

СХОДИМОСТ НА ПРОИЗВОДНИТЕ НА ЛИНЕЙНИ
ПОЛОЖИТЕЛНИ ОПЕРАТОРИ

Благовест Сендов и Васил А. Попов

В тази работа се разглежда въпросът за сходимост на производните на положителни линейни оператори относно равномерното и хаусдорфовото разстояние. Предварително резултатите бяха съобщени в [8].

Нека $D[a, b]$ е класът на всички функции $f(x)$, които са дефинирани в интервала $[a, b]$, непрекъснати са отляво в точката a , отдясно в точката b , такива, че $f(x-0)$ и $f(x+0)$ съществуват за всяка точка $x \in [a, b]$ и $f(x)$ се намира между тези две граници. Равномерното разстояние между функциите $f(x)$ и $g(x)$ в интервала $\Delta = [a, b]$ ще бележим с $\varrho_{\Delta}(f, g)$,

$$\varrho_{\Delta}(f, g) = \sup_{x \in \Delta} |f(x) - g(x)|,$$

а хаусдорфовото разстояние между функциите $f(x)$ и $g(x)$ в интервала $\Delta = [a, b]$ ще бележим, с $r_{\Delta}[a, b]$. Дефиницията и основните свойства на хаусдорфовото разстояние ще считаме за познати [1], [2].

Една от основните проблеми на конструктивната теория на функциите е въпросът, кога за една редица от линейни оператори $\{L_n\}_1^{\infty}$ имаме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(L_n(f, x), f(x)) = 0$$

за функции $f(x)$ от даден клас, като сходимостта се разглежда относно дадено разстояние d (равномерно, средноквадратично, хаусдорфово и др.).

В случая, когато L_n са положителни оператори, е известна следната, станала вече класическа теорема на Коровкин [3]:

Теорема 1. Нека $\{L_n\}_1^{\infty}$ е редица от линейни положителни оператори, които удовлетворяват условията:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta}(L_n(1, x), 1) = 0,$$

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta}(L_n(t, x), x) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta}(L_n(t^2, x), x^2) = 0.$$

Тогава за всяка непрекъсната в интервала $\Delta=[a, b]$ функция $f(x)$ е изпълнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Delta}(L_n(f, x), f) = 0.$$

Нека напомним, че един оператор L се нарича положителен, ако от $f(x) \geq 0$ следва $L(f, x) \geq 0$. Условието (I) ще наричаме условия на Коровкин.

В тази теорема ролята на функциите $1, x$ и x^2 може да се играе от кои да са три функции φ_1, φ_2 и φ_3 , които образуват система на Чебишов за дадения интервал.

Теорема 1 е обобщена в [4], като равномерната сходимост е заменена с хаусдорфова, а непрекъснатата функция $f(x)$ — с функция, принадлежаща към класа $D[a, b]$:

Теорема 2. Нека $\{L_n\}_1^{\infty}$ е редица от положителни линейни оператори, които удовлетворяват условията на Коровкин. Тогава за всяка функция $f(x) \in D[a, b]$ е изпълнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\Delta}(L_n(f, x), f(x)) = 0.$$

Нека отбележим, че операторите L_n могат да бъдат дефинирани и положителни изобщо в по-голям интервал от интервала $\Delta=[a, b]$, в който удовлетворяват условията на Коровкин.

Естествено се поставя въпросът, дали ако функцията $f(x)$ притежава производна $f^{(m)}(x)$ и $L_n(f, x)$ са диференцируеми m пъти, производните им $L_n^{(m)}(f, x)$ клонят към $f^{(m)}(x)$ относно равномерното или хаусдорфовото разстояние. Подобна проблема бе поставена на колоквиума по апроксимиране в Клуз (1967 г.) от М. Мюлер. Отговор на този въпрос е даден в настоящата работа.

Нека дадем отначало някои дефиниции.

