

ВЪРХУ ТЕОРИЯТА НА КОМПЛЕКСИТЕ ОТ ПРАВИ В ЕЛИПТИЧНОТО И ХИПЕРБОЛИЧНОТО ПРОСТРАНСТВО

Алипи Матеев

§ 1. УВОД

В монографията си [2] Кованцов прилага проективната теория на комплекса между другото и за комплекс от прави в елиптичното и хиперболичното пространство, като е намерен каноничен тетраедър на комплекса с метода на външните форми на Картан. Както е известно, с този метод изобщо се доказва съществуването на каноничен репер, но ефективно намиране на параметрите, определящи каноничния репер, не се дава.

В тази работа използваме диференциалната геометрия на векторно поле в елиптично и хиперболично пространство [1] за изследване на някои диференциалногеометрични свойства на комплекс от прави във всяко едно от тези пространства. Намираме формули, които определят ефективно каноничния тетраедър на комплекс. Разгледани са векторни полета, свързани по инвариантен начин с комплекса от прави, и са направени някои приложения.

Нека P_3 е реалното триизмеримо проективно пространство. Геометрията, чиято основна група е подгрупата в P_3 , оставаща неизменна повърхнината от втора степен с уравнение относно подходяща проективна координатна система

$$(1) \quad (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 \pm (x^3)^2 = 0,$$

е елиптичната, респективно хиперболичната геометрия, според това, дали в четвъртия член на лявата страна на това уравнение се взема знакът „+“ или знакът „—“. Елиптичното пространство ще означаваме с E_3 , а хиперболичното — с H_3 .

Една точка от $M_0(x_0^i)$, $i=0, 1, 2, 3$, от E_3 е нормирана, ако е изпълнено

$$(x_0^0)^2 + (x_0^1)^2 + (x_0^2)^2 + (x_0^3)^2 = 1.$$

Ако точката е от H_3 , тя е нормирана при

$$(x_0^0)^2 + (x_0^1)^2 + (x_0^2)^2 - (x_0^3)^2 = -1.$$

Скаларното произведение на нормираните точки $M_1(x_1^i)$, $M_2(x_2^i)$ в E_3 или H_3 се дава съответно с израза

$$(2) \quad M_1 M_2 = x_1^0 x_2^0 + x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 \pm x_1^3 x_2^3,$$

в който знакът „+“ се отнася за E_3 , знакът „−“ за H_3 .

Необходимото и достатъчно условие точките M_1, M_2 да са ортогонални се дава с равенството

$$(3) \quad x_1^0 x_2^0 + x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 \pm x_1^3 x_2^3 = 0.$$

Ще казваме, че в пространството E_3 или H_3 е дефинирано векторно поле, ако на всяка нормирана точка $I_0(u, v, w)$ от E_3 , съответно от H_3 , отговаря еднозначно нормирана точка $I_3(u, v, w)$, ортогонална на точката I_0 .

Нека е дадено едно векторно поле в E_3 или в H_3 . Да допълним точките I_0, I_3 с още две точки I_1, I_2 такива, че тетраедърът $\{I_0 I_1 I_2 I_3\}$ да е автополярен относно разглеждания абсолютен, т. е.

$$\text{в } E_3: I_0^2 = I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = 1, \quad \sum I_i I_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3;$$

$$\text{в } H_3: I_0^2 = -1, \quad I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = 1, \quad \sum I_i I_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

За двете пространства е изпълнено

$$(I_0 I_1 I_2 I_3) = 1.$$

Ако преминем от точката $I_0(u, v, w)$ към една безкрайно близка точка, ще получим основните формули

$$(4) \quad \begin{aligned} dI_0 &= \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 + \omega^3 I_3, \\ dI_1 &= -\eta \omega^1 I_0 + \omega_1^2 I_2 + \omega_1^3 I_3, \\ dI_2 &= -\eta \omega^2 I_0 + \omega_2^1 I_1 + \omega_2^3 I_3, \\ dI_3 &= -\eta \omega^3 I_0 + \omega_3^1 I_1 + \omega_3^2 I_2. \end{aligned}$$

При това

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{в } E_3, \\ -1 & \text{в } H_3. \end{cases}$$

Въвеждаме означенията

$$\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3 = q, \quad \omega_1^2 = -\omega_2^1 = r.$$

Тези линейни диференциални форми удовлетворяват следните структурни уравнения:

$$(5) \quad \begin{aligned} D\omega^1 &= r \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge q, & Dp &= r \wedge q + \eta \omega^3 \wedge \omega^2, \\ D\omega^2 &= p \wedge \omega^3 + \omega^1 \wedge r, & Dq &= p \wedge r + \eta \omega^1 \wedge \omega^3, \\ D\omega^3 &= q \wedge \omega^1 + \omega^2 \wedge p, & Dr &= q \wedge p + \eta \omega^2 \wedge \omega^1, \end{aligned}$$

