

ЕДИН МЕТОД ЗА ПРЕСМЯТАНЕ КОРЕНИТЕ НА ЦЕЛИ ФУНКЦИИ ОТ ЛАГЕРОВ ТИП

Кирил Дочев, Петър Бърнев и Петър Русев

Нека

$$(1) \quad f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

е цяла функция от ред ϱ , $0 < \varrho \leq 1$, която има само реални, положителни и прости корени $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$. В настоящата работа се предлага един метод за приблизително пресмятане корените на цели функции от вида (1), който може да се разглежда като аналог на известния метод на Лагер за числено решаване на алгебрични уравнения с реални и прости корени ([1], [2], [3], [4]).

Да положим

$$L(x) = f'(x)(1 - \sigma x) + \sigma f(x)\{f'(x) + xf''(x)\},$$

$$(2) \quad \begin{aligned} M(x) &= xf^2(x)(2 - \sigma x) + f(x)\{f'(x) + \sigma f(x) + \sigma x[f'(x) + xf''(x)] - xf''(x)\}, \\ N(x) &= 2xf(x)\{f'(x) + \sigma f(x)\}, \\ P(x) &= \sigma x^2 f^2(x), \end{aligned}$$

където x е произволно реално число и

$$(3) \quad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = -\frac{f'(0)}{f(0)} = -f'(0).$$

С помощта на въведените изрази (2) образуваме следния полином от трета степен:

$$(4) \quad F(\xi; x) = L(x) \cdot \xi^3 + M(x) \cdot \xi^2 + N(x) \cdot \xi + P(x).$$

Като следваме метода на Н. Обрешков [4], ще установим следната

Теорема 1. Ако $f(a) = 0$, $F(a - x; x) \leq 0$ за всяко реално x .

Доказателство. Нека $a = a_n$ да означава произволна нула на функцията $f(z)$ и без да намаляваме общността, да считаме, че $f(x) \neq 0$. Тогава, като използваме неравенството на Коши—Буняковски, получаваме

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x-a}\right)^2 = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{1}{x-a_n}\right)^2 = \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} \cdot \frac{\sqrt{a_n}}{x-a_n}\right)^2 \leq \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{a_n}{(x-a_n)^2}$$

$$= -\left(\sigma - \frac{1}{a}\right) \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + x \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} + \frac{a}{(x-a)^2}\right),$$

откъдето след известни преобразования следва неравенството $F(a-x; x) \leq 0$.

Ще покажем по-нататък, че при $x > a_1$ и $f(x) \neq 0$ уравнението от трета степен $F(\xi; x) = 0$ за ξ има три различни реални корена $\xi_1(x) < \xi_2(x) < \xi_3(x)$. При това са в сила неравенствата

$$(5) \quad -x < \xi_1(x) < a_s - x < \xi_2(x) < 0 < \xi_3(x),$$

където a_s е най-голямата нула на $f(x)$, която е по-малка от x .

Най-напред ще покажем, че $F(-x; x)$ е положително. Това следва от равенството

$$F(-x; x) = -x^2 \{f(x)f'(x) + x[f(x)f''(x) - f'^2(x)]\}$$

и от неравенството

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(x-a_n)^2} = -\frac{f'(x)}{f(x)} - x \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}' = -\frac{f(x)f'(x) + x[f(x)f''(x) - f'^2(x)]}{f^2(x)}.$$

По-нататък имаме $F(0; x) = P(x) = \sigma x^2 f^2(x) > 0$. Освен това $L(x) < 0$, което е равносилно с неравенството

$$\left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}^2 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} \frac{\sqrt{a_n}}{x-a_n} \right\}^2 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(x-a_n)^2} = -\sigma \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} + x \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} \right\}.$$

От установените неравенства $F(-x; x) > 0$, $F(0; x) > 0$, $L(x) < 0$ и от неравенството $F(a_s - x; x) < 0$ следва, че при направените предположения за x , а именно $x > a_1$ и $f(x) \neq 0$, уравнението $F(\xi; x) = 0$ има три реални корена $\xi_1(x) < \xi_2(x) < \xi_3(x)$, за които са валидни неравенствата (5).

Да отбележим още, че вследствие теорема 1 в интервала $\{x + \xi_2(x), x + \xi_3(x)\}$ функцията $f(z)$ няма корени.

За да пресметнем някоя нула $a = a_s$ на $f(z)$, излизаме от произволно начално приближение x_0 от интервала (a_s, a_{s+1}) и построяваме редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, където $x_{n+1} = x_n + \xi_2(x_n)$. От теорема 1 и неравенствата (5) следва, че тази редица е монотонно намаляваща и ограничена отдолу, т. е. $x_{n+1} < x_n$ и $x_n > a_s$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Следователно тази редица е сходяща и очевидно клони към a_s . Скоростта на сходимост се оценява от равенството ($f(a) = 0$)

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - a}{(x_{n-1} - a)^3} = H(a),$$

където

$$(7) \quad H(a) = \frac{\sigma a - 2}{8(\sigma a - 1)} \left\{ \frac{f''(a)}{f'(a)} \right\}^2 - \frac{3f''(a) + 2af'''(a)}{12af'(a)}$$

От (6) се вижда, че предложеният метод по отношение скоростта на сходимост е от трети порядък. Както е известно, същият порядък на сходимост притежава и цитираният метод на Лагер за решаване на алгебрични уравнения [3].

