

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПРИНЦИПА НА D'ALEMBERT—LAGRANGE КЪМ ХОЛОНОМНИ И НЕХОЛОНОМНИ МАТЕРИАЛНИ СИСТЕМИ ЗА ИЗВЕЖДАНЕ УРАВНЕНИЯТА НА ДВИЖЕНИЕТО НА ТЕЗИ СИСТЕМИ

Иван Ценов

1. Ние доказахме [1], [2], че ако въведем функцията $K = 1/2(\dot{T} - 3\dot{T}_0) - Q_i \ddot{q}_i$,¹ гдето T е кинетичната енергия, T_0 — функцията T , разгледана при фиксирани обобщени скорости, Q_i — обобщените сили, уравненията на движението на холономна система с обобщени координати $[q_i] = q_1, q_2, \dots, q_3$ се намират, като се търси максимум и минимум на функцията K , разгледана като функция само на обобщените ускорения $[\ddot{q}_i]$. За максимум и минимум на функцията K трябва частните производни на функцията K относно $[\ddot{q}_i]$ да са равни на нула или диференциалът dK на K да е равен на нула. Тогава уравненията на движението на холономна система са

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Но тези уравнения се получават и от уравнението

$$dK = \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} d\ddot{q}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

И наистина, за да бъде проверено това уравнение, каквито и да бъдат произволните и независими диференциали $[d\ddot{q}_i]$, трябва коефициентите $\partial K / \partial \ddot{q}_i$ на $d\ddot{q}_i$ да бъдат равни на нула; получават се уравненията на движението на холономна система.

Ако заменим в последното уравнение произволните диференциали $[d\ddot{q}_i]$ с произволните вариации $[\delta q_i]$ на обобщените координати, получава се линейното уравнение относно $[\delta q_i]$.

$$(1) \quad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} \delta q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

От това уравнение се намират уравненията на движението на холономна система, понеже вариациите $[\delta q_i]$ са произволни и независими. Но урав-

¹ Приемаме тензорното правило за сумиране на членове с два еднакви индекса, например i ; при този случай пишем $i = 1, 2, \dots, s$ без скоби.

нението (1) е общото уравнение на динамиката, с което се изразява принципът на d'Alembert—Lagrange. От това следва, че този принцип се прилага към холономна материална система за извеждането на тази система.

2. Принципът на d'Alembert—Lagrange се прилага и към нехолономна материална система с линейни връзки от първи ред. И наистина нека връзките са изразени със следните l линейни уравнения относно $[\dot{q}_i]$:

$$A_{ri}\dot{q}_i + A_r = 0, \quad r=1, 2, \dots, l, \quad i=1, 2, \dots, s,$$

които се написват и във вида

$$A_{ri}dq_i + A_r dt = 0;$$

A_{ri} и A_r са функции на $[q_i]$, t . Прилагаме принципа на Hölder; получават се следните l линейни уравнения относно $[\delta q_i]$:

$$A_{ri}\delta q_i \equiv A_{r\alpha}\delta q_\alpha + A_{r\beta}\delta q_\beta = 0; \quad \alpha=1, 2, \dots, k; \quad \beta=k+1, k+2, \dots, k+l.$$

Решенията на тия уравнения с неизвестни $[\delta q_\beta]$ имат вида

$$(2) \quad \delta q_\beta = a_{\beta\alpha}\delta q_\alpha, \quad \beta=k+1, k+2, \dots, k+l, \quad \alpha=1, 2, \dots, k;$$

$a_{\beta\alpha}$ са функции на $[q_i]$, t .

Ако в общото уравнение на динамиката (1), написано така

$$(3) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\beta} \delta q_\beta = 0,$$

заменим зависимите $[\delta q_\beta]$ с техните изрази чрез независимите $[\delta q_\alpha]$, дадени от (2), то приема вида

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\beta} a_{\beta\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0, \quad \alpha=1, 2, \dots, k; \quad \beta=k+1, k+2, \dots, k+l.$$

Понеже $[\delta q_\alpha]$ са произволни и независими, получават се уравненията на движението на нехолономната материална система с линейни връзки от първи ред:

$$(4) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\beta} a_{\beta\alpha} = 0, \quad \alpha=1, 2, \dots, k; \quad \beta=k+1, k+2, \dots, k+l;$$

$a_{\beta\alpha}$ са функции на $[q_i]$, t .