Предполагаме, че

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0,$$

и следователно можем да пишем

$$(6) \quad p = p_i \omega^i, \quad q = q_i \omega^i, \quad r = r_i \omega^i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Да въведем двете основни квадратни форми

$$(7) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= (dI_0)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2, \\ \Phi_2 &= -dI_0 dI_3 = p\omega^2 - q\omega^1. \end{aligned}$$

Нормална кривина на векторното поле (I_0, I_3) в дадено направление дефинираме чрез равенството

$$(8) \quad \frac{1}{R} = \frac{p\omega^2 - q\omega^1}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}$$

Като изразим p и q чрез $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ и потърсим екстремалните стойности на R , ще получим три линейни уравнения относно $\omega^1, \omega^2, \omega^3$. Елиминирането на трите последни линейни форми води до кубично уравнение относно R , което съвпада с аналогичното кубично уравнение за евклидовото пространство [2], именно

$$[p_3^2 q_1 + p_2 q_3^2 + p_3 q_3 (p_1 - q_2)] R^3 + [p_3^2 + q_3^2 - (p_1 - q_2)^2 + 4p_2 q_1] R^2 + 4(p_2 - q_1) R - 4 = 0.$$

Ако с R_1, R_2, R_3 означим корените на това кубично уравнение, то трите инварианти относно трансформациите на основните групи съответно за пространствата E_3 и H_3

$$(9) \quad K - \eta = \frac{1}{R_1 R_2 R_3}, P = \sum \frac{1}{R_1 R_2}, H = \sum \frac{1}{R_1}$$

ще наричаме относителна пълна кривина, смесена кривина и средна кривина на векторното поле (I_0, I_3) . K ще наричаме абсолютна пълна кривина на векторното поле.

Под геодезична торзия τ на векторното поле (I_0, I_3) в дадено направление в E_3 и H_3 по дефиниция ще разбираме израза

$$(10) \quad \tau = \frac{(I_0 dI_3 - I_3 dI_0)}{(dI_0)^2} = \frac{p\omega^1 + q\omega^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}.$$

Екстремалните стойности на τ се получават от кубичното уравнение

$$\tau^3 - (p_1 + q_2)\tau^2 + \frac{1}{4}[4p_1 q_2 - p_3^2 - q_3^2 - (p_2 + q_1)^2]\tau + \frac{1}{4}[p_1 q_3^2 + p_3^2 q_2 - p_3 q_3 (p_2 + q_1)] = 0.$$

Ако с τ_1, τ_2, τ_3 означим корените на това кубично уравнение, то изразите

$$(11) \quad T = \tau_1 \tau_2 \tau_3, M = \sum \tau_1 \tau_2, S = \sum \tau_1$$

ще наричаме пълна, смесена и средна геодезична торзия на векторното поле.

§ 2. ВЕКТОРНО ПОЛЕ, ПРИСЪЕДИНЕНО КЪМ ДАДЕН КОМПЛЕКС ОТ ПРАВИ В E_3 ИЛИ H_3

Нека за произволна права $g = \{I_0, I_3\}$ от даден комплекс прави в E_3 фиксираме автополярният тетраедър $\{I_0', I_1', I_2', I_3'\}$, определен, както следва:

$$(12) \quad \begin{aligned} I_0' &= I_0 \cos \lambda + I_3 \sin \lambda, & I_3' &= -I_0 \sin \lambda + I_3 \cos \lambda, \\ I_1' &= I_1 \cos \theta + I_2 \sin \theta, & I_2' &= -I_1 \sin \theta + I_2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Тук $\lambda = \lambda(u, v, w)$ и $\theta = \theta(u, v, w)$ са произволни функции, притежаващи непрекъснати частни производни от достатъчно висок ред, който ще се наложи. За линейните диференциални форми $\omega^1, \omega^2, \omega^3, p, q, r$, получаваме

$$(10') \quad \begin{aligned} \omega^1 &= (\omega^1 \cos \lambda + q \sin \lambda) \cos \theta + (\omega^2 \cos \lambda - p \sin \lambda) \sin \theta, \\ \omega^2 &= -(\omega^1 \cos \lambda + q \sin \lambda) \sin \theta + (\omega^3 \cos \lambda - p \sin \lambda) \cos \theta, \\ \omega^3 &= \omega^3 + d\lambda; \end{aligned}$$

$$(11') \quad \begin{aligned} p &= (q \sin \theta + p \cos \theta) \cos \lambda - (\omega^1 \sin \theta - \omega^2 \cos \theta) \sin \lambda, \\ q &= (q \cos \theta - p \sin \theta) \cos \lambda - (\omega^1 \cos \theta + \omega^2 \sin \theta) \sin \lambda, \\ r &= r + d\theta. \end{aligned}$$