За да установим равенството (6), да развием $f(x)$ по степените на $\xi = x - a$. Ще имаме

$$f(x) = a + \beta\xi + \gamma\xi^2 + \delta\xi^3 + \dots,$$

където $a = f(a) = 0$, $\beta = f'(a)$, $\gamma = \frac{f''(a)}{2}$ и $\delta = \frac{f'''(a)}{6}$. Нека освен това

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\xi} (1 + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + \dots).$$

Тогава

$$\left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}' = -\frac{1}{\xi^2} + C + 2D\xi + \dots$$

Полагаме $a' = x + \xi_2(x)$, $h = a' - a$, $\frac{h}{\xi^2} = H$ и получаваме, че

$$\frac{1}{x - a'} = \frac{1}{\xi - h} = \frac{1}{\xi(1 - H\xi^2)}.$$

Като имаме пред вид обаче, че равенството $F(a' - x; x) = 0$ може да се запише във вида

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x - a'} \right)^2 = - \left(\sigma - \frac{1}{a'} \right) \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + x \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} + \frac{a'}{(x - a')^2} \right),$$

намираме, че

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} \left\{ (1 + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + \dots) - \frac{1}{1 - H\xi^2} \right\}^2 = & - \left(\sigma - \frac{1}{a + H\xi^2} \right) \left\{ \frac{1}{\xi} + B + C\xi + D\xi^2 + \dots \right. \\ & \left. + (\xi + a) \left(-\frac{1}{\xi^2} + C + 2D\xi + \dots \right) + \frac{a + h}{\xi^2(1 - H\xi^2)^2} \right\}. \end{aligned}$$

След известни преобразования получаваме

$$\begin{aligned} (8) \quad & \{B + (C - H)\xi + \dots\}^2 \\ & = - \left(\sigma - \frac{3}{a + H\xi^2} \right) \{B + aC + 2aH + (2C + 2aD + H)\xi + \dots\}. \end{aligned}$$

Последното уравнение определя H като алгебрична функция на ξ и за ограничения в околността на точката $\xi = 0$ клон $H(\xi; a)$ на тази функция да положим $\lim_{\xi \rightarrow 0} H(\xi; a) = H(a)$. Но тогава от (8) при $\xi \rightarrow 0$ получаваме, че

$$B^2 = - \left(\sigma - \frac{1}{a} \right) \{B + aC + 2aH(a)\},$$

откъдето, като имаме пред вид, че $B = \frac{\gamma}{\beta}$ и $C = \frac{2\beta\delta - \gamma^2}{\beta^2}$, намираме окончателно

$$H(a) = - \frac{B^2 + \left(\sigma - \frac{1}{a}\right)(B + aC)}{2a\left(\sigma - \frac{1}{a}\right)} = - \frac{\gamma^2 + \left(\sigma - \frac{1}{a}\right)[\gamma\beta + (2\beta\delta - \gamma^2)a]}{2\beta^2(\sigma a - 1)}$$

$$= \frac{\sigma a - 2}{8(\sigma a - 1)} \left\{ \frac{f''(a)}{f'(a)} \right\}^2 - \frac{3f''(a) + 2af'''(a)}{12af'(a)}$$

По същия начин, ако излезем от произволно начално приближение y_0 от интервала (a_s, a_{s+1}) и построим редицата $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, където $y_{n+1} = y_n + \xi_3(y_n)$, ще получим монотонно растяща редица, която ще клони към корена $a = a_{s+1}$ и за която също ще бъде в сила равенството (6), като заместим x_n с y_n .

За цели функции от вида

$$\varphi(z) = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right) e^{\frac{z}{b_n}}$$

с реални и прости нули, за които

$$s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{b_n^2} < +\infty,$$

по аналогичен начин се установява следната

Теорема 2. Ако $\varphi(b) = 0$, то $\Phi(b-x; x) \leq 0$, където

$$\Phi(\xi; x) = \{(x+\xi)\xi f'(x) + x f(x)\}^2 + x^2 \{s(x+\xi)^2 - 1\} \{[f''(x)f(x) - f'^2(x)]\xi^2 + f^2(x)\}$$

и за всяко реално x полиномът $\Phi(\xi; x)$ има само реални корени.

Въз основа на тази теорема може да се построи итерационен процес за пресмятането на корените на $\varphi(z)$, който по отношение скоростта на сходимост е също от трети порядък.

Предложеният в настоящото изложение метод за пресмятане корените на цели функции от лагеров тип беше изпробван за намирането на някои от корените на функцията

$$f(x) = J_0(\sqrt{x}) = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{x_r^2}\right),$$

където $\{x_r\}_{r=1}^{\infty}$ са нулите на функцията на Бесел $J_0(x)$. Част от получените резултати са дадени в следващите таблици. За сравнение са дадени и съответните стойности на x_r , заимствувани от книгата на A. Gray, G. B. Mathews, *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică*, Editura Tehnică, București, 1958. Пресмятанията бяха извършени на електронната сметачна машина „МИНСК-2“ в Изчислителния център на Математическия институт на БАН.

