e^{-sx}) dx \sim s^{a-1} \frac{\Gamma(2-a)}{a-1}.$$

Окончателно от (29), (30) и (31) за $\varphi^*(s)$ намираме

$$(32) \quad \varphi^*(s) \sim s^{a-2} \frac{\Gamma(2-a)}{\mu^2(a-1)}, \quad s \rightarrow 0.$$

Тъй като по условие $\varphi(x)$ е ненамаляваща, (32) по споменатата по-горе тауберова теорема ни дава

$$(33) \quad H(x) - \frac{x}{\mu} \sim \frac{x^{2-a}}{\mu^2(a-1)(2-a)}, \quad x \rightarrow \infty.$$

С това е доказано, че (28) е вярно при $r=1$.

Доказателството на (28) ще проведем индуктивно, като в същност приложим индукцията вместо за (28) за съотношението

$$(34) \quad H_k(x) - \frac{x^k}{\mu^k} \sim \frac{x^{k+1-a} k! k}{\mu^{k+1}(a-1) \prod_{i=1}^k (i+1-a)},$$

което, както споменахме вече, е вярно при $k=1$. Да приемем, че (34) е вярно за $k=1, 2, \dots, \nu$. От определението на композиция и чрез тъждествени преобразувания се проверява лесно, че

$$(35) \quad (k+1)H_k * H - \frac{x^{k+1}}{\mu^{k+1}} = (k+1) \int_0^x \left[H_k(x-t) - \frac{(x-t)^k}{\mu^k} \right] dH(t) \\ + (k+1) \int_0^x \frac{(x-t)^k}{\mu^k} d \left[H(t) - \frac{t}{\mu} \right].$$

От (33) следва, че

$$(36) \quad H(t) \sim \frac{t}{\mu}.$$

Тогава от (34) и (36) с прилагане на лемата получаваме следните две асимптотични съотношения:

$$(37) \quad \int_0^x \left[H_k(x-t) - \frac{(x-t)^k}{\mu^k} \right] dH(t) \sim \frac{x^{k+2-a}}{\mu^{k+2}(k+3-a)} c_k$$

(тук с c_k сме означили константата

$$c_k = \frac{k! k}{(a-1) \prod_{i=1}^k (i+1-a)});$$

$$(38) \quad \int_0^x \frac{(x-t)^k}{\mu} d \left[H(t) - \frac{t}{\mu} \right] \sim \frac{x^{k+2-a} k! \Gamma(3-a)}{\mu^{k+2} \Gamma(k+3-a)(a-1)(2-a)}.$$

Не е трудно да се докаже, че константите c_k удовлетворяват рекурентното равенство

$$(39) \quad (k+1) \left[\frac{c_k}{k+2-a} + \frac{k!}{(a-1) \prod_{i=1}^{k+1} (i+1-a)} \right] = c_{k+1},$$

така че от (35) въз основа на (37), (38) и (39) намираме

$$(40) \quad (k+1) H_k * H - \frac{x^{k+1}}{\mu^{k+1}} \sim \frac{x^{k+2-a}}{\mu^{k+2}} c_{k+1}$$

за всички $k=1, 2, \dots, \nu$. Като вземем под внимание валидността на (40) при стойностите на $k=1, 2, \dots, \nu-1$, от (17) с подходящо допълване със степени на x намираме

$$(41) \quad H_{\nu+1}(x) - \frac{x^{\nu+1}}{\mu^{\nu+1}} = (\nu+1) H_\nu * H - \frac{x^{\nu+1}}{\mu^{\nu+1}} + o(x^{\nu+2-a}).$$

Равенството (41) и съотношението (40), взето за $k=r$, ни дават верността на (34) и за следващото r .

По-нататък получаването на (28) от (34) е въпрос на пресмятане, което се основава на тъждеството

$$(42) \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k! k \binom{n}{k} \prod_{r=k}^n \frac{r+1-a}{n+1-a} = na(1-a)(2-a) \dots (n-2-a),$$

което е вярно за всяко цяло неотрицателно n и за всяко a .