Да предположим, че относно първоначалния тетраедър $\{I_0 I_1 I_2 I_3\}$ уравнението на комплекса е

$$(13) \quad \omega^1 = a\omega^2 + bq - kp.$$

Ако умножим двете страни на последното равенство външно с $p \wedge q$, получаваме

$$\omega^1 \wedge p \wedge q = a(\omega^2 \wedge p \wedge q);$$

следователно

$$a = \frac{p_2 q_3 - p_3 q_2}{p_3 q_1 - p_1 q_3}.$$

Ако умножим същото равенство външно с $\omega^2 \wedge p$, получаваме

$$b = \frac{p_3}{p_3 q_1 - p_1 q_3}.$$

Аналогично намираме

$$k = \frac{q_3}{p_3 q_1 - p_1 q_3}.$$

Нека отбележим, че в уравнението (13) формите ω^3, p, q са линейно независими и поради това $\omega^2 \wedge p \wedge q \neq 0$, което влече $p_3 q_1 - p_1 q_3 \neq 0$.

Ако $\omega^3 \wedge p \wedge q = 0$, тогава $\omega^1 \wedge p \wedge q \neq 0$ и уравнението на комплекса би имало вид

$$(14) \quad \omega^2 = a\omega^1 + bq - kp.$$

От изразите (13) и (14) за a и b следва, че необходимото и достатъчно условие тетраедърът $\{I_0 I_1 I_2 I_3\}$ да е каноничен, т. е. необходимото и достатъчно условие да е $a=0, b=0$ се дава с равенствата

$$(15) \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0.$$

Да предположим, че тетраедърът $\{I_0 I_1 I_2 I_3\}$ не е каноничен и да потърсим при какви стойности за λ и θ тетраедърът $\{I_0' I_1' I_2' I_3'\}$ е каноничен. Като държим сметка за равенствата (15), търсените стойности на λ и θ се получават от условията

$$p_2' = 0, \quad p_3' = 0.$$

Но в такъв случай намираме

$$p' = p_1, \omega^{1'}.$$

От първите равенства на (10') и (11') получаваме

$$\begin{aligned} p_1' [(\omega^1 \cos \lambda + q \sin \lambda) \cos \theta + (\omega^2 \cos \lambda - p \sin \lambda) \sin \theta] \\ = (q \sin \theta + p \cos \theta) \cos \lambda - (\omega^1 \sin \theta - \omega^2 \cos \theta) \sin \lambda. \end{aligned}$$

Но понеже $\omega^2 \wedge p \wedge q \neq 0$, то като държим сметка за равенствата (12), намираме

$$\begin{aligned} p_1' (a \cos \lambda \cos \theta + \cos \lambda \sin \theta) &= -a \sin \theta \sin \lambda + \cos \theta \sin \lambda, \\ p_1' (-k \cos \lambda \cos \theta - \sin \lambda \sin \theta) &= \cos \theta \cos \lambda + k \sin \theta \sin \lambda, \\ p_1' (b \cos \lambda \cos \theta + \sin \lambda \cos \theta) &= \sin \theta \cos \lambda - b \sin \theta \sin \lambda. \end{aligned}$$

Чрез елиминирание на p_1' от първите две равенства, а след това и от второто и третото равенство получаваме съответно

$$\begin{aligned} (17) \quad aX + Y + kZ &= 0 \\ bX + kY + Z &= 0, \end{aligned}$$

където е положено

$$(18) \quad X = \cos^2 \lambda \cos^2 \theta - \sin^2 \lambda \sin^2 \theta, \quad Y = \sin \theta \cos \theta, \quad Z = \sin \lambda \cos \lambda.$$

От равенствата (17) получаваме

$$(19) \quad X = \mu(1 - k^2), \quad Y = \mu(bk - a), \quad Z = \mu(ak - b).$$

Равенствата (18) могат да се напишат и така:

$$2X = \cos 2\lambda + \cos 2\theta, \quad 2Y = \sin 2\theta, \quad 2Z = \sin 2\lambda,$$

откъдето окончателно намираме

$$(20) \quad [2(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)]^2 = (1 - 4Y^2)(1 - 4Z^2).$$

Заместваме X, Y, Z с изразите им от равенствата (19) и получаваме при $1 - k^2 \neq 0$, т. е. ако разглежданият комплекс не е клифордов,

$$(21) \quad \mu^2 = \frac{1}{[(1+k)^2 + (a+b)^2][(1-k)^2 + (a-b)^2]}.$$

От (18) и (19) намираме

$$\begin{aligned} (22) \quad \cos(\theta + \lambda) \cos(\theta - \lambda) &= \mu(1 - k^2), \\ \sin(\theta + \lambda) \cos(\theta - \lambda) &= \mu(a + b)(k - 1), \\ \sin(\theta - \lambda) \cos(\theta + \lambda) &= \mu(b - a)(k + 1). \end{aligned}$$

