БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XI

САМЫЕ ОБЩИЕ ТЕНДЕНЦИИ И ПРОГНОЗЫ В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ

Любомир Илиев

> Бессмысленно спорить кто умнее — мозг или машина; уже теперь вполне очевидно, что мозг человека, вооруженный машиной, умнее мозга без машины.
>
> А. А. Фельдбаум

В этих словах содержится определенная характеристика нашей эпохи. Мозг человека вооружился машиной. Человечество приобрело новые возможности. Математика обогатилась новыми, чрезвычайно мощными методами и со всем своим потенциалом вступает в другие науки, во всю человеческую деятельность, стимулируя их развитие. В результате всего этого получаются крупнейшие применения; науки и практика осваивают исключительно сложные явления; создаются новые науки; сама математика развивается весьма интенсивно и в ходе этого развития складываются новые математические науки, оформляются новые гибридные науки, и в частности науки с математическим компонентом.

Как это наблюдается при любой новой эпохе, ее субъективное восприятие бывает различным. Так, некоторые математики неглижируют и даже вовсе не признают новые возможности математики и новые математические науки, а другие, наоборот, признают только их. В среде математиков наблюдается поляризация, полюсы которой нередко именуются с прибавлением саркастических эпитетов.

Эта поляризация наблюдается и в среде молодых поколений, в среде новых математиков. Происходит неправильная ориентация одаренных в математическом отношении молодых людей. Кое-где талантливых людей не направляют к новым областям математики. Тревожный ли этот факт для развития современной науки?

Как осуществлялось применение математики в тех областях, в которые она проникала в прошлом? Основы механики были заложены крупными математиками. Самые талантливые теоретики-физики поддерживали постоянные контакты с большими математическими школами. Самые замечательные теории в физике — порождение творческого сотрудничества выдающихся умов среди физиков и математиков.

В наши дни весь математический потенциал должен быть поставлен в службу умственного и духовного развития человечества, и в частности творческим применениям математики в других науках и в практике. Решающая роль в деле осуществления этого процесса приходится на долю математиков и творцов из области других наук. Это обязывает математиков с пристальным вниманием осмотреть весь фронт математических наук в наши дни, выявить все их возможности. В то же время следует направить талантливых математиков на осуществление этих возможностей в сотрудничестве с творческими умами представителей других наук и современной практики.

Решение этих вопросов ставит перед представителями математической мысли и других наук исторически ответственную задачу.

Несмотря на известные смущения в среде существующих поколений, молодые поколения принимают крупнейшие открытия и развивают их дальше. Однако, для того, чтобы обеспечить их правильную ориентацию весьма существенным представляется современно проанализировать и выяснить место и роль нового среди существующих достижений. Усвоение аксиоматического подхода в качестве постоянного аппарата современной математики было осуществлено уже после Гильберта, современники которого не поняли и не разработали этого подхода. Этот новый метод развивался наряду с существующими методами и в свою очередь содействовал их собственному дальнейшему развитию. По ее значению, современную вычислительную технику можно сравнить с открытием дифференциального и интегрального вычисления. По существу она представляет собой новую, мощную методику, которая, однако, развивается и действует наряду с утвержденным математическим аппаратом, получившим в свою очередь новое предназначение и новые возможности. Необходимо своевременно выявить и утвердить жизнеспособное, то из всей математики, что должно сыграть роль в современных тенденциях ее развития.

В наши дни этапы развития и состояние математики достигли ясной обозримости. Три крупнейших явления, основы которых лежат в математических науках, находят отражение в развитı и всех наук и сознательных человеческих деятельностях в современном обществе. Эти явления обуславливают тенденции исследований, а, следовательно, и их прогнозирование в каждой области современного математического творчества.