Дефиниция 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е изпъкнала от ред m и принадлежи на класа K_{Δ}^m , ако за m -тата ѝ разделена разлика е изпълнено

$$[x_0, x_1, \dots, x_{m+1}; f] \geq 0,$$

където $x_0, x_1, \dots, x_{m+1}$ са $m+2$ произволни точки от интервала $\Delta=[a, b]$ [5].

Дефиниция 2. Ще казваме, че операторът L е изпъкнал от ред m , ако изобразява K_{Δ}^m в K_{Δ}^m [6].

Дефиниция 3. Ще казваме, че функцията $\hat{f}^{(m)}(x) \in D[a, b]$ е m -та d -производна на функцията $f(x)$, ако $m-1$ -вата производна на функцията $f(x)$ съществува и е неопределен интеграл на функцията $\hat{f}^{(m)}(x)$.

Нека отбележим, че ако функцията $\hat{f}^{(m)}(x)$ е m -та d -производна на функцията $f(x)$, условието

$$f(x) \in K_{\Delta}^{m-1}$$

е еквивалентно на $\hat{f}^{(m)}(x) \geq 0$ за всяко $x \in \Delta$.

Лема 1. Нека $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ е редица от монотонно растящи функции в интервала $[a, b]$ и $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$. Ако за произволна точка $x \in [a, b]$ е изпълнено

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

имаме

$$(1') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta}(f_n, f) = 0.$$

Доказателство. Да допуснем, че (1') не е изпълнено. Тогава съществуват число $\varepsilon > 0$, точка $x_0 \in [a, b]$ и редица от точки $x_{n_i} \in [a, b]$, които клонят към точката x_0 , като при това

$$(2) \quad |f_{n_i}(x_{n_i}) - f(x_{n_i})| > \varepsilon.$$

Поради непрекъснатостта на $f(x)$ съществува такова $\delta > 0$, че при $|x - x_0| < \delta$ да имаме $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Но от това, че $x_{n_i} \rightarrow x_0$, че $f_{n_i}(x)$ е монотонна и от (2) следва, че при достатъчно големи n_i ще имаме или

$$f_{n_i}(x) > f(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{за } x \in \left[x_0 + \frac{\delta}{2}, x_0 + \delta \right],$$

или

$$f_{n_i}(x) < f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{за } x \in \left[x_0 - \delta, x_0 - \frac{\delta}{2} \right],$$

което противоречи с условието (1). С това лема 1 е доказана.

Лема 2. Нека $\{f_n\}_1^\infty$ е редица от функции, принадлежащи на K_{Δ}^1 , които равномерно клонят в интервала $\Delta = [a, b]$ към функцията $f(x)$. Ако производната $f'(x)$ е непрекъсната в интервала $\Delta = [a, b]$, а производните $f'_n(x)$ съществуват, във всеки подинтервал $\Delta' = [c, d]$, $a < c < d < b$, е изпълнено

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta'}(f'_n, f') = 0.$$

Доказателство. Ще докажем, че за всяка вътрешна точка x_0 на интервала $\Delta = [a, b]$ е в сила

$$(3') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) = f'(x_0).$$

Тъй като $f_n(x) \in K_{\Delta}^1$, то $f'_n(x)$ са монотонно растящи функции. Тогава от (3') и лема 1 ще следва (3).

Да докажем (3'). Допускаме, че

$$(4) \quad \overline{\lim} f'_n(x_0) > f'(x_0).$$

Тогава съществува такова число $\delta > 0$, че

$$\overline{\lim} f'_n(x_0) > f'(x_0) + \delta$$

и ако точката $x_1 > x_0$ е достатъчно близка до x_0 , $x_1 \in [a, b]$, получаваме

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{\delta}{2} < f'(x_0) + \delta < \overline{\lim} f'_n(x_0) \leq \overline{\lim} \left[\frac{f_n(x_1) - f_n(x_0)}{x_1 - x_0} \right].$$

Последното неравенство следва от изпъкналостта на функцията $f_n(x)$: $f_n(x) \in K_{\Delta}^1$. Следователно имаме

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} + \frac{\delta}{2} < \overline{\lim} \left[\frac{f_n(x_1)-f_n(x_0)}{x_1-x_0} \right] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Но това противоречи на условието $\delta > 0$.