Умножаваме почленно второто и третото от последните три равенства и като имаме пред вид първото, получаваме при $1 - k^2 \neq 0$

$$(23) \quad \sin(\theta + \lambda) \sin(\theta - \lambda) = \mu(a^2 - b^2).$$

От (22) и (23) намираме

$$\cos 2\lambda = \mu(1 - k^2 + a^2 - b^2),$$

$$\cos 2\theta = \mu(1 - k^2 + b^2 - a^2),$$

$$\sin 2\lambda = 2\mu(ak - b),$$

$$\sin 2\theta = 2\mu(bk - a).$$

Окончателно намираме

$$(24) \quad \begin{aligned} \sin 4\lambda &= 4\mu^2(ak - 3)(1 - k^2 + a^2 - b^2), \\ \sin 4\theta &= 4\mu^2(bk - a)(1 - k^2 + b^2 - a^2). \end{aligned}$$

В H_3 имаме

$$(25) \quad \begin{aligned} I_0' &= I_0 \operatorname{ch} \lambda + I_3 \operatorname{sh} \lambda, & I_3' &= I_0 \operatorname{sh} \lambda + I_3 \operatorname{ch} \lambda, \\ I_1' &= I_1 \cos \theta + I_2 \sin \theta, & I_2' &= -I_1 \sin \theta + I_2 \cos \theta; \\ p_1' (a \operatorname{ch} \lambda \cos \theta + \operatorname{ch} \lambda \sin \theta) &= -a \operatorname{sh} \lambda \sin \theta + \operatorname{sh} \lambda \cos \theta, \\ p_1' (-k \operatorname{ch} \lambda \cos \theta - \operatorname{sh} \lambda \sin \theta) &= \operatorname{ch} \lambda \cos \theta - k \operatorname{sh} \lambda \sin \theta, \\ p_1' (b \operatorname{ch} \lambda \cos \theta + \operatorname{sh} \lambda \cos \theta) &= \operatorname{ch} \lambda \sin \theta - b \operatorname{sh} \lambda \sin \theta. \end{aligned}$$

Като положим

$$X = \operatorname{ch}^2 \lambda \cos^2 \theta + \operatorname{sh}^2 \lambda \sin^2 \theta, \quad Y = \sin \theta \cos \theta, \quad Z = \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda,$$

получаваме системата

$$(26) \quad \begin{aligned} aX + Y - kZ &= 0, \\ bX + kY - Z &= 0, \end{aligned}$$

откъдето за решенията ѝ имаме

$$(27) \quad X = \mu(1 + k^2), \quad Y = -\mu(bk + a), \quad Z = \mu(ak - b),$$

$$(28) \quad [2(X^2 + Y^2 - Z^2) - 1]^2 = (1 - 4Y^2)(1 + 4Z^2).$$

Оттук и от (27) намираме

$$(29) \quad \mu^2 = \frac{1}{[(a+k)^2 + (1-b)^2][(a-k)^2 + (1+b)^2]}.$$

Аналогично на равенствата (22) и (23) получаваме

$$\begin{aligned} \cos(\theta + i\lambda) \cos(\theta - i\lambda) &= \mu(1 + k^2), \\ \sin(\theta + i\lambda) \cos(\theta - i\lambda) &= \mu(A + iB), \\ \sin(\theta - i\lambda) \cos(\theta + i\lambda) &= \mu(A - iB), \\ \sin(\theta + i\lambda) \sin(\theta - i\lambda) &= \mu^2(A^2 + B^2), \end{aligned}$$

където е положено

$$A = -(a + kb), \quad B = ak - b.$$

По-нататък намираме

$$(29') \quad \begin{aligned} \operatorname{ch} 2\lambda &= \mu(1 + k^2 + a^2 + b^2), \\ \cos 2\theta &= \mu(1 + k^2 - a^2 - b^2), \\ \operatorname{sh} 2\lambda &= 2\mu(ak - b), \\ \sin 2\theta &= -2\mu(bk + a). \end{aligned}$$

Окончателно получаваме

$$(30) \quad \operatorname{sh} 4\lambda = 4\mu^2(ak-b)(1+k^2+a^2+b^2),$$

$$(31) \quad \sin 4\theta = -4\mu^2(a+bk)(1+k^2-a^2-b^2).$$

Тъй като в равенствата (24) λ и θ се изменят в интервала $[0, \pi)$, то 4λ и 4θ се изменят в интервала $[0, 4\pi)$. Като се има пред вид (21), непосредствено се проверява, че десните страни на четирите равенства (23) не надминават по абсолютна стойност 1. Заключаваме, че в интервала $[0, \pi)$ съществуват две стойности на λ , които са от вида λ_0 , $\lambda_0 + \frac{\pi}{2}$, и две стой-