3. Принципът на d'Alembert — Lagrange не се прилага към нехолономни материални системи с нелинейни връзки от първи ред и линейни и нелинейни от втори ред, понеже уравненията на тия връзки не са линейни относно $[dq_i]$ или $[\delta q_i]$. За да се приложи принципът за извеждане на уравненията на движението, трябва първо да се линеаризират относно $[\delta q_i]$ уравненията на казаните три вида връзки. Ние ще направим това, като ще положим методата, която употребихме в 1. за линеаризация на уравнението $dK=0$: диференцираме уравненията на връзките, за да се явят диференциалите $[dq_i]$ и $[d\dot{q}_i]$ и заменяме в така получените уравнения произволните диференциали $[d\dot{q}_i]$ и $[d\ddot{q}_i]$ с произволните вариации $[\delta q_i]$ на $[q_i]$.

Да разгледаме трите случая на връзки.

1) Нехолономните нелинейни връзки от първи ред се изразяват с уравненията от вида

$$f_r([\dot{q}_i], [q_i], t) = 0; \quad r = 1, 2, \dots, l.$$

Диференцираме уравненията, като задържаме само членовете, които съдържат диференциалите $[d\dot{q}_i] = [d\dot{q}_\alpha], [d\dot{q}_\beta]$:

$$\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \equiv \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\beta} d\dot{q}_\beta = 0.$$

Замеяваме произволните диференциали $[d\dot{q}_i]$ с произволните вариации $[\delta q_i]$; получават се l линейни уравнения с неизвестни $[\delta q_\beta]$

$$\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \equiv \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\beta} \delta q_\beta = 0,$$

решенията на които относно зависимите (δq_β) имат вида $\delta q_\beta = a_{\beta\alpha} \delta q_\alpha$. Тогава общото уравнение на динамиката (3), изразено чрез независимите $[\delta q_\alpha]$, приема формата

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\beta} a_{\beta\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0.$$

Понеже вариациите $[\delta q_\alpha]$ са произволни и независими, получават се уравненията на движението на нехолономна материална система с нелинейни връзки от първи ред:

$$(5) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\beta} a_{\beta\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \beta = k+1, k+2, \dots, k+l;$$

$a_{\beta\alpha}$ са функции на $[q_i], [q_i], t$.

2) Нехолономните линейни връзки от втори ред се изразяват с уравнения от вида

$$A_{ri} \ddot{q}_i + A_r \equiv A_{ri} d\dot{q}_i + \dots = 0, \quad r = 1, 2, \dots, l, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

като не написавме члена $A_r dt$, понеже не съдържа $[d\dot{q}_i]$.

Ако заменим произволните диференциали $[d\dot{q}_i]$ с произволните вариации $[\delta q_i]$, получават се уравненията

$$A_{ri} \delta q_i + A_{r\alpha} \delta q_\alpha + A_{r\beta} \delta q_\beta = 0.$$

Идентично пресмятане на това в 2. води до уравненията на движението на нехолономна материална система с линейни връзки от втори ред

$$(6) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\beta} a_{\beta\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \beta = k+1, k+2, \dots, k+l;$$

$a_{\beta\alpha}$ са функции на $[\dot{q}_i], [q_i], t$.

3) Нехолономни нелинейни връзки от втори ред се изразяват с уравненията

$$f_r([\ddot{q}_i], [\dot{q}_i], [q_i], t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, l.$$

Диференцираме уравненията, като задържаме само членовете, които съдържат $[d\ddot{q}_i] = [d\ddot{q}_\alpha], [d\ddot{q}_\beta]$. В така получените уравнения заменяме произволните диференциали $[d\ddot{q}_\alpha]$ и $[d\ddot{q}_\beta]$ с произволните вариации $[\delta q_\alpha]$ и $[\delta q_\beta]$ получават се уравненията

$$\frac{\partial f_r}{\partial \ddot{q}_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial f_r}{\partial \ddot{q}_\beta} \delta q_\beta = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \beta = k+1, k+2, \dots, k+l.$$

Идентично пресмятане на това в случая 1) на 3. води до уравненията на движението на нехолономна материална система с нелинейни връзки от втори ред:

$$(7) \quad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} a_{\beta\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k, \beta = k+1, k+2, \dots, k+l,$$

$a_{\beta\alpha}$ са функции на $[\ddot{q}_i], [\dot{q}_i], [q_i], t$.