А. Проблема построения и реализации математических структур. Математика строит модели реальных явлений. Ее первые понятия представляют собой образ существенных для объекта ее исследования свойств действительности. При этом каждое придобытое знание является объектом исследования, в результате чего в математических исследованиях можно исходить из „более конкретных“ или „более общих“ явлений, осуществлять „более низкую“ или „более высокую“ степень абстракции. Отражая в своих моделях свойства и взаимоотношения явлений, математика создает свой символический язык. Наряду с начальными фазами создания языка оформляются и правила операции над математическими понятиями, называемыми символическим языком, который в сущности их и определяет. Однако возможности получения крупных и постоянных применений математики складываются лишь тогда, когда аппарат операций достигает высшей степени своего развития. Создание дифференциального и интегрального вычисления со своим языком и операциями знаменует собой выдающуюся эпоху в развитии науки, но математика показала все свои возможности в этой области* лишь после создания аппарата дифференциальных уравнений. Развитие и применение математики, совершенствование ее языка и аппарата поставили вопросы, связанные с необходимостью исследования и создания этого аппарата наряду с проблемой логического построения математических моделей, которую нам завещало прошлое на примере модели геометрии еще 2000 лет тому назад. Было установлено, что мощные математические методы создаются преимущественно при помощи аппарата алгебраических операций и реляций и аппарата бесконечных процессов, определяющих понятия предела и непрерывности. Таким образом алгебра и топология составили основу, на которой строились математические науки. При аксиоматическом, логическом построении данной математической модели, исходя из известной „степени абстракции" — из известных понятий, мы стремимся установить среди них те „основные понятия", из которых при помощи только формальной логики можно вывести все свойства данной модели. Так создается теория, абстрактная модель, математическая структура. Однако, аксиоматический метод не сводится только к дедуктивному выведению из „основных свойств" соответствующих свойств структуры, но предполагает и предварительное установление, „абстрагирование" этих существенных свойств из числа взаимоотношений и объектов некоторой объективной реальности, „более конкретной" или принадлежащей „более высокой ступени абстракции". Увидеть существенные математические свойства в лабиринте определенного многообразия — это один из случаев умения, „интуиции", математического творчества. Превращение аксиоматического метода в постоянный аппарат математического исследования является одной из особенностей современной математики.

После того, что были установлены элементы математического аппарата, аппарат алгебраических операций, аппарат топологии и сам аксиоматический метод, сразу встала проблема подразделения математики на абстрактные структуры и их объединения в структуре математических структур по признаку все большей степени абстракции. При этом в качестве основных выступили алгебраические структуры, структуры порядка и топологические структуры. С их помощью создаются многократные и специальные структуры. При этом новом порядке поле математических наук расширилось, так как основные структуры стали более общими. На этом поле выявились „белые пятна", которые заполнились новыми математическими науками — структурами.

Основным явлением в современной математике является проблема построения математических структур. Чтобы выявить значение этого явления в развитии современного общества в подлинном смысле этих слов, приведу два примера, которые определяют проистекающие из него тенденции в математике.

А.I. Предположим в первую очередь, что исходя из реальных явлений мы можем построить абстрактную модель этих явлений, отражающую их главные свойства. Эта абстрактная модель проще, чём реальные явления. Поэтому мы можем исследовать эту модель при помощи существующих методов и установить закономерности, которые необозримы в реальных

* См. В. М. Глушков. Конференция по теории автоматов и искусственному мышлению. Ташкент, 27—31 мая 1968.

явлениях вследствие накопления несущественных свойств. Таким образом, при помощи абстрактной модели мы можем устанавливать новые свойства в явлениях.

Теперь, наоборот, предположим, что создана некоторая структура и что существуют реальные объекты и явления, которые ее реализуют, т. е. иными словами предположим, как говорят, что структура имеет свою реализацию — изоморфную модель. В этом случае наши объекты будут обладать и всеми свойствами, которые проистекают из структуры. Таких реализаций может быть много, но нет необходимости исследовать их свойства — они заданы свойствами структуры. Это обстоятельство приводит к изумительным применениям, которые лежат в основе современной науки и технического прогресса.