ности на θ , също от вида θ_0 , $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$, при което $0 \leq \lambda_0$, $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$. Тези двойки решения за λ и θ са решения и на равенствата (24), които са съответно следствия от равенствата (23). Както трябваше да се очаква, в E_3 се получиха две ортогонални точки върху правата $\{I_0 I_3\}$, които са върхове на каноничния репер. Другите два върха на каноничния репер отговарят на двете решения за θ и тези върхове са върху правата $\{I_1 I_2\}$.

В H_3 от равенството за $\cos 2\lambda$ от (29') се вижда, че знакът на μ е положителен и следователно равенствата (29') определят λ и θ еднозначно. Формулите (25) определят каноничния репер върху правата $\{I_0 I_3\}$ на комплекса. Върховете I_0, I_3 са двата центъра върху правата $\{I_0 I_3\}$ в E_3 , а върхът I_0' е единственият (достъпен) център в пространството H_3 .

§ 3. ЦЕНТРАЛНО ВЕКТОРНО ПОЛЕ, АСОЦИИРАНО С ДАДЕН КОМПЛЕКС ОТ ПРАВИ В E_3 ИЛИ H_3

Нека $I_0(u, v, w)$, $I_3(u, v, w)$ са двата центъра върху произволна права от разглеждания комплекс в E_3 , който предполагаме неклифордов ($k^2 \neq 1$). В такъв случай относно каноничния тетраедър уравнението на комплекса се редуцира на

$$(32) \quad \omega^1 + kp = 0$$

при условие, че разглеждаме векторното поле (I_0, I_3) .

Нека разглеждаме векторното поле (I_3, I_0) и за удобство да въведем означенията

$$\tilde{I}_0 = I_3, \quad \tilde{I}_1 = I_2, \quad \tilde{I}_2 = I_1, \quad \tilde{I}_3 = I_0.$$

Тогава

$$(\tilde{I}_0 \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \tilde{I}_3) = (I_3 I_2 I_1 I_0) = (I_0 I_1 I_2 I_3) = 1.$$

Формулите (2) за тетраедъра $\{\tilde{I}_0 \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \tilde{I}_3\}$ при $\eta = 1$ приемат вида

$$\begin{aligned} d\tilde{I}_0 &= \tilde{\omega}^1 \tilde{I}_1 + \tilde{\omega}^2 \tilde{I}_2 + \tilde{\omega}^3 \tilde{I}_3, \\ d\tilde{I}_1 &= -\tilde{\omega}^1 \tilde{I}_0 + \tilde{r} \tilde{I}_2 - \tilde{q} \tilde{I}_3, \\ d\tilde{I}_2 &= -\tilde{\omega}^2 \tilde{I}_0 - \tilde{r} \tilde{I}_1 + \tilde{p} \tilde{I}_3, \\ d\tilde{I}_3 &= -\tilde{\omega}^3 \tilde{I}_0 + \tilde{q} \tilde{I}_1 - \tilde{p} \tilde{I}_2. \end{aligned}$$

Като имаме пред вид (2), (33) и (34), получаваме

$$(35) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}^1 &= -p, \quad \tilde{\omega}^2 = q, \quad \tilde{\omega}^3 = -\omega^3; \\ \tilde{p} &= -\omega^1, \quad \tilde{q} = \omega^2, \quad \tilde{r} = -r. \end{aligned}$$

Уравнението на комплекса от прави относно тетраедъра $\{\tilde{I}_0 \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \tilde{I}_3\}$ ще има вида

$$(36) \quad \tilde{\omega}^1 + \tilde{k} \tilde{p} = 0.$$

Като сравним (32) и (36) и имаме пред вид (35), намираме

$$(37) \quad k\tilde{k} = 1.$$

Следователно за всяка своя права разглежданият комплекс в елиптическото пространство притежава две кривини k и $\tilde{k}$, произведението на които е равно на 1.

Да разгледаме полярния комплекс на дадения комплекс, т. е. комплекса, образуван от правите $\{I_1 I_2\}$, и го отнесем към тетраедъра $\{I_0^* I_1^* I_2^* I_3^*\}$, като сме положили

$$(38) \quad I_0^* = I_1, \quad I_1^* = I_0, \quad I_2^* = I_3, \quad I_3^* = I_2.$$

Тогава

$$(I_0^* I_1^* I_2^* I_3^*) = (I_1 I_0 I_3 I_2) = (I_0 I_1 I_2 I_3) = 1.$$

Като постъпим както в горния случай, получаваме

$$(39) \quad \begin{aligned} \omega^{*1} &= -\omega^1, \quad \omega^{*2} = -q, \quad \omega^{*3} = r, \\ p^* &= -p, \quad q^* = -\omega^2, \quad r^* = \omega^3. \end{aligned}$$

Ако в уравнението (32) заместим ω^1 и p равните им от равенствата (39), намираме

$$(40) \quad \omega^{*1} + kp^* = 0,$$

което е уравнението на полярния комплекс на дадения при централно векторно поле (I_1, I_2) и следователно съответната кривина k^* е равна на кривината k на изходния комплекс, отговаряща на полето (I_0, I_3) .