Нека забележим, че уравненията на движението (4), (5), (6), (7) на нехолономни материални системи с връзки линейни и нелинейни от първи и втори ред се получават и по метода за търсене максимум и минимум на функцията K от s променливи — обобщените ускорения, свързани с известен брой дадени уравнения.

В работите на много автори [3] се разглежда случаят на нехолономни нелинейни връзки. Някои автори предлагат специални методи за линеаризиране относно $[\delta q_i]$ на уравненията на нелинейните връзки от първи ред:

$$(8) \quad f_r([\dot{q}_i], [q_i], t) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, l,$$

за да се приложи принципът на d'Alembert — Lagrange за извеждане уравненията на движението на материални системи с такива връзки. Добронравов в работата си [4] разглежда две такива методи: метода на Четаев и Johnsen и метода на Vălcovici, неизвестни на мене, за примера

$$(9) \quad \sin \dot{q}_1 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 = 0.$$

Четаев и Johnsen предлагат уравненията

$$\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0, \quad r = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, s;$$

тогава от (9) следва уравнението

$$(10) \quad \cos \dot{q}_1 \delta q_1 + \dot{q}_2 \delta q_2 - 2\dot{q}_3 \delta q_3 + 2\dot{q}_4 \delta q_4 = 0.$$

Vălcovici предлага само за връзки от първи ред, които могат да се напишат така:

$$a_{ir} dq_i + a_r dt = 0, \quad r = 1, 2, \dots, l, i = 1, 2, \dots, s,$$

гдето a_{ir} и a_r са функции на $[\ddot{q}_i], [\dot{q}_i], [q_i], t$; тогава от уравнението (9), написано под формата

$$(11) \quad dt \sin \dot{q}_1 + \dot{q}_2 dq_2 - \dot{q}_3 dq_3 + \dot{q}_4 dq_4 = 0,$$

следва

$$(12) \quad \dot{q}_2 \delta q_2 - \dot{q}_3 \delta q_3 + \dot{q}_4 \delta q_4 = 0,$$

като насила е приложен принципът на Hölder, както пише и Добронравов в работата си.

Очевидно е, че с (10) и (12) ще се получат различни уравнения на движението. Ето защо Добронравов на края на работата си пише: „Необходимо е да се употребят общите теореми на динамиката за движението на системите, произхождащи непосредствено от законите на Нютон, за да се узнае степента на прилагаемостта на такава или друга метода. Има трудности, още по-големи в областта на механични системи с връзки от втори ред, и тук ние не ще ги разгледаме.“

Ние ще изведем с нашата метода уравненията на движението на материална система с връзка, дадена с уравнение (9). Обобщените координати на системата са q_1, q_2, q_3, q_4 . Тогава общото уравнение на динамиката (1) за холономна система, с което се изразява принципът на d'Alembert, приема формата

$$(13) \quad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_1} \delta q_1 + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_2} \delta q_2 + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_3} \delta q_3 + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_4} \delta q_4 = 0.$$

Диференцираме уравнението на връзката (9)

$$\cos \dot{q}_1 d\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 d\dot{q}_2 - 2\dot{q}_3 d\dot{q}_3 + 2\dot{q}_4 d\dot{q}_4 = 0$$

и заменяме произволните диференциали $d\dot{q}_1, d\dot{q}_2, d\dot{q}_3, d\dot{q}_4$ с произволните вариации $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta q_4$; получава се уравнението

$$\cos \dot{q}_1 \delta q_1 + 2\dot{q}_2 \delta q_2 - 2\dot{q}_3 \delta q_3 + 2\dot{q}_4 \delta q_4 = 0$$

От това уравнение намираме зависимата променлива δq_4 във функцията на независимите $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$:

$$\delta q_4 = -\frac{\cos \dot{q}_1}{2\dot{q}_4} \delta q_1 - \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_4} \delta q_2 + \frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_4} \delta q_3.$$