$x_0=y_0=8$	
$x_1=5,784250$ $x_2=5,783186$	$y_1=17,80045$ $y_2=27,87888$ $y_3=30,44673$ $y_4=30,47126$
$\sqrt{x_2}=2,404826$	$\sqrt{y_4}=5,520078$
$\kappa_1=2,4048255577$	$\kappa_2=5,5200781103$

$x_0=y_0=25$	
$x_1=18,81534$ $x_2=9,794793$ $x_3=5,792488$ $x_4=5,783186$	$y_1=30,24250$ $y_2=30,47124$ $y_3=30,47126$
$\sqrt{x_4}=2,404826$	$\sqrt{y_3}=5,520078$
$\kappa_1=2,4048255577$	$\kappa_2=5,5200781103$

$x_0=y_0=100$	
$x_1=81,86098$ $x_2=75,07265$ $x_3=74,88700$	$y_1=122,3018$ $y_2=137,6592$ $y_3=139,0394$ $y_4=139,0402$
$\sqrt{x_3}=8,653728$	$\sqrt{y_4}=11,79153$
$\kappa_3=8,6537279129$	$\kappa_4=11,7915344391$

$x_0=y_0=200$	
$x_1=180,6527$ $x_2=155,4838$ $x_3=140,3142$ $x_4=136,0409$ $x_5=139,0402$	$y_1=220,7276$ $y_2=222,9302$ $y_3=222,9323$
$\sqrt{x_5}=11,79153$	$\sqrt{y_3}=14,93092$
$\kappa_4=11,7915344391$	$\kappa_5=14,9309177086$

$x_0=y_0=400$	
$x_1=364,2023$ $x_2=332,8293$ $x_3=328,5942$ $x_4=326,5633$	$y_1=438,9708$ $y_2=449,8116$ $y_3=449,9335$
$\sqrt{x_4}=18,07106$	$\sqrt{y_3}=21,21164$
$\kappa_6=18,0710639679$	$\kappa_7=21,2116366299$

$x_0=y_0=1600$	
$x_1=1595,315$ $x_2=1585,981$ $x_3=1567,579$ $x_4=1532,431$ $x_5=1471,912$ $x_6=1897,508$ $x_7=1364,127$ $x_8=1362,870$	$y_1=1604,674$ $y_2=1604,677$
$\sqrt{x_8}=36,91709$	$\sqrt{y_2}=40,05842$
$\kappa_{12}=36,9170983537$	$\kappa_{13}=40,0584257646$

1. Laguerre, E. Oeuvres, t. I, Paris, 1898, 87—103.
2. Hermite, Ch. Oeuvres, 461—468.
3. Van der Corput, J. G. Indagatione Mathematicae, 8 (1946), 158—188.
4. Obrechhoff, N. Archiv der Mathematik, 5 (1954), 506—509.

Поступила на 26. IV. 1966 г.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА ЛАГЕРРА

К. Дочев, П. Бырнев, П. Русев

Резюме

В работе дается метод вычисления нулей целых функций вида (1) ($0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$). Показано, что уравнение (4) для каждого $x > a_1$ и $f(x) \neq 0$ имеет три вещественных нуля $\xi_1(x) < \xi_2(x) < \xi_3(x)$; при этом в силе неравенства $-x < \xi_1(x) < a_s - x < \xi_2(x) < 0 < \xi_3(x)$, где $s = \max_{a_j < x} j$. Если $x_0 \in (a_s, a_{s+1})$ и $x_{n+1} = x_n + \xi_2(x_n)$, последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — убывающая, $\lim x_n = a_s$ и в силе (6) для $a = a_s$. Если $x_{n+1} = x_n + \xi_3(x_n)$, последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая, $\lim x_n = a_{s+1}$ и в силе (6) для $a = a_{s+1}$.

A METHOD FOR COMPUTING THE ROOTS OF ENTIRE FUNCTIONS OF LAGUERRE'S TYPE

Kiril Dočev, Petâr Bârnev and Petâr Rusev

Summary

In the paper a method for computing the roots of entire functions of the kind (1) ($0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$) is given. For every real $x > a_1$ such that $f(x) \neq 0$, it is proved in the paper, that the equation (4) has three real roots $\xi_1(x) < \xi_2(x) < \xi_3(x)$ such that $-x < \xi_1(x) < a_s - x < \xi_2(x) < 0 < \xi_3(x)$ where $s = \sup_{a_j < x} j$. If $x_0 \in (a_s, a_{s+1})$ and $x_{n+1} = x_n + \xi_2(x_n)$, the sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ is decreasing, $\lim x_n = a_s$ and (6) holds $a = a_s$. If $x_{n+1} = x_n + \xi_3(x_n)$, the sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ is increasing, $\lim x_n = a_{s+1}$ and (6) holds $a = a_{s+1}$.