БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) X

ВЪРХУ НЯКОИ КЛАСИ ЦЕЛИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВЕДЕНИТЕ ОТ ТЯХ ПОЛИНОМИ

Любомир Илиев

1. Да означим с T_1, съответно T_2, множеството на целите рационални и трансцендентни функции, които са полиноми със само реални неположителни нули, съответно със само реални нули, или във всяка крайна област са граница на такива полиноми. Очевидно $T_1 \in T_2$.

С помощта на редици от I и II вид на Поя и Шур [1] може да се установи, че [2]:

Ако $f_k(z) \in T_2$, $k=1, 2, \ldots, s$, и

$$(1)\qquad F(z)=\prod_{k=1}^{s} f_k(x_k z)=\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)\frac{z^n}{n!},$$

то за всички реални значения на $x_1, x_2, \ldots, x_s$ са изпълнени неравенствата на Туран

$$(2)\qquad R_n^2(x_1, x_2, \ldots, x_s)-R_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_s)R_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_s)\geq 0,$$

$$n=1, 2, \ldots$$

Ако $f_k(z) \in T_1$, $k=1, 2, \ldots, s$, за произволни значения на $x_1, x_2, \ldots, x_s$ с еднакъв знак са изпълнени неравенствата (2) и други неравенства, като например

$$(3)\qquad \begin{aligned} &R_n^2(x_1, x_2, \ldots, x_s)-R_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_s)R_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_s)\geq 0, \quad n=2, 3, \ldots \\ &\left[\frac{R_{n-3}(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{R_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)}\right]^2-\left[\frac{R_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_s)}{R_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)}\right]^3\leq 0, \quad n=3, 4, \ldots \end{aligned}$$

За $s=2$ в [5] и [6] беше получено елементарното изграждане на теорията на някои класи специални функции. Така ако $f_1(z) \in T_1$, $f_2(z) \in T_2$ и

$$F(z)=f_1(x_1 z)f_2(x_2 z)=\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x_1, x_2)\frac{z^n}{n!},$$

то полиномите $R_n(x, 1)$, $R_n(1, x)$ и $R_n(1-x, 1+x)$ имат само реални нули; същото свойство имат полиномите $R_n(x, \sqrt{1-x^2})$, ако $f_2(z)=f_2(-z)$, и полиномите $R_n(x, \sqrt{1-x^2})/\sqrt{1-x^2}$, ако $f_2(z)=-f_2(-z)$. За една подкласа на

$f_2(z)$ е дадено интегралното представяне на $R_n(x_1, x_2)$. В случая $f_1(z)=e^z$ са намерени ортогоналните системи от полиноми между системите

$$\{R_n(x, 1)\}, \quad \{R_n(1, x)\}, \quad \{R_n(x, \sqrt{1-x^2})\}, \quad f_2(z)=f_2(-z)$$

$$\{R_n(x, \sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}\}, \quad \text{ако} \quad f_2(z)=-f_2(-z).$$

В настоящата работа ще бъдат решени някои от тези въпроси за една друга класа от цели функции и произведените от тях полиноми.

§ 1

Нека A_1^φ означава (изпъкналата и едносвързана) затворена област от пълната комплексна равнина, заградена от два лъча, които излизат от началото, сключват ъгъл 2φ и имат съответно амплитуди $\pi-\varphi$ и $-\pi+\varphi$, $0<\varphi<\pi/2$.

Аналогично нека A_2^φ означава затворената област от пълната комплексна равнина, което се състои от точките на A_1^φ и от точките $-z$, за които $z \in A_1^\varphi$.

Ще въведем следните дефиниции:

Д$_1$. Една цяла рационална или трансцендентна функция принадлежи на класата T_1^φ, ако е полином, нулите на който лежат в A_1^φ, или е граница във всяка крайна област на такива полиноми.

Д$_2$. Една цяла рационална или трансцендентна функция принадлежи на класата T_2^φ, ако е полином, нулите на който лежат в A_2^φ, или е граница във всяка крайна област на такива полиноми.

Очевидно $T_1^0=T_1$, $T_2^0=T_2$, $T_1^\varphi \subset T_2^\varphi$.

Тук ще бъдат изследвани само свойствата на функциите от класата T_1^φ.

Нека функцията $P(z) \in T_1^\varphi$ и числото $\gamma_1 \in A_1^\varphi$, $\gamma_1 \neq 0$. Тогава $P(z)e^{-\gamma_1 z} \in T_1^\varphi$.