Да разгледаме комплекса, образуван от правите $\{I_0 I_2\}$ (главни нормали за изходния комплекс [2]). Тук полагаме

$$(41) \quad \check{I}_0 = I_3, \quad \check{I}_1 = I_3, \quad \check{I}_2 = I_1, \quad \check{I}_3 = I_2$$

и получаваме

$$(42) \quad \begin{aligned} \omega^1 &= \omega^3, \quad \check{\omega}^2 = \omega^1, \quad \omega^3 = \omega^2, \\ \check{p} &= r, \quad \check{q} = p, \quad r = q. \end{aligned}$$

Ако в уравнението (32) заместим ω^1 и p с техните равни от (42), намираме

$$(43) \quad \omega^2 + k\check{q} = 0.$$

Като имаме пред вид, че уравнението на комплекса от прави $\{I_0 I_2\}$ е от вида

$$(44) \quad \tilde{\omega} = \tilde{k} \tilde{q}$$

при централно векторно поле (I_0, I_2) , заключаваме, че $\tilde{k} = -k$.

Комплексът, получен от главната нормала $\{I_3 I_1\}$, е полярен за комплекса, образуван от главната нормала $\{I_0 I_2\}$, и следователно кривината, отговаряща на централното поле (I_3, I_1) , е равна на $-k$.

Ако разгледаме комплекса, образуван от бинормалата $\{I_0 I_1\}$, и положим

$$(45) \quad \hat{I}_0 = I_0, \quad \hat{I}_1 = I_2, \quad \hat{I}_2 = I_3, \quad \hat{I}_3 = I_1,$$

получаваме

$$(46) \quad \begin{aligned} \hat{\omega}^1 &= \omega^2, & \hat{\omega}^2 &= \omega^3, & \hat{\omega}^3 &= \omega^1, \\ \hat{p} &= q, & \hat{q} &= r, & \hat{r} &= p. \end{aligned}$$

Уравнението на комплекса ще бъде от вида

$$(47) \quad \hat{\omega}^1 = \hat{a} \hat{\omega}^2 + \hat{b} \hat{q} - \hat{k} \hat{p};$$

като имаме пред вид (46), равенството (47) се трансформира в

$$(48) \quad \omega^2 = \hat{a} \omega^3 + \hat{b} r - \hat{k} q.$$

Оттук при $q_1 r_2 - q_2 r_1 \neq 0$ намираме

$$(46) \quad \begin{aligned} \hat{a} &= \frac{q_3 r_1 - q_1 r_3}{q_1 r_2 - q_2 r_1}, \\ \hat{b} &= \frac{q_1}{q_1 r_2 - q_2 r_1}, \\ \hat{k} &= \frac{r_1}{q_1 r_2 - q_2 r_1}. \end{aligned}$$

От изразите за $\hat{a}$ и $\hat{b}$ се вижда, че ортогоналните точки I_0, I_1 върху правата $\{I_0 I_1\}$ не са центрове и че необходимото и достатъчно условие тези две точки да са центрове върху правата се дава с равенствата

$$(50) \quad q_1 = 0, \quad q_3 = 0$$

и тогава

$$\hat{k} = -\frac{1}{q_2}.$$

Може да се провери непосредствено, че ако условията (50) са изпълнени и $r_3 \neq 0$, то и $\hat{q}_1 = 0, \hat{q}_3 = 0$, което показва, че точките I_3, I_2 са центрове върху бинормалата $\{I_3 I_2\}$.

Получените резултати за пространството E_3 , отнасящи се за комплекса, образуван от главните нормали $\{I_0 I_2\}$, както и за комплекса, образуван от бинормалите $\{I_0 I_1\}$, са в сила и за пространството H_3 .