В общей сложности можно сказать, что реализация некоторой модели, принадлежащей данной области, средствами другой области представляет собой применение первой области во второй.

Таким образом структуры прнменяются в развитии той области, которой они принадлежат, в развитии других наук, в развитии техники и т. д.

В том случае, когда реализация некоторой модели в данной области усвоена алгоритмически и постоянно, можно сказать, что эта модель применена или внедрена в практику.

Построение абстрактных структур представляет собой высшую умственную деятельность, которая повышает уровень научной деятельности и человеческой мысли.

Из математики проблема построения структур переходит в другие науки, в искусство. Разумеется, их отражение как и развивающиеся там явления объясняются мировоззрением, в свете которого они были восприняты.

Построение математических структур имеет значение для развития математических наук, для развития других наук, для осуществления крупных применений, для повышения уровня человеческой мысли, для культурного развития общества.

Ввиду всего этого проблема построения и реализации математических структур является исключительно актуальной в современном математическом творчестве. Однако, с развитием новых областей математики и вычислительной техники эта проблема приобретает новое предназначение и новое содержание.

А.II. Реляции и суждения формальной логики применяются в суждениях и соотношениях любой структуры; они являются частью „основных“ понятий и суждений любой структуры. Поэтому для построения абстрактных структур необходимо построение структуры элементарной логики. Несмотря на то, что эта проблема, как и проблема построения целого ряда структур, все еще не решена вполне удовлетворительным образом, вот уже больше столетия создается и развивается математическая логика.

Развитие математической логики представляет собой одну из современных тенденций в математике.

Построение математической структуры логики еще раз показывает значение математических структур для поднятия уровня человеческого сознания и культуры. В то же время оно представляет собой и конкретный пример применения математики в других науках.

Однако, при всех достигнутых результатах, как и при реализации указанной тенденции, внедряются лишь алгебраические операции над логическими элементами. Если проанализировать сказанное выше в отношении абстрактных структур, следует логически прогнозировать, что необходимо изыскать пути внедрения и топологического аппарата в логику. Другие основания этого прогноза, как и другие вытекающие из него следствия будут отмечены ниже.

Б. Математические основы вычислительной техники и кибернетики. В ходе нашего изложения была указана возможность реализации и значение реализаций данной математической структуры при помощи других средств. Установление изоморфизмов с некоторой математической структурой представляет собой чрезвычайно мощную возможность научного предвидения и крупных применений, что наблюдается повсеместно, так как любая структура имеет многочисленные реализации самого разнообразного характера. Так например, в нашу эпоху было установлено, что схемы арифметических действий в двоичной системе, таблицы верностных стоимостей дизъюнкции и конъюнкции в математической логике и некоторые диодные схемы представляют собой изоморфные модели. Из этого факта непосредственно следует принцип построения электронных вычислительных машин, осуществляющих математические и логические операции. Таким образом получилось применение математики и математической логики в технике, что привело к невиданному техническому прогрессу.

Современные электронные вычислительные устройства как раз и реализуют математические структуры. Математика лежит в основе современной вычислительной техники. В этом и заключается второе основное явление, определяющее тенденции современной математики. Развитие электронной вычислительной техники зависит от развития некоторых математико-логических структур, лежащих в основе этой техники. Но и использование вычислительной техники зависит от развития чрезвычайно сложного математического аппарата: алгоритмических языков, трансляторов, алгоритмов, программ. Таким образом оформился комплекс новых математических наук, представляющих собой направление, которое обыкновенно называется в современной математике математическим обеспечением вычислительных машин.

Направление, называемое математическим обеспечением вычислительной техники, развивается в математике на протяжении второй половины двадцатого века и лежит в основе крупнейших завоеваний, которыми отличается наша эпоха.

Развитие математического обеспечения вычислительной техники непосредственно связано с развитием и применением математической логики. Естество процессов, являющихся объектом этих исследований, обусловит дальнейшее развитие математической логики и в первую очередь введение в нее топологии. Логические основания этого прогноза были изложены выше. Здесь мы привели важный факт иного порядка, обуславливающий необходимость такого развития.

