

СХОДИМОСТ И СУМИРУЕМОСТ НА РЕДОВЕ ПО ОБОБЩЕНИТЕ
ПОЛИНОМИ НА БЕСЕЛ

Иван Байчев

В настоящата работа изследваме редове по обобщените полиноми на Бесел по периферията на областта на сходимост. В частност установяваме теореми за $(C, 1)$ -сумируемост на тези редове, аналогични на теоремите на Фейер и Фейер—Лебег при тригонометричните редове на Фурие.

За удобство предварително ще отбележим някои познати свойства на интегралите от типа на Коши [1].

Нека L е проста гладка затворена крива и $f(x)$ е сумируема функция върху L .

А. Почти за всяка точка x_0 от L съществува вътрешната ъглова граница

$$\varphi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(y)}{y-x} dy.$$

Ако $\varphi(x) = f(x)$ почти навсякъде върху L , казваме, че функцията $f(x)$ е представима по L с интеграл на Коши.

В. Функцията $f(x)$ е представима по L с интеграл на Коши тогава и само тогава, когато

$$(1) \quad \int_L \check{x} f(x) dx = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Нека $x = x(s)$ е уравнението на L , където s е дължината на дъгата и $x_0 = x(s_0)$. Да означим с L_δ по-голямата от дъгите на L с краища в точките $x(s_0 - \delta)$ и $x(s_0 + \delta)$.

С. Съществуването на границата $\varphi(x_0)$ е равносилно със съществуването на особения интеграл

$$\int \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{L_\delta} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy$$

и

$$(2) \quad \varphi(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy + f(x_0).$$

Обобщените полиноми на Бесел се дават с равенството

$$P_n(x) = P_n^{(m)}(x) = x^{-m} e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{m+2n} e^{\frac{1}{x}} \right],$$

където m е произволно комплексно число, различно от $-2, -3, -4, \dots$. Тези полиноми са ортогонални с тегло*

$$(3) \quad \varrho(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\nu} \Gamma(m+\nu+1)}$$

по всяка проста затворена крива C , която съдържа нулевата точка във вътрешността си ([2]), т. е.

$$\int_C \varrho(x) P_n(x) P_k(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{при } n \neq k, \\ \neq 0 & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Полиномът $P_n(x)$ удовлетворява линейно диференциално уравнение от втори ред и при цяло неотрицателно m асоциираната му функция $Q_n^{(m)}(x)$ може да се представи във вида

$$Q^{(m)}(x) = x^{-m} e^{-\frac{1}{x}} H_n^{(m)}(x),$$

където

$$(4) \quad H_n(x) = H_n^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varrho(y) P_n(y)}{x-y} dy,$$

като точката x лежи вън от контура C . Функциите $H_n(x)$ очевидно са еднозначни и аналитични при всяко комплексно m , различно от $-2, -3, -4, \dots$, и $|x| > 0$.

Да означим с $\varrho_n(x)$ n -тата парциална сума на реда (3). Тогава, ако

$$P_n(x) = \lambda_n^{(n)} x^n + \lambda_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \dots + \lambda_1^{(n)} x + \lambda_0^{(n)},$$

чрез пресмятане на интеграла от (4) получаваме още и следното представяне на функциите $H_n(x)$:

$$(5) \quad H_n(x) = \varrho(x) P_n(x) - \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu}^{(n)} \varrho_{\nu}(x) x^{\nu}, \quad \varrho_0(x) = 0.$$

За полиномите $P_n(x)$ и функциите $H_n(x)$ са валидни следните асимптотични формули ([2]):

$$(6) \quad P_n(x) = \left(\frac{4nx}{e} \right)^n 2^m \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2x}} (1 + \varepsilon_n),$$

При цяло неотрицателно m можем да вземем

$$\varrho(x) = x^m e^{\frac{1}{x}}.$$

$$(7) \quad H_n(x) = (-1)^n \left(\frac{e}{(4n\pi x)} \right)^n \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x(2n)^{n+1} \sqrt{2}} (1 + \eta_n),$$

където $\varepsilon_n = o(1)$ и $\eta_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно за $|x| > \delta > 0$.