По съвсем подобен начин се доказва, че неравенството

$$(5) \quad \underline{\lim} f'_n(x_0) < f'(x_0)$$

е невъзможно.

От това, че (4) и (5) не са изпълнени, следва, че имаме (3').

Дефиниция 4. Ще казваме, че операторът L е гладък от ред m , ако изобразява $D[a, b]$ в пространството $C^m[a, b]$ от всички функции с непрекъснати производни от m -ти ред включително.

Навсякъде по-нататък ще считаме, че разглежданите оператори са толкова пъти гладки, колкото е нужно. Нека отбележим, че обикновено операторите в конструктивната теория на функциите са гладки от произволен ред.

Теорема 3. Нека $\{L_n\}_1^\infty$ е редица от линейни положителни оператори, за които са изпълнени следните условия:

а) L_n удовлетворяват условията на Коровкин в интервала $[0, R]$;

б) L_n са изпъкнали на интервала $[0, R]$ от m -ти ред за всяко m от 0 до p .

Ако функцията $\hat{f}^{(m)}(x) \in D[0, R]$ е m -та d -производна на функцията $f(x)$, $m \leq p$ и $\hat{f}^{(m)}(x)$ е непрекъсната в точките c и d , където $0 < c < d < R$, то в интервала $A' = [c, d]$ е изпълнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{A'}(L_n^{(m)}(f, x), \hat{f}^{(m)}) = 0.$$

Доказателство. Да разгледаме линейния оператор

$$R_n = \left[L_n \underbrace{\int_0^x \int_0^x}_m \right]^{(m)},$$

където $m \leq p$. Ако функцията $\tilde{f}^{(m)}(x)$ е m -та d -производна на функцията $f(x)$, то

$$R_n(f^{(m)}, x) = [L_n(f, x)]^{(m)} - \sum_{k=1}^m \frac{k f^{(k-1)}(0) L_n^{(m)}(t^{k-1}, x)}{k!}.$$

Понеже операторът L_n е изпъкнал от m -ти ред, операторът R_n е положителен. За да докажем теоремата, ще бъде достатъчно съгласно теорема 2 да покажем, че имаме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{A'}(R_n(t^s, x), x^s) = 0, \quad s = 0, 1, 2,$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{A'}(L_n^{(m)}(t^k, x), 0) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Но от дефиницията на оператора R_n следва, че

$$R_n(1, x) = \left(L_n \left(\frac{t^m}{m!}, x \right) \right)^{(m)},$$

$$R_n(t, x) = \left(L_n \left(\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}, x \right) \right)^{(m)},$$

$$R_n(t^2, x) = \left(L_n \left(\frac{2t^{m+2}}{(m+2)!}, x \right) \right)^{(m)}$$

и следователно трябва да покажем, че в интервала $\Delta' = [c, d]$ е изпълнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta'}(L_n^{(m)}(t^k, x), (x^k)^{(m)}) = 0, \quad k=0, \dots, m+2.$$

Ние ще покажем по-общо, че в интервала Δ' за всяко натурално l и $m \leq p$ редицата $L_n^{(m)}(t^l, x)$ равномерно клони към $l(l-1) \dots (l-m+1)x^{l-m}$.