Современные вычислительные машины — это машины с программным действием. Они в состоянии выполнить программы соответствующих известных алгоритмов, т. е. некоторых кибернетических процессов. И наоборот — чтобы обеспечить осуществление на электронно-вычислительной машине данного естественного или искусственного кибернетического процесса, необходимо найти его алгоритм.

Алгоритмы представляют собой математические модели тех кибернетических процессов, которые можно моделировать на вычислительных машинах. (В отличие, например, от кибернетических процессов в бионике, которые можно моделировать при помощи других средств, но без посредничества математических моделей.) В этом смысле, следовательно, математика лежит и в основе исследования кибернетических процессов, которые программируются на электронных вычислительных машинах. С другой стороны, возможности электронных машин ставят по-новому проблему математического моделирования.

В. Математическое моделирование (вопрос математизации науки). Структуры классической математики были получены преимущественно посредством обработки по пути все более возрастающей абстракции математических моделей в области физических наук. Усовершенствование и превращение в математический метод подхода создания математических структур, открытие вычислительных машин и ступень, достигнутая развитием других наук в настоящую эпоху, привели к возможности построения математических моделей во всех областях человеческого знания. В наши дни математические модели и математические методы применяются, например, в биологии, экономике, языкознании точно таким же образом, как они применялись до сих пор в физических науках. Теперь математика находится в таком же близком родстве с другими науками, в каком она была до сих пор с физикой. Исследование при помощи математических средств математических моделей, принадлежащих известной области данной науки, называется условно „математизацией“ этой области. Это явление, условно называемое математизацией наук, имеет огромное значение для развития всех наук, и в первую очередь математических наук.

„Математизация наук“ представляет собой третье явление в современной математике, которое определяет тенденции и направления ее развития.

В связи с этим следует отметить, что не все модели, которые получаются в результате рассмотрения явлений в различных науках, можно исследовать при помощи наличного математического аппарата и существующих математических структур, полученных главным образом путем развития моделей физики. Так, мы приходим к математическому аппарату и математическим структурам, совершенно новым для математики. Возможность получения математических структур, не изоморфных с существующими, открывает исключительные перспективы перед математическим творчеством. В то же время большинство моделей, которое исследуется в различных науках, являются моделями управляемых процессов. Таким образом складываются возможности развития кибернетики во всех ее аспектах.

С другой стороны, чрезвычайная сложность современных математических моделей разных наук категорически обуславливает необходимость их обработки на современных вычислительных машинах. А это со своей стороны ведет к необходимости записывать их на языке, совершенно различном от существующего до сих пор; основным элементом в этом новом языке является алгоритм или его программа. Характерным для современного этапа развития математического творчества в этом направлении является создание нового формального языка в математике. Само собой разумеется, что этот язык должен иметь свой математический аппарат — например свою алгебру и топологию. Современные ученые* считают, что до конца двадцатого века творчество математиков будет занято в основном созданием алгебры и топологии этого языка, а также, конечно, и самого этого языка. Таков один из основных прогнозов с исключительным значением для развития математики. Если же мы попытаемся экстраполировать и выйти за рамки этого периода, то следует полагать, что после него наступит период аксиоматизации аппарата этого языка при помощи основных, „очевидных" алгоритмов или программ. Этот период будет уже периодом овладения „искусственного интеллекта".

В последнюю очередь отметим, что создание нового математического языка и его аппарата оказывает влияние на развитие всех областей математики, всей математики в целом. С другой стороны, постепенно складывается возможность использовать вычислительную технику и в развитии всех областей математики. А это также оказывает влияние на всю математику в целом.