Тъй като A_1^φ е изпъкнала област, съгласно теоремата на Гаус и теоремата на Хурвиц нулите на функцията

$$\frac{d}{dz} P(z)\, e^{-\gamma_1 z} = [P'(z)-\gamma_1 P(z)]\, e^{-\gamma_1 z}, \tag{1,1}$$

т. е. на

$$P(z)-\frac{1}{\gamma_1} P'(z) \tag{1,1'}$$

ще лежат пак в A_1^φ

Като итерираме тоя процес за редицата от числа $\gamma_k \neq 0$, $\gamma_k \in A_1^\varphi$, $k=2, 3, \ldots$, получаваме, че нулите на функциите

$$P(z)-\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)P'(z)+\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2} P''(z)$$

$$P(z)-\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_3}\right)P'(z)+\left(\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_1\gamma_3}+\frac{1}{\gamma_2\gamma_3}\right)P''(z)-\frac{1}{\gamma_1}\frac{1}{\gamma_2}\frac{1}{\gamma_3} P'''(z) \tag{1,2}$$

лежат в A_1^φ.

Ако положим $\gamma'_k = \frac{1}{\gamma_k} = \frac{\bar{\gamma}_k}{|\gamma_k|^2}$, $k=1, 2, \ldots$, виждаме, че $\gamma'_k \in A_1^\varphi$, $k=1, 2, \ldots$

Тъй като числата $\gamma_k \in A_1^\varphi$, а следователно и $\gamma'_k \in A_1^\varphi$, избираме произволно, след елементарен граничен преход получаваме следната теорема:

S_1. Ако функцията $f(z) \in T_1^\varphi$,

$$(1,3) \qquad f(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} z + \frac{\beta_2}{2!} z^2 + \cdots$$

и функцията $P(z) \in T_1^\varphi$, то и функцията

$$(1,4) \qquad f(D)P(z) = \beta_0 P(z) + \frac{\beta_1}{1!} P'(z) + \frac{\beta_2}{2!} P''(z) + \cdots$$

принадлежи на T_1^φ.

Нека функцията $f(z)$ от (1,3) принадлежи на класата T_1^φ. Понеже $z^n \in A_1^\varphi$ за всяко цяло положително n, то съгласно S_1 полиномите на Йензен на функцията $f(z)$:

$$(1,5) \qquad f_n(z) = f(D)z^n = \beta_0 z^n + \binom{n}{1}\beta_1 z^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2 z^{n-2} + \cdots, \quad n=1, 2, \ldots$$

принадлежат на класата T_1^φ. Така от S_1 получаваме следствието

C_1. Йензеновите полиноми на функциите $f(z) \in T_1^\varphi$ принадлежат на класата T_1^φ.

Класата $T_1^0 = T_1$ означава съвкупността на целите рационални или трансцендентни функции, които са полиноми със само реални, неположителни нули или са граница на такива полиноми.

Ако $f_1(z) \in T_1$,

$$(1,6) \qquad f_1(z) = a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \cdots$$

и $f(z) \in T_1^\varphi$ е функцията от (1,3), да положим

$$(1,7) \qquad F(z) = f_1(x_1 z) f(x_2 z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x_1, x_2) \frac{z^n}{n!},$$

гдето

$$(1,8) \qquad P_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} \beta_k x_1^{n-k} x_2^k, \quad n=1, 2, \ldots$$

Според C_1 понеже $f(z) \in T_1^\varphi$, полиномите

$$(1,9) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k x^{n-k}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

които са йензеновите полиноми на функцията $f(z)$, имат нулите си в A_1^φ. Понеже $f_1(z) \in T_1$, нулите на полиномите $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^k$ са реални и отрицателни.

Но в такъв случай съгласно едно следствие от теоремата на Грейс, установено от Сегьо [1], получаваме следната теорема:

S$_2$. А к о $f(z)\in T_1^\varphi$, $f_1(z)\in T_1$, н у л и т е н а п о л и н о м и т е

$$(1,10)\qquad P_n(x,\,1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}\beta_k x^{n-k},\quad n=1,\,2,$$

л е ж а т в A_1^φ.