Наистина съгласно условията а) и б) и теорема 1 за всяко натурално l е изпълнено

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta'}(L_n(t^l, x), x^l) = 0.$$

Но $x' \in K_{\Delta'}^1$, следователно и $L_n(t^l, x) \in K_{\Delta'}^1$, тогава от (6) и лема 2 следва

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta'}(L_n'(t^l, x), lx^{l-1}) = 0,$$

където

$$\Delta_1 = [c_1, d_1], \quad 0 < c_1 < c < d < d_1 < R.$$

От друга страна, $x' \in K_{\Delta'}^2$, следователно и $L_n(t^l, x) \in K_{\Delta'}^2$, т. е. $L_n'(t^l, x) \in K_{\Delta'}^1$. Оттук, (7) и лема 2 следва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta_1}(L_n''(t^l, x), l(l-1)x^{l-2}) = 0,$$

където

$$\Delta_2 = [c_2, d_2], \quad c_1 < c_2 < c < d < d_2 < d_1.$$

Продължавайки така, ние стигаме до равномерна сходимост на функциите $L_n^{(m)}(t^l, x)$ към $l(l-1) \dots (l-m+1)x^{l-m}$ в интервала $\Delta' = [c, d]$, с което исканото е доказано.

Тъй като, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta'}(f_n, f) = 0$ е да имаме хаусдорфова сходимост $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\Delta'}(f_n, f) = 0$, от теорема 3 получаваме

Теорема 3'. Нека $\{L_n\}_1^\infty$ е редица от положителни линейни оператори, които удовлетворяват условията на П. П. Коровкин на интервала $\Delta = [0, R]$ и са изпълнили от ред m за всяко m от 0 до p . Тогава ако непрекъснатата в Δ функция $f^{(m)}(x)$ е m -та производна на f , $m \leq p$, то на $\Delta' = [c, d]$, $0 < c < d < R$ е изпълнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\Delta'}(L_n^{(m)}(f, x), f^{(m)}(x)) = 0.$$

З а б е л е ж к а. Основните теореми 3 и 3' са доказани за интервала $[0, R]$. Лесно може да се види, че те са верни за произволен краен интервал $[a, b]$.

Като пример да разгледаме операторите на Бернщейн

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Известно е, че те са изпъкнали от произволен ред m [5]. Прилагайки към тях теорема 3, получаваме хаусдорфова сходимост на $B_n^{(m)}(f, x)$ към $f^{(m)}(x)$ в интервал $[\delta_1, 1-\delta_2]$, където δ_1 и $1-\delta_2$ са точки на непрекъснатост на функцията $f^{(m)}(x)$, а $f^{(m)}(x) \in D(0, 1)$. Ако $f^{(m)}(x)$ е непрекъсната функция, получаваме добре известна равномерна сходимост на производните на полиномите на Бернщейн към $f^{(m)}(x)$ [5].

Нека формулираме и една модификация на понятието изпъкнал оператор:

Дефиниция 5. Ще казваме, че редицата от линейни оператори $\{L_n\}_1^\infty$ е локално изпъкнала от ред m в точката x_0 , ако за всяка функция $f(x) \in K_A^m$, където A е някаква околност на точката x_0 , съществува такова n_0 и такова околност A' на точката x_0 , че при $n > n_0$ да имаме $L_n(f, x) \in K_{A'}^m$.

Лесно се вижда, че е в сила следната

Теорема 4. Нека редицата от линейни положителни оператори $\{L_n\}_1^\infty$ удовлетворява условията на Коровкин за интервала $[a, b]$ и е локално изпъкнала от ред m във всяка точка от интервала $[a, b]$ за всяко m от 0 до p .

Тогава ако функцията $f^{(m)}(x) \in D[a, b]$ е m -та d -производна на функцията $f(x)$, $m \leq p$ и функцията $f^{(m)}(x)$ е непрекъсната в точките c и d , където $a < c < d < b$, в интервала $A' = [c, d]$ е изпълнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{n,p}(L_n^{(m)}(f, x), f^{(m)}(x)) = 0.$$

Ние ще приложим тази теорема към редици от линейни положителни оператори, които действуват в съвкупността от всички локалномонотонни периодични функции. Операторите, които действуват в тази съвкупност, обикновено са инвариантни спрямо трансляцията

$$L(f(t+h), x) = L(f(t), x+h).$$

Веднага се вижда, че ако една редица от положителни линейни оператори удовлетворява условията на Коровкин и е инвариантна спрямо трансляциите, тя е локално изпъкнала в произволна точка x_0 от всеки ред.