§ 4. ВТОРА ДИФЕРЕНЦИАЛНА ОКОЛНОСТ НА ЕДНА ПРАВА ОТ КОМПЛЕКС ПРАВИ В E_3 ИЛИ H_3

Ако диференцираме външно двете страни на (32), получаваме

$$D\omega^1 + dk \wedge p + kDp = 0.$$

Като имаме пред вид уравненията на структурата, намираме в E_3 или в H_3

$$(50') \quad (r + \eta k \omega^3) \wedge \omega^2 + dk \wedge p + (kr + \omega^3) \wedge q = 0.$$

Предполагаме $\omega^2 \wedge p \wedge q \neq 0$ и прилагаме лемата на Картан. Така получаваме

$$(51) \quad \begin{aligned} r + \eta k \omega^3 &= \alpha \omega^2 + \beta p + \gamma q, \\ dk &= \beta \omega^2 + \delta p + \varepsilon q, \\ \omega^3 + kr &= \gamma \omega^2 + \varepsilon p + \nu q. \end{aligned}$$

От първото и третото равенство намираме последователно

$$(52) \quad \begin{aligned} \omega^3(1 - \eta k^2) &= (\gamma - k\alpha) \omega^2 + (\varepsilon - k\beta) p + (\nu - k\gamma) q, \\ r(1 - \eta k^2) &= (\alpha - \eta k\gamma) \omega^2 + (\beta - \eta k\varepsilon) p + (\gamma - \eta k\nu) q. \end{aligned}$$

I. Нека $1 - \eta k^2 \neq 0$ (при $\eta = -1$, т. е. в H_3 , това е винаги изпълнено); тогава от последните равенства получаваме

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \tilde{\lambda} \omega^2 + \lambda_1 p + \lambda_2 q, \\ r &= \tilde{\mu} \omega^2 + \mu_1 p + \mu_2 q, \end{aligned}$$

където е положено при $\Delta_0 = 1 - \eta k^2$

$$(53) \quad \begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \frac{1}{\Delta_0} (\gamma - k\alpha), \quad \lambda_1 = \frac{1}{\Delta_0} (\varepsilon - k\beta), \quad \lambda_2 = \frac{1}{\Delta_0} (\nu - k\gamma), \\ \tilde{\mu} &= \frac{1}{\Delta_0} (\alpha - \eta k\gamma), \quad \mu_1 = \frac{1}{\Delta_0} (\beta - \eta k\varepsilon), \quad \mu_2 = \frac{1}{\Delta_0} (\gamma - \eta k\nu). \end{aligned}$$

Тъй като векторното поле (I_0, I_3) е централно, то като означим $\Delta = \lambda_2 k$, получаваме

$$(54) \quad \begin{aligned} \Delta p_1 &= -\lambda_2 = -\frac{1}{\Delta_0} (\nu - k\gamma), \\ \Delta p_2 &= \Delta p_3 = 0, \\ \Delta q_1 &= \lambda_1 = \frac{1}{\Delta_0} (\varepsilon - k\beta), \\ \Delta q_2 &= -\lambda \tilde{k} = -\frac{k}{\Delta_0} (\gamma - k\alpha), \\ \Delta q_3 &= k, \\ \Delta r_1 &= \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1, \\ \Delta r_2 &= k(\lambda_2 \tilde{\mu} - \mu_2 \tilde{\lambda}), \\ \Delta r_3 &= k \mu_2 = \frac{k}{\Delta_0} (\gamma - \eta k\nu). \end{aligned}$$

II. Нека $1 - k^2 = 0$ (т. е. в E_3). Тогава от равенствата (52) имаме

$$\gamma - k\alpha = 0, \quad \varepsilon - k\beta = 0, \quad \nu - k\gamma = 0$$

и още

$$\alpha - k\gamma = 0, \quad \beta - k\varepsilon = 0, \quad \gamma - k\nu = 0.$$

Поради $1 - k^2 = 0$ последните три равенства съвпадат съответно с първите три. От второто равенство на (52) следва

$$\beta = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0.$$

Нека припомним, че коефициентите $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \nu$ в уравненията (51) са функции на три параметъра u, v, w .

Уравненията (32) и уравненията (51) определят дифференциалната околност от втори ред на правата на комплекса.

Коефициентите $k, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \nu$ са основните инварианти на тази околност. От тях само инвариантната k принадлежи на първата дифференциална околност.

§ 5. ЦЕНТРАЛНО ПОЛЕ В E_3 ИЛИ В H_3

От (7) и (8) получаваме

$$\begin{aligned} K &= \eta, & T &= -\frac{1}{4} r_1 q_3^2, \\ P &= -\frac{1}{4} [q_3^2 + (p_1 - q_2)^2], & M &= \frac{1}{4} (4p_1 q_2 - q_1^2 - q_3^2), \\ H &= -q_1, & S &= p_1 + q_2. \end{aligned}$$

За нехолономната повърхнина $\omega^3 = 0$ намираме

$$\begin{aligned} K_3 &= \eta - \frac{1}{4} (p_1 - q_2)^2, \\ H_3 &= -q_1, \\ \bar{K}_3 - \eta &= p_1 q_2. \end{aligned}$$