Като вземем пред вид, че трансформацията $z'=\frac{az+b}{cz+d}$, където a, b, c, d са реални числа, за които $ab-bc>0$, трансформира еднозначно и обратимо равнината $I(z)>0$ в себе си, от S$_2$ получаваме следното следствие:

C$_2$. А к о $f(z)\in T_1^{\frac{\pi}{2}}$ и $f_1(z)\in T_1$, т о н у л и т е н а

$$(1,11)\quad P_n(aix+b,\,cix+d)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}\beta_k(aix+b)^{n-k}(cix+d)^k,\quad n=1,\,2,\,.$$

к ъ д е т о a, b, c, d с а р е а л н и ч и с л а и $ad-bc>0$, л е ж а т в $A_1^{\frac{\pi}{2}}$

Ако $E_n(z)$, $n=1,\,2,\,.$, са Йензеновите полиноми на функцията $f_1(z)\in T_1$ от (1,6), да положим

$$(1,12)\qquad E_n(x_1,\,x_2)=x_1^nE_n\left(\frac{x_2}{x_1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_k x_1^k x_2^{n-k},\quad k=1,\,2,\,.$$

Нека P_1^φ означава съвкупността на функциите $f(z)\in T_1^\varphi$ с реални коефициенти, които се представят във вида

$$(1,13)\qquad f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{tz}dt,\quad \beta_k=\int_{-\infty}^{\infty}t^k\varphi(t)dt.$$

Получаваме

S$_3$. А к о $f(z)\in P^\varphi$, т о

$$(1,14)\qquad P_n(x_1,\,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)E_n(x_1,\,tx_2)dt,\quad n=1,\,2,\,\ldots$$

§ 2

2. Ще дадем Йензенова характеристика на функциите от класата T_1^φ, като докажем следната теорема:

S$_4$. Н е о б х о д и м о и д о с т а т ъ ч н о у с л о в и е ф у н к ц и я т а

$$(2,1)\qquad f(z)=\beta_0+\frac{\beta_1}{1!}z+\frac{\beta_2}{2!}z^2+\cdots$$

д а п р и н а д л е ж и н а к л а с а т а T_1^φ е Й е н з е н о в и т е ѝ п о л и н о м и

$$(2,2)\qquad f_n(z)=f(D)z^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_k z^{n-k},\quad n=1,\,2,\,.$$

д а п р и н а д л е ж а т н а к л а с а т а T_1^φ

Доказателство. Нека $f(z) \in T_1^\varphi$. Съгласно C_1, $f_n(z) \in T_1^\varphi$, с което необходимостта е установена.

Обратно, нека $f_n(z) = f(D)z^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k z^{n-k} \in T_1^\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots$

Ако положим

$$i^k \beta_k = \beta'_k + i\beta''_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad f(iz) = f_1(z) + if_2(z),$$

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta'_k}{k!} z^k, \quad f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta''_k}{k!} z^k, \quad i^n f_n\left(\frac{z}{i}\right) = f_{n1}(z) + if_{n2}(z),$$

$$f_{n1}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta'_k z^{n-k}, \quad f_{n2}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta''_k z^{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то както е известно, полиномите $f_{n1}(z)$ и $f_{n2}(z)$ имат само реални взаимноразделящи се нули. Тъй като полиномите $f_{n1}(z)$ и $f_{n2}(z)$ са Йензеновите полиноми съответно на функциите $f_1(z)$ и $f_2(z)$ и се оказва, че те имат само реални нули, то съгласно известни теореми [3] следва, че във всяка крайна област имаме равномерно

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \left(\frac{z}{n}\right) f_{n1}\left(\frac{n}{z}\right) = f_1(z), \\ (2,3) \qquad &\lim_{n \to \infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n f_{n2}\left(\frac{n}{z}\right) = f_2(z), \end{aligned}$$

гдето $f_1(z)$ и $f_2(z)$ са цели рационални или трансцендентни функции, които са полиноми със само реални нули или граница на такива полиноми. Но тогава във всяка крайна област

$$(2,4) \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{iz}{n}\right)^n f_n\left(\frac{n}{iz}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n f_{n1}\left(\frac{n}{z}\right) + i \lim_{n \to \infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n f_{n2}\left(\frac{n}{z}\right) = f_1(z) + if_2(z) = f(iz).$$

Следователно $f(z)$ е цяла рационална или трансцендентна функция, която е граница на полиноми, нулите на които лежат в A_1^φ, тъй като ако нулите на $f_n(z)$ лежат в A_1^φ, и нулите на $\left(\frac{z}{n}\right)^n f_n\left(\frac{n}{z}\right)$ лежат в A_1^φ. Теоремата е установена.