Имаме още и следната формула на Кристофел—Дарбу:

$$(8) \quad \frac{1}{y-x} = \sum_0^n h_\nu P_\nu(x) H_\nu(y) + \frac{R_n(x, y)}{y-x}$$

където

$$h_\nu^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varrho(x) P_\nu^2(x) dx = \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+1)}{(m+2\nu+1) \Gamma(m+\nu+1)}, \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

$$R_n(x, y) = l_{n+1} [P_{n+1}(x) H_n(y) - P_n(x) H_{n+1}(y)].$$

$$l_{n+1} = \frac{(-1)^n \Gamma(m+n+2)}{(m+2n+2) \Gamma(n+1)} \sim \frac{(-1)^n}{2} n^m.$$

При извеждането на тази формула е взето под внимание, че

$$R_0(x, y) + (y-x) h_0 P_0(x) H_0(y) = 1,$$

което следва лесно от (5).

От (6) и (7) получаваме, че

$$(9) \quad R_n(x, y) = \left(\frac{x}{y} \right)^n [a(x, y) + \omega_n(x, y)],$$

където $a(x, y)$ и $\omega_n(x, y)$ са аналитични функции на x и y при $|x| > 0$, $|y| > 0$ и $\omega_n(x, y) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно спрямо x и y при $|x| > \delta > 0$, $|y| > \delta > 0$.

Нека $f(x)$ е сумируема функция върху окръжността $C: |x| = r$. Ако x лежи вътре в C , като умножим двете страни на (8) с $\frac{f(y)}{2\pi i}$ и интегрираме по C , получаваме

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{y-x} dy = \sum_0^n a_\nu P_\nu(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R_n(x, y)}{y-x} f(y) dy,$$

където

$$a_\nu = \frac{h_\nu}{2\pi i} \int_C H_\nu(y) + f(y) dy, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Като вземем под внимание асимптотичната формула (9), получаваме

Теорема 1. При $|x| < r$ редът

$$(11) \quad a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots$$

е сходящ към функцията

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{y-x} dy.$$

Сходимостта е равномерна във всеки кръг $|x| \leq r' < r$.

Теорема 2. Редът (11) е ред на Фурие на функцията $f(x)$ по окръжността C , т. е.

$$a_\nu = \frac{h_\nu}{2\pi i} \int_C \varrho(y) P_\nu(y) f(y) dy, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

тогава и само тогава, когато $f(x)$ е представима по C с интеграл на Коши.

Доказателство. Съгласно тъждеството (5)

$$\int_C \varrho(y) P_\nu(y) f(y) dy - \int_C H_\nu(y) f(y) dy = \int_C \left[\sum_0^\nu \lambda_s \varrho_s(y) y^s \right] f(y) dy.$$

Но полиномът $p_\nu(y) = \sum_0^\nu \lambda_s \varrho_s(y) y^s$ е точно от степен $\nu-1$, следователно от равенствата

$$\int_C p_\nu(y) f(y) dy = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

следват равенствата (1) и обратно, с което теоремата е доказана.

Теоремите 1 и 2 следва да се разглеждат като непосредствено уточняване на основния резултат от работата [2], според който, ако функцията $f(x)$ е аналитична вътре в C и по C , редът (11) е сходящ към $f(x)$ в кръга $|x| \leq r$. Ние формулираме тези теореми повече за пълнота на изложението.

При изследване поведението на реда (11) по самата окръжност C се оказва полезна следната

Лема [3]. Нека $f(x)$ е сумируема функция по окръжността C и x_0 е произволна точка от тази окръжност. Тогава при $n \rightarrow \infty$

$$\int_C \frac{R_n(x_0, y) - R_n(x_0, x_0)}{y - x_0} f(y) dy = \int_C \frac{\left(\frac{x_0}{y}\right)^n - 1}{y - x_0} f(y) dy + o(1).$$