Тогава общото уравнение на динамиката (13) за нехолономна система приема вида

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_1} - \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_4} \frac{\cos \dot{q}_1}{2\dot{q}_4} \right) \delta q_1 + \left(\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_2} - \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_4} \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_4} \right) \delta q_2 + \left(\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_3} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_4} \frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_4} \right) \delta q_3 = 0.$$

Понеже $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ са произволни и независими, уравненията на движението на нехолономната материална система са

$$(14) \quad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_1} - \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_4} \frac{\cos \dot{q}_1}{2\dot{q}_4} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_2} - \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_4} \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_4} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_3} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_4} \frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_4} = 0.$$

Да намерим сега уравненията на движенията на системата с връзка, дадена с (12). Понеже уравнението на връзката е линейно относно dq_2, dq_3, dq_4 , няма защо да го диференцираме. Заменяме произволните диференциали dq_2, dq_3, dq_4 с произволните вариации $\delta q_2, \delta q_3, \delta q_4$ и получаваме уравненията

$$\dot{q}_2 \delta q_2 - \dot{q}_3 \delta q_3 + \dot{q}_4 \delta q_4 = 0,$$

отгдето

$$\delta q_4 = -\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} \delta q_2 + \frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1} \delta q_3.$$

Тогава общото уравнение на динамиката (13) приема формата

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} \right) \delta q_2 + \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_3} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1} \right) \delta q_3 = 0,$$

гдето $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ са произволни и независими. Уравненията на движението на нехолономната система са

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_3} + \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} \frac{\dot{q}_3}{\dot{q}_1} = 0,$$

които не се съвпадат с уравненията (14), понеже насила е приложен принципът на Hölder.

За да се приложи принципът на d'Alembert за нехолономна система с връзка, на която уравнението е (11), трябва четирите члена на това уравнение да бъдат последователно линейни на dq_1, dq_2, dq_3, dq_4 . Обаче първият член на уравнението (11) не е такъв. От това следва, че принципът на d'Alembert — Lagrange не може да бъде приложен на нехолономна система с връзка (11) и затова се получават неверни уравнения на движението на системата.

Нашата метода, изложена в 1. и 3. за линеаризацията относно $[\delta q_i]$ на уравненията на нехолономните връзки, линейни и нелинейни от първи ред и от втори ред, е обща метода, която води до верни уравнения на движението на системите. От нея се добиват специални методи. Така например методата на Четаев и Johnsen е случаят 1) в 3., а методата на Vălcovici — случаят в 2., когато A_i и A_r са функции на $[\dot{q}_i], [\dot{q}_i], [q_i], t$. Методата на двамата автори води до верни уравнения на движението, а методата на третия автор — до неверни уравнения на движението, понеже, както казахме по-горе, насила е приложен принципът на Hölder.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ценов И., Об одной новой форме уравнений аналитической динамики, ДАН СССР, 89, № 1, 1953, 21².
2. Ценов И., Върху интегралните вариационни принципи на аналитичната динамика, Год. на Соф. унив., Мат. фак., 57, 1964, 229.
3. Савин Г. Н., Г. В. Путята, Б. Л. Фрадлин, Очерки развития механики, Москва, 1964, 21.
4. Dobronravov V. V., Les principes de d'Alembert — Lagrange et Hölder dans la mécanique des systèmes non holonomes, Изв. на Мат. инст. на БАН, IV, № 2, 1960, 6, 7.

Постъпила на 6. VII. 1965 г.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА Д'АЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА
К ГОЛОНОМНЫМ И НЕГОЛОНОМНЫМ МАТЕРИАЛЬНЫМ
СИСТЕМАМ ДЛЯ ВЫВЕДЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ
ЭТИХ СИСТЕМ

Иван Ценов

(Резюме)

Используя своего метода линеаризирования уравнений линейных и нелинейных связей первого и второго порядков, изложенного в разделах 1. и 3. предлагаемой статьи, автор приходит к уравнениям движения систем с такими связями.

APPLICATION DU PRINCIPE DE D'ALEMBERT-LAGRANGE
À DÉDUCTION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES
HOLONOMES ET NON HOLONOMES

Ivan Tzenov

(Résumé)

En utilisant notre méthode de linéarisation des équations des liaisons linéaires et non linéaires de premier ordre et de second ordre, exposés dans 1. et 3., nous avons trouvé les équations du mouvement des systèmes avec liaisons pareilles.