3. Получените резултати ще представим в друг вид, като въведем следната дефиниция:

D₃. Една безкрайна редица от комплексни числа

$$(2,5) \qquad \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

ще наричаме една редица от вид I^φ, ако има следното свойство: за всяко уравнение

$$(2,6) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

което има само реални неположителни нули, композираното уравнение

$$(2,7) \qquad a_0\gamma_0+a_1\gamma_1 x+a_2\gamma_2 x^2 \qquad +a_n\gamma_n x^n=0$$

има нулите си в A_1^φ

Ще дадем алгебричен и трансцендентен критерий една редица (2,5) да бъде от вид I^φ.

S_5 (алгебричен критерий). Необходимо и достатъчно условие редицата (2,5) да бъде от вид I^φ е нулите на всеки полином

$$(2,8) \qquad \gamma_0+\binom{n}{1}\gamma_1 x+\cdots+\binom{n}{n}\gamma_n x^n, \quad n=1, 2, \ldots,$$

да лежат в A_1^φ

Доказателство. Тъй като полиномите $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, $n=1,2,\ldots$ имат само реални отрицателни нули, ако редицата (2,5) е от вида I^φ, полиномите (2,8) трябва да имат нулите си в A_1^φ. Необходимостта на условията е установена.

Обратно, нека нулите на всеки полином (2,8) да лежат в A_1^φ и

$$(2,9) \qquad a_0+\binom{n}{1}a_1 x+\binom{n}{2}a_2 x^2+\cdots+a_n x^n$$

да е произволен полином със само реални неположителни нули. Съгласно цитираната теорема на Сегьо, следствие от теоремата на Грайс, нулите на полинома

$$(2,10) \qquad a_0\gamma_0+\binom{n}{1}a_1\gamma_1 x+\binom{n}{2}a_2\gamma_2 x^2+\cdots+\binom{n}{n}a_n\gamma_n x^n$$

ще лежат в A_1^φ. Теоремата е установена.

S_6 (трансцендентен критерий). Необходимо и достатъчно условие редицата (2,5) да бъде от вид I^φ е функцията

$$(2,13) \qquad f(z)=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{1!}z+\frac{\gamma_2}{2!}z^2+\cdots$$

да принадлежи на T_1^φ.

Доказателство. Ако функцията $f(z)\in T_1^\varphi$, то според S_4 Йензеновите ѝ полиноми $\sum_{k=0}^{n}\gamma_n\binom{n}{k}x^{n-k}$ принадлежат на T_1^φ и следователно по S_5 редицата (2,5) е от вид I^φ.

Обратно, ако редицата (2,5) е от тип I^φ, то Йензеновите полиноми на (2,11) принадлежат на T_1^φ и следователно по S_4 функцията (2,11) принадлежи на T_1^φ. Теоремата е установена.

Виждаме впрочем, че теоремите S_4, S_5 и S_6 са еквивалентни.

§ 3

4. Критериите от § 2 са установени най-напред от Обрешков [4]. Те могат да се приложат, за да се получат резултати, аналогични на цитираните в т. 1.

Нека редицата (2,5) е реална и от вида I^{φ}. Тъй като корените на уравнението

$$x^2+2x+1=0 \tag{3,1}$$

лежат в A^0, то нулите на уравнението

$$\gamma_{n-1}x^2+2\gamma_n x+\gamma_{n+1}=0 \tag{3,2}$$

ще лежат в A^{φ}, т. е. ще бъде валидно неравенството

$$(\mathrm{I}^{\varphi})\ \gamma_n^2-\gamma_{n-1}\gamma_{n+1}\cos^2\varphi\geqq 0.$$

Така получаваме следното свойство:

E. Ако редицата $\{\gamma_n\}$ е реална и от вида (I^{φ}), членовете ѝ удовлетворяват неравенствата (I^{φ}).

Нека $f_k(z)\in T_1^{\varphi}$, $k=1, 2, \ldots, s$. Тогава очевидно за всички неотрицателни числа $x_1, x_2, \ldots, x_s$ имаме

$$Q^{\varphi}(z)=\prod_{k=1}^{s} f_k(x_k+z)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{\varphi}(x_1, \ldots, x_s)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{\varphi}\frac{z^n}{n!}\in T_1^{\varphi},$$

$$R^{\varphi}(z)=\prod_{k=1}^{s} f_k(x_k z)=\sum_{n=0}^{\infty} R_n^{\varphi}(x_1, \ldots, x_s)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} R_n^{\varphi}\frac{z^n}{n!}\in T_2^{\varphi}, \tag{3,4}$$

$$S^{\varphi}(z)=\prod_{k=1}^{p} f_k(x_n z)\prod_{k=p+1}^{s} f_k(x_k+z)=\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\varphi}(x_1, \ldots, x_s)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{\varphi}\frac{z^n}{n!}\in T_1^{\varphi}$$