Доказателство. Понеже

$$R_n(x_0, x_0) = a(x_0, x_0) + \omega_n(x_0, x_0) = 1,$$

лесно се проверява, че

$$\begin{aligned} R_n(x_0, y) - R_n(x_0, x_0) &= \left(\frac{x_0}{y}\right)^n [a(x_0, y) - a(x_0, x_0)] \\ &+ \left(\frac{x}{y}\right)^n [\omega_n(x_0, y) - \omega_n(x_0, x_0)] + \left(\frac{x_0}{y}\right)^n - 1, \end{aligned}$$

откъдето

$$\int_C \frac{R_n(x_0, y) - R_n(x_0, x_0)}{y - x_0} f(y) dy = \int_C \left(\frac{x_0}{y}\right)^n \frac{a(x_0, y) - a(x_0, x_0)}{y - x_0} f(y) dy$$

$$+ \int_C \left(\frac{x_0}{y}\right)^n \frac{\omega_n(x_0, y) - \omega_n(x_0, x_0)}{y - x_0} f(y) dy + \int_C \frac{\left(\frac{x_0}{y}\right)^n - 1}{y - x_0} f(y) dy.$$

Според теоремата на Риман — Лебег при $n \rightarrow \infty$

$$\int_C \left(\frac{x_0}{y}\right)^n \frac{\omega_n(x_0, y) - \omega_n(x_0, x_0)}{y - x_0} f(y) dy = o(1).$$

По лемата на Шварц при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\omega_n(x_0, y) - \omega_n(x_0, x_0)}{y - x_0} = o(1)$$

равномерно спрямо y по окръжността C , следователно

$$\int_C \left(\frac{x_0}{y}\right)^n \frac{\omega_n(x_0, y) - \omega_n(x_0, x_0)}{y - x_0} f(y) dy = o(1),$$

с което лемата е доказана.

Да означим с d_n дъгата $x = r e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$, и да положим $C_n = C - d_n$,

$$s_n(x) = \sum_0^n a_r P_r(x).$$

Теорема 3. Нека $f(x) = f(r e^{i\theta}) = \psi(\theta)$ е сумируема функция по окръжността C . Ако в точката $x_0 = r e^{i\theta_0}$ е изпълнено условието

$$(12) \quad \Phi(t) = \int_0^t |\psi(\theta_0 + \theta) - \psi(\theta_0)| d\theta = o(t), \quad t \rightarrow 0,$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$(13) \quad s_n(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy - f(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \left(\frac{x_0}{y}\right)^n \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy + o(1).$$

Ако освен това съществува вътрешната ъглова граница $\varphi(x_0)$, условието

$$(14) \quad \int_{C_n} \left(\frac{x_0}{y}\right)^n \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

е необходимо и достатъчно, за да бъде редът (11) сходящ в точката x_0 към $\varphi(x_0)$.

Доказателство. От (10) получаваме

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R_n(x_0, x_0) - R_n(x_0, y)}{y - x_0} f(y) dy$$

и по лемата

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1 - \left(\frac{x_0}{y}\right)^n}{y - x_0} f(y) dy + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Но, както лесно се проверява,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1 - \left(\frac{x_0}{y}\right)^n}{y - x_0} dy = 1,$$

следователно

$$(15) \quad s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1 - \left(\frac{x_0}{y}\right)^n}{y - x_0} [f(y) - f(x_0)] dy + f(x_0) + o(1).$$

Тогава

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \left(\frac{x_0}{y}\right)^n \frac{f(y) - f(x_0)}{x_0 - y} dy + \frac{1}{2\pi i} \int_{d_n} \frac{1 - \left(\frac{x_0}{y}\right)^n}{y - x_0} [f(y) - f(x_0)] dy + o(1). \end{aligned}$$

Имаме

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{d_n} \frac{1 - \left(\frac{x_0}{y}\right)^n}{y - x_0} [f(y) - f(x_0)] dy = O \left\{ n \int_{d_n} |f(y) - f(x_0)| ds \right\},$$

а от (12) следва, че

$$\begin{aligned} \int_{d_n} |f(y) - f(x_0)| ds &= r \int_{-\pi/n}^{\pi/n} |\psi(\theta_0 + \theta) - \psi(\theta_0)| d\theta \\ &= r \left[\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) - \Phi\left(-\frac{\pi}{n}\right) \right] = o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

поради което

$$J = O \left[n o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

С това граничното равенство (13) е доказано.