Разглеждайки конкретно операторите на Фейер

$$\Phi_n(f, x) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt,$$

Джексон

$$u_n(f, x) = \frac{3}{3\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right]^4 dt,$$

$$V_n(f, x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos^{2n} \frac{t}{2} dt$$

и Поасон

$$p_e(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1-e}{1-2e \cos t + e^2} dt,$$

получаваме хаусдорфова сходимост на техните m -ти производни към m -тата d -производна на функцията $f(x)$ (ако тя съществува).

Да разгледаме линейните оператори $\{R_h^m\}_h^\infty$, дефинирани чрез

$$R_h^m(f, x) = \frac{\Delta_h^m}{h^m} f = \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} C_k^m f(x+kh).$$

Теорема 5. Ако $f^{(m)}(x)$ е m -та d -производна на функцията $f(x)$ и $f^{(m)}(x)$ е непрекъсната в точките a и b , в интервала $\Delta = [a, b]$ е изпълнено

$$\lim_{h \rightarrow 0} r_\Delta(R_h^m(f, x), f^{(m)}(x)) = 0.$$

Доказателство. Аналогично на теорема 3 тази теорема следва от това, че

$$L_n = \frac{1}{h^m} \Delta_n^m \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_m$$

са линейни положителни оператори, удовлетворяващи условията на теорема 2.

Теорема 5 показва, че прилагането на операторите R_h^m към функции, които притежават локално монотонни производни, е оправдано от изчислителна гледна точка.

Забележка. Ако операторите L_n имат вида

$$L_n(f, x) = \int f(x+t) K_n(t) dt,$$

където ядрата $K_n(t)$ представляват положителна апроксимативна единица, от теорема 5 и възможността за граничен преход под знака на интеграла относно хаусдорфово разстояние [7] следва, че ако функцията $f(x)$ има d -производна $f^{(m)}(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(f^{(m)}(x), L_n^{(m)}(f, x)) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл. и Б. Пенков. ε -энтропия и ε -емкость на пространственном пространстве на непрерывных функциях. Известия на Мат. инст. при БАН, **6**, 1962, 27—50.
2. Сендов, Бл. Линейные методы приближения периодических функций относительно одной метрики хаусдорфского типа. ДАН СССР, **160**, 1965, 1023—1025.
3. Коровкин, П. П. Линейные операторы и теория приближения. Москва, 1959.
4. Сендов, Бл. О теоремах П. П. Коровкина для сходимости последовательностей линейных положительных операторов. ДАН СССР, **177**, 1967, 518—520.
5. Popoviciu, I. Les fonctions convexes. Paris, Hermann, 1945.
6. Lupaş, A. und M. Müller. Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren. Math. Zeitschr., **98**, 1967, 208—226.
7. Сендов, Бл. и В. Попов. О некоторых свойствах хаусдорфовой метрики, Mathematica (Cluj), **8** (31), 1966, 163—172.
8. Сендов, Бл. и В. Попов. О сходимости производных линейных положительных операторов. Доклады БАН, **22**, № 5, 1969, 507—509.

Поступила на 30. IX. 1968 г.

СХОДИМОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Благовест Сендов и Васил А. Попов

(Резюме)

Работа содержит более полное изложение некоторых результатов, сообщенных предварительно в Докладах БАН. Рассматривается вопрос, поставленный М. Мюллером на Коллоквиуме по аппроксимации в Клуже в 1967 г. Проблема состоит в доказательстве теорем, подобных теоремам Коровкина [3] и Сендова [4].

Центральный результат дается в следующей теореме. Пусть $[a, b]$ интервал на действительной оси и $D[a, b]$ множество локально монотонных функций в $[a, b]$, т. е. тех функций, для которых $f(x-0)$ и $f(x+0)$ существуют и $f(x)$ находится между ними и которые, кроме того, непрерывны справа в a и слева в b . Пусть $\{L_n\}_1^\infty$ последовательность линейных положительных операторов, удовлетворяющих условиям Коровкина и выпуклых m -ного порядка для каждого m , $0 \leq m \leq p$.