От (3,4), като вземем пред вид E и S_6, получаваме

S_7. Ако функциите $f_k(z)\in T_1^{\varphi}$, $k=1, 2, \ldots, s$, приемат реални стойности върху реалната ос, то за всички неотрицателни стойности на $x_1, x_2, \ldots, x_s$ са изпълнени неравенствата

$$\begin{aligned}
&[Q_n^{\varphi}]^2-Q_{n-1}^{\varphi}\,.\,Q_{n+1}^{\varphi}\cos^2\varphi\geqq 0, \quad n=1, 2, \ldots,\\
&[R_n^{\varphi}]^2-R_{n-1}^{\varphi}\,.\,R_{n+1}^{\varphi}\cos^2\varphi\geqq 0, \quad n=1, 2, \ldots,\\
&[S_n^{\varphi}]^2-S_{n-1}^{\varphi}\,.\,S_{n+1}^{\varphi}\cos^2\varphi\geqq 0, \quad n=1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{4,4}$$

В случая $s=2$ за полиномите R_n^{φ} и S_n^{φ} получаваме резултати, аналогични на резултатите, получени в предишните работи [5], [6] за $R_n(x_1, x_2)$ и $S_n(x_1, x_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polya, G., I. Schur. J. r. a. Math., **144** (1914), 89—113.
2. Iliev, L. Turanische Ungleichungen. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **17** (1964), № 8, 693—696.
3. Обрешков, Н. Нули на полиномите. София, БАН, 1963.
4. Обрешков, Н. Сборник от задачи и теореми по висша алгебра. София, 1932.

5. I l i e v, L. Integraldarstellung einer Klasse von Polynomenfolgen. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **18** (1965), No. 1, 7—9.
6. I l i e v, L. Über einige Klassen von ganzen Funktionen. Compt. rend. Acad. bulg Sci. **19** (1966), No. 7, 575—577.

Постъпила на 25. XII. 1967 г.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ НИХ ПОЛИНОМАХ

Любомир Илиев

Резюме

Обозначим через T_1 множество, составленное из полиномов с только неположительными вещественными нулями и из целых трансцендентных функций, которые в каждой ограниченной области являются пределами таких полиномов. Множество T_2 определено подобным образом, заменяя слова „неположительными вещественными" словом „вещественными".

В [2] было показано, что полиномы $R_n(x_1, \ldots, x_n)$, определенные (1), удовлетворяют неравенствам Турана для всех вещественных значений $x_1, \ldots, x_n$.

В [5] и [6] были изучены свойства полиномов $R_n(x_1, x_2)$.

Обозначим через T_1^{φ} множество полиномов, нули которых лежат в области $-\pi+\varphi \leq \arg z \leq \pi-\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, и целых трансцендентных функций, которые являются пределами таких полиномов.

В работе показано, что функции $Q_n^{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$, $R_n^{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$, $S_n^{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$, определенные (3,4), удовлетворяют неравенствам (4,4) при условии, что $f_k(z) \in T_1^{\varphi}$, $k=1, 2, \ldots, s$ — функции, которые на вещественной оси принимают вещественные значения.

ON CERTAIN CLASSES OF ENTIRE FUNCTIONS AND THE POLYNOMIALS DERIVED FROM THEM

Lyubomir Iliev

Summary

Let us denote by T_1 (T_2) the set consisting of the polynomials with only real non-positives (real) zeroes and of the transcendental functions which in each finite region are limits of such polynomials.

It was proved in [2] that the polynomials $R_n(x_1, \ldots, x_n)$ defined by (1) satisfy Touran's inequalities for all real values of $x_1, \ldots, x_n$.

The properties of the polynomials $R_n(x_1, x_2)$ were studied in [5] and [6].

Let us denote by T_1^φ the set of the polynomials whose zeroes lie in the region $-\pi+\varphi \leqq \arg z \leqq \pi-\varphi$, $0 \leqq \varphi < \pi/2$, and of the entire transcendental functions which are limits of such polynomials.

It is shown in the paper that the functions $Q_n^\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $R_n^\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $S_n^\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ defined by (3,4) satisfy the inequalities (4,4) provided $f_k(z) \in T_1^\varphi$, $k=1, 2, \ldots, s$ are functions which assume real values on the real axis.