Ако съществува границата $\varphi(x_0)$, съгласно С. и равенството (2)

$$(16) \quad \varphi(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy + f(x_0).$$

Тогава (13) приема вида

$$s_n(x_0) - \varphi(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \left(\frac{x_0}{y}\right)^n \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

и втората част на теоремата става очевидна.

Следствие 1. Редът (11) е сходящ почти навсякъде по C към $\varphi(x)$ тогава и само тогава, когато условието (14) е изпълнено почти за всяко x от C .

Действително, понеже $f(x)$ е сумируема функция върху C , условието (12) е изпълнено почти навсякъде по C и $\varphi(x)$ съществува почти за всяко x от C .

Като вземем под внимание теорема 2, можем да добавим

Следствие 2. Ако функцията $f(x)$ е представима по C с интеграл на Коши, нейният ред на Фурие е сходящ към $f(x)$ почти навсякъде върху C тогава и само тогава, когато условието (14) е изпълнено почти за всяко x от C .

Да положим

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_0^n s_k(x).$$

Теорема 4. Нека $f(x)$ е сумируема функция по окръжността C . Ако в точката $x_0 = re^{i\theta_0}$ е изпълнено условието (12), то при $n \rightarrow \infty$

$$(17) \quad \sigma_n(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy - f(x_0) = o(1).$$

Ако освен това $\varphi(x_0)$ съществува, редът (11) е $(C, 1)$ -сумируем в точката x_0 към $\varphi(x_0)$.

Доказателство. От равенството (15) следва, че

$$\sigma_n(x_0) = \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int_C \frac{(n+1) - \left[1 + \left(\frac{x_0}{y}\right) + \dots + \left(\frac{x_0}{y}\right)^n\right]}{y - x_0} [f(y) - f(x_0)] dy + f(x_0) + o(1).$$

Тогава

$$\begin{aligned} & \sigma_n(x_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}_n} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} dy - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int_{\tilde{C}_n} \frac{(n+1) - \left[1 + \left(\frac{x_0}{y}\right) + \dots + \left(\frac{x_0}{y}\right)^n\right]}{y - x_0} [f(y) - f(x_0)] dy \\ & - \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int_{\tilde{C}_n} \frac{1 + \left(\frac{x_0}{y}\right) + \dots + \left(\frac{x_0}{y}\right)^n}{y - x_0} [f(y) - f(x_0)] dy + o(1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int_{\alpha_n} \left[n + (n-1) \left(\frac{x_0}{y} \right) + \dots + 2 \left(\frac{x_0}{y} \right)^{n-2} + \left(\frac{x_0}{y} \right)^{n-1} \right] \left[f(y) - f(x_0) \right] \frac{dy}{y} \\ - \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int_{\zeta_n} y \frac{1 - \left(\frac{x_0}{y} \right)^{n+1}}{(y - x_0)^2} [f(y) - f(x_0)] dy + o(1) = J_1 - J_2 + o(1).$$

Както за интеграла J от доказателството на предната теорема, за първия интеграл J_1 получаваме

$$J_1 = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

За интеграла J_2 имаме

$$|J_2| \leq \frac{r}{\pi(n+1)} \int_{\zeta_n} \frac{|f(y) - f(x_0)|}{|y - x_0|^2} ds = \frac{1}{4\pi(n+1)} \int_{\frac{\pi}{n}}^{2\pi - \frac{\pi}{n}} \frac{|\psi(\theta_0 + \theta) - \psi(\theta_0)|}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ = \frac{1}{4\pi(n+1)} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\psi(\theta_0 + \theta) - \psi(\theta_0)| + |\psi(\theta_0 - \theta) - \psi(\theta_0)|}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ \leq \frac{\pi}{4(n+1)} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\psi(\theta_0 + \theta) - \psi(\theta_0)| + |\psi(\theta_0 - \theta) - \psi(\theta_0)|}{\theta^2} d\theta.$$