За нехолономната повърхнина $\omega^1 = 0$ имаме

$$\begin{aligned} K_1 &= \eta - \frac{1}{4} [4q_3 r_2 + (q_2 - r_3)^2], & S_1 &= q_2 + r_3, \\ H_1 &= q_3 - r_2, & \bar{K}_1 &= \eta + q_2 r_3 - q_3 r_2, \\ T_1 &= q_2 r_3 - \frac{1}{4} (q_3 + r_2)^2. \end{aligned}$$

За нехолономната повърхнина $\omega^2 = 0$ получаваме

$$\begin{aligned} K_2 &= \eta - \frac{1}{2} (p_1 - r_3)^2, & T_2 &= p_1 r_3 - \frac{1}{4} r_1^2, \\ H_2 &= r_1, & S_2 &= p_1 + r_3, \\ \bar{K}_2 &= \eta + p_1 r_3, \end{aligned}$$

Непосредственно се проверява, че е в сила равенството

$$S_2 + k(\bar{K}_2 - \eta) = -\frac{1}{k}.$$

Също така се проверява, че е в сила равенството

$$S_1 + k\bar{K}_1 = 0.$$

Наистина това равенство, написано по-подробно, приема вида

$$(55) \quad q_2 + r_3 + k(q_2 r_3 - q_3 r_2 + \eta) = 0.$$

От равенствата (54) получаваме

$$q_2 = -\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_2}, \quad q_3 = \frac{k}{d},$$
$$r_2 = \frac{\lambda_2 \tilde{\mu} - \tilde{\lambda} \mu_2}{\lambda_2}, \quad r_3 = \frac{\mu_3}{\lambda_2}.$$

Равенството (55) приема вида

$$-\tilde{\lambda} + \mu_2 - k\tilde{\mu} + \eta k \lambda_2 = 0;$$

това равенство поради (53) е твърждение.

Равенството (55) може да се получи непосредствено от (50), като се умножат външно двете страни с p .

ЛИТЕРАТУРА

1. Матеев, А. Геометрия векторного поля в пространстве Кэли. Вестник Моск. у-та № 3, 1960.
2. Кованцов, Н. И. Теория комплексов, 1963.

Постъпила на 4. VI. 1968 г.

О ТЕОРИИ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Алипи Матеев

Резюме

Говорим, что в эллиптическом пространстве E_3 или в гиперболическом пространстве H_3 дано векторное поле, если каждой точке I_0 рассматриваемого пространства сопоставлена ортогональная к ней точка I_3 . Векторное поле тогда обозначено (I_0, I_3) . Обе точки I_0, I_3 (нормированные) дополняются точками I_1, I_2 так, чтобы тетраэдр $\{I_0 I_1 I_2 I_3\}$ был автополярым относительно абсолюта в E_3 или H_3 .

Для векторного поля вводятся две квадратичные формы

$$\Phi_1 = (dI_0)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2,$$

$$\Phi_2 = -dI_0 dI_3 = p\omega^2 - q\omega^1.$$

Вводится также векторное поле, связанное с данным комплексом прямых в E_3 или H_3 , которое используется, чтобы найти более эффективный способ определения канонического тетраэдра для любой прямой рассматриваемого комплекса. Специально вводится векторное поле (I_0, I_3) , где I_0 — центр рассматриваемой прямой (центральное векторное поле). Исследуется окрестность второго порядка произвольной прямой комплекса.

SUR LA THÉORIE DES COMPLEXES DE DROITES DANS L'ESPACE ELLIPTIQUE E_3 ET HYPERBOLIQUE H_3

Alipi Mateev

Résumé

Nous dirons que dans E_3 ou H_3 on a un champ de „vecteurs“, lorsque à chaque point I_0 de l'espace considéré on peut faire correspondre un point orthogonal I_3 . Ce champ de „vecteurs“ est désigné par (I_0, I_3) . On complète les deux points I_0, I_3 (normés) par les points I_1, I_2 , tels que le tétraèdre $\{I_0 I_1 I_2 I_3\}$ est autopolaire par rapport à l'absolu (dans E_3 ou H_3).

On introduit, pour un champ de „vecteurs“, les deux formes quadratiques

$$\Phi_1 = (dI_0)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2,$$

$$\Phi_2 = -dI_0 dI_3 = p\omega^2 - q\omega^1.$$

On introduit même, champ de „vecteurs“ associé à un complexe de droites dans E_3 ou dans H_3 et on l'applique pour trouver d'une manière effective le tétraèdre canonique sur une droite quelconque du complexe considéré. En particulier on considère le champ de „vecteurs“ (I_0, I_3) où I_0 est un centre sur la droite considérée (champ de „vecteurs“ central).

On étudie le voisinage de deuxième ordre d'une droite quelconque du complexe.