Пусть $m-1$ -вая производная функции $f(x)$ является интегралом функции $\hat{f}^{(m)}(x)$, $\hat{f}^{(m)}(x) \in D[a, b]$ и $\hat{f}^{(m)}(x)$ непрерывна в точках c и d , где $a < c < d < b$. Тогда в интервале $\Delta' = [c, d]$ имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\Delta'}(L_n^{(m)}(f, x), \hat{f}^{(m)}(x)) = 0,$$

где через $r_{\Delta'}$ обозначено хаусдорфово расстояние между функциями в интервале Δ' [1]. Если $f^{(m)}(x) \in C[a, b]$, то в качестве следствия получаем равномерную сходимость $L_n^{(m)}(f, x)$ к $f^{(m)}(x)$ на интервале Δ' .

Определяется понятие последовательности линейных положительных операторов, локально выпуклых в точке x_0 m -ного порядка и формулируется для таких последовательностей теорема, аналогичная указанной выше. Даются некоторые приложения.

В конце доказана следующая теорема. Если функция $\widehat{f}^{(m)}(x) \in D[a, b]$ и непрерывна в точках a и b , то в интервале $\Delta = [a, b]$ выполнено

$$\lim_{h \rightarrow 0} r_{\Delta}(R_h^m(f, x), \widehat{f}^{(m)}(x)) = 0,$$

где

$$R_h^m(f, x) = h^{-m} \Delta_h^m f(x) = h^{-m} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \binom{m}{k} f(x + kh).$$

CONVERGENCE OF THE DERIVATIVES OF LINEAR POSITIVE OPERATORS

Blagovest Sendov and Vasil A. Popov

(Summary)

The paper contains a more detailed presentation of some results, announced in [5]. The authors consider a problem stated by M. Müller at the Colloquium on Approximation in Cluj in 1967. The problem is to prove theorems similar to those of Korovkin [3] and Sendov [4].

The main result is given by the theorem:

Let $[a, b]$ be an interval on the real axis and $D[a, b]$ be a set of locally monotone functions in $[a, b]$, i. e. such functions for which $f(x-0)$ and $f(x+0)$ exist and $f(x)$ has its value between them. They are also supposed to be continuous on the right in a and on the left in b . Let $\{L_n\}_1^\infty$ be a sequence of linear positive operators, satisfying the conditions given by Korovkin and convex of order m for every m , $0 \leq m \leq p$.

Let $\widehat{f}^{(m)}(x)$ be the function whose integral is equal to the derivative of order $m-1$ of $f(x)$, $\widehat{f}^{(m)} \in D[a, b]$ and $\widehat{f}^{(m)}(x)$ be continuous at the points c and d , where $a < c < d < b$. Then in the interval $\Delta' = [c, d]$ we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\Delta'}(L_n^{(m)}(f, x), \widehat{f}^{(m)}(x)) = 0,$$

where $r_{\Delta'}$ denotes the Hausdorff distance between the functions in the interval Δ' [1]. If $\widehat{f}^{(m)}(x) \in +C[a, b]$, we obtain a uniform convergence of $L_n^{(m)}(f, x)$ to $\widehat{f}^{(m)}(x)$ in the interval Δ' .

A definition of a sequence of linear positive operators, locally convex at the point x_0 and of order m is given and a theorem similar to the above one is formulated for such sequences.

Finally the following theorem is proved: If the function $\widehat{f}^{(m)}(x) \in D[a, b]$ is continuous at the points a and b , then in the interval $\Delta = [a, b]$ it holds

$$\lim_{h \rightarrow 0} r_{\Delta}(R_h^m(f, x), \widehat{f}^{(m)}(x)) = 0,$$

where

$$R_h^m(f, x) = h^{-m} \Delta_h^m f(x) = h^{-m} \sum_{k=0}^m (-1)^{k+m} \binom{m}{k} f(x + kh).$$