Но

$$\frac{\pi}{4(n+1)} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\psi(\theta_0 + \theta) - \psi(\theta_0)|}{\theta^2} d\theta \\ = O\left(\frac{1}{n}\right) \left[\frac{\Phi(\pi)}{\pi^2} - n^2 \frac{\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi^2} + 2 \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\Phi(\theta)}{\theta^3} d\theta \right] \\ = o(1) + O\left(\frac{1}{n}\right) \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} o\left(\frac{1}{\theta^3}\right) d\theta = o(1)$$

и, аналогично,

$$\frac{\pi}{4(n+1)} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{|\psi(\theta_0 - \theta) - \psi(\theta_0)|}{\theta^2} d\theta = o(1).$$

Следователно

$$J_2 = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

С това граничното равенство (17) е установено.

Ако съществува границата $\varphi(x_0)$, като вземем под внимание (16), получаваме

$$\sigma_n(x_0) - \varphi(x_0) = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

с което теоремата е доказано.

Следствие 3. Ако $f(x)$ е сумируема функция върху окръжността C , редът (11) е $(C, 1)$ -сумируем към $\varphi(x)$ почти за всяко x от C .

Следствие 4. Ако функцията $f(x)$ е представима по C с интеграл на Коши, нейният ред на Фурие е $(C, 1)$ -сумируем към $f(x)$ почти за всяко x от C .

Теорема 5. Ако $f(x)$ е функция, аналитична вътре в C и непрекъснатата по C , нейният ред на Фурие е $(C, 1)$ -сумируем към $f(x)$ за всяко x от C .

Доказателство. При направените предположения за $f(x)$ от обобщената интегрална формула на Коши следва, че

$$\varphi(x) = f(x)$$

за всяко x от C . Условието (12) също е изпълнено навсякъде по C . Тогава твърдението следва непосредствено от предната теорема.

Забележка. Подобна ортогоналност в комплексна област и асимптотика при $n \rightarrow \infty$ притежават и полиномите на Якоби

$$J_n(x; \alpha, \beta) = (x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}],$$

където α и β са произволни комплексни числа, за които α , β и $\alpha + \beta$ не е цяло отрицателно число [4]. Поради това за редове по тези полиноми възникващи при интегриране на формулата на Кристофел — Дарбу, и за редове на Фурие са валидни резултати за сходимост и $(C, 1)$ -сумируемост по елипсата на сходимост, аналогични на изложените. Измененията във формулировките са очевидни.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов, И. Граничные свойства аналитических функций. Москва — Ленинград, 1950.
2. Обрешков, Н. Върху някои ортогонални полиноми в комплексна област. Известия на Мат. инст. на БАН, 2 (1956), 45—67.
3. Русев, П. Сходимост на редове по полиномите на Якоби и Бесел върху границите на областите им на сходимост. Известия на Мат. инст. на БАН, 9 (1966), 73—82.
4. Баячев, Ив. Върху полиномите на Якоби. Известия на Мат. инст. на БАН, 7 (1963), 75—88.

Постъпила на 23. II. 1965 г.

СХОДИМОСТЬ И СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННЫМ МНОГОЧЛЕНАМ БЕССЕЛЯ

Иван Байчев

Резюме

В работе рассматриваются некоторые вопросы сходимости и суммируемости рядов по обобщенным многочленам Бесселя на границе области сходимости. В частности устанавливаются теоремы для $(C, 1)$ -суммируемости этих рядов, аналогичные теоремам Фейера и Фейера — Лебега для тригонометрических рядов.

CONVERGENCE AND SUMMABILITY OF SERIES OF BESSEL'S GENERALIZED POLYNOMIALS

Ivan Baichev

Summary

The paper is an investigation of certain problems related to the convergence and summability of series of Bessel's generalized polynomials on the contour of the region of convergence. In particular theorems are given for $(C, 1)$ -summability of these series analogous to the theorems of Fejér and Fejér — Lebesgue for trigonometric series.