Действително да означим с $R_{n-1}(a)$ полинома

$$R_{n-1}(a) = \sum_{k=1}^n (-1)^k k! k \binom{n}{k} \prod_{r=1}^n \frac{r+1-a}{n+1-a} - na(1-a)(2-a) \dots (n-2-a).$$

Не е трудно да се провери, като се използват познати комбинаторни тъждества, че $R_{n-1}(a)=0$ за $a=0, 1, 2, \dots, n-2$. При $a=n-1$ получаваме директно

$$R_{n-1}(n-1) = \frac{1}{2} \sum_{k=n-1}^n (-1)^k \binom{n}{k} k! k \prod_{r=k}^n (k+2-n) - n! = 0.$$

По този начин полиномът $R_{n-1}(a)$ се анулира за n на брой стойности и понеже е от степен $n-1$, той е тъждествено равен на нула.

Разполагайки с тъждеството (42), от (34) следва (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Feller W., Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 1949, 98—119.
2. Doeblin W., Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, Studia Math. **9**, 1941, 71—96.
3. Takács L., On a probability theorem arising in the theory of counters, Proc. Camb. Phil. Soc., **52**, 1956, 488—498.
4. Лоэв М., Теория вероятностей, Москва, 1962.
5. Харди Г., Расходящиеся ряды, Москва, 1951.
6. Обретенков А., Об асимптотическом поведении моментов числа появлений рекуррентного события (препринт ОИЯИ), Дубна, 1964.
7. Pollard H., The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$, Bull. Amer. Math. Soc., **54**, 1948, 1115—1116.
8. Ахизер Н. И., Классическая проблема моментов, Москва, 1961.

Постъпила на 26. VIII. 1964 г.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ПРОЦЕССЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Апостол Обретенов

(Резюме)

Пусть N_t наибольший индекс n , для которого $S_n \leq t$, где $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $\{x_k\}_1^\infty$ неотрицательные, независимые и одинаково распределенные нерешеточные случайные величины с функцией распределения $F(x)$.

В предлагаемой работе рассматривается асимптотическое поведение величины N_t . В случае, когда $F(x)$ является дискретным распределением, этот вопрос рассмотрен В. Феллером [1].

Доказываются следующие утверждения:

Теорема 1. Если функция распределения $F(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое поведение

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то для моментов любого целого положительного порядка величины N_t существует асимптотика (11).

Теорема 2. При том же ограничении для $F(x)$ случайная величина $t^{-\alpha} N_t$ имеет предельное распределение $1 - G_\alpha(x^{-1/\alpha})$, где $G_\alpha(x)$ является устойчивым законом распределения.

Теорема 3. Пусть при $x \rightarrow \infty$

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Если функция $\varphi(x) = H(x) - \frac{x}{\mu}$ неубывающая ($H(x)$ и μ являются первыми моментами соответственно величин N_x и x_i), то для моментов любого целого неотрицательного порядка N_t существует асимптотика (28).

AN ASYMPTOTIC DISTRIBUTION AT CONTINUOUS PROCESS OF RENEWAL

Apostol Obretenov

(Summary)

Let N_t be the greatest index n for which $S_n \leq t$, wherein $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $\{x_k\}_1^\infty$ are non-negative, independent, and equally distributed not-lattice random variables with a distribution function $F(x)$.

The present paper examines the asymptotic behaviour of N_t . In the case when $F(x)$ is a discrete distribution the problem has been examined by W. Feller [1].

The following assertions are demonstrated:

Theorem 1. If by a $x \rightarrow \infty$ the distribution function $F(x)$ has the asymptotic behaviour

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

then the moments of an entire positive order of N_t have the asymptotic (11).

Theorem 2. Under the same position for $F(x)$, the random variable $t^{-\alpha}N_t$ has the limiting distribution $1 - G_\alpha(x^{-1/\alpha})$, wherein $G_\alpha(x)$ is a stable law of distribution.

Theorem 3. Let at $x \rightarrow \infty$

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

If the function $\eta(x) = H(x) - \frac{x}{\mu}$ is non-decreasing ($H(x)$ and μ are the first moments of N_x and $F(x)$ respectively), then for the moments of an entire non-negative order of N_t we have the asymptotic (28).