Мы затронули математический аспект развития вычислительной техники, кибернетики и математического моделирования. В основе этих явлений современного общества лежит математика; их развитие пользуется математическими результатами и математическими методами, однако, в принципе, они порождаются и их проблемы лежат в развитии других наук и самого общества в целом. Когда известная проблема, принадлежащая, например, другой науке, поставлена достаточно ясно, ее можно сформулировать математически и получить из нее математическую модель. Если существует математическая скруктура, изоморфная этой модели, то эта модель обладает свойствами структуры, — в этом случае получается непосредственное применение математики в данной науке. Если, однако, для данной модели не существует изоморфной математической структуры, возникает необходимость расширить некоторую из существующих или создать новую математическую структуру. Таким образом проблемы данной науки обогащают математические структуры. И именно в таком смысле явления как вычислительная техника, кибернетика и математическое моделирование расширяют поле математических структур. Они создают соответствующие математические направления, в которых получаются новые математические области и методы, и в конечном итоге новые математические структуры. Этот двусторонний процесс применения математических знаний и их расширения в ходе их применения всегда сопутствовал развитию математики на протяжении всей ее истории вплоть до наших дней. Однако, при различных эпохах цикл этого взаимодействия расширялся и до недавнего времени проходил преимущественно через механику, физику и технику, а в наши дни он охватывает почти все науки и современные явления жизни общества.

* См. В. М. Глушков, цит. соч.

Эти самые общие прогнозы и самые общие тенденции в отношении развития современной математики обусловлены тремя крупнейшими для всего современного общества явлениями, зародившимися в середине настоящего столетия в недрах математических наук: построение системы абстрактных структур, вычислительная техника и осуществление возможности математического моделирования природных и общественных явлений.

Участие в целостном развитии фронта математических наук, что предполагает сравнительно не очень дорогое материальное обеспечение, является необходимостью для каждой страны, маленькой или большой, если иметь в виду следующее:

а) Математика возвышает и углубляет человеческую мысль, вносит новые идеи в обществе. Развитие абстрактных структур, математической логики, структуры „электронного мозга", представляют собой самые глубокие и блестящие достижения человеческого гения. Идеи современной физики, кибернетики, структурализма в науке и искусстве уходят своими корнями в математику. На протяжении тысячелетий, как и в наши дни, наблюдается тесное взаимоотношение в развитии философии и математики. Нет необходимости говорить о том огромном влиянии, которое оказывает в наши дни математика в средней школе, как и при любом обучении. В этих ее аспектах математика похожа на общественные науки и на философию.

б) Математика всегда лежит в основе технического прогресса. Блестящей иллюстрацией этого факта является современная вычислительная техника. Развитие всей техники в целом связано со знанием математических методов.

в) В наши дни при помощи математики и математических методов исследуются сложные проблемы всех частных наук.

Необходимость в гармоническом развитии и комплексном использовании всех основных расслоений современной математики должна быть совершенно ясной для всех специалистов в области математики. Это можно осуществить лишь в том случае, если молодые специалисты, несмотря на то для какого профиля математики они подгатавливаются, будут получать первоначальные познания в отношении общего фундамента современной математики. Талантливые специалисты, вооруженные таким общим видением, будут содействовать лучше всего развитию прогресса во всем мире.

НАЙ-ОБЩИ ТЕНДЕНЦИИ И ПРОГНОЗИ В СЪВРЕМЕННАТА МАТЕМАТИКА

Любомир Илиев

(Резюме)

В днешно време трябва целият математически потенциал да бъде поставен на разположение на умственото и духовното развитие на човечеството и по-специално на приложението на математиката в другите науки и в практиката. Решаваща роля в осъществяването на този процес трябва да играят математиците и творците от другите науки. Това задължава математиците да имат ясен поглед върху целия днешен фронт на математическите науки и всички техни възможности. Същевременно трябва да се насочат надарени математици към приложението на тези възможности в сътрудничество с творците от другите науки и практиката.

При решаването на тези въпроси представителите на математиката заедно с другите учени носят историческа отговорност.

Етапите на развитието и състоянието на математиката достигнаха ясна обозримост. Три крупни явления, които лежат в основите на математическите науки, се отразяват в развитието на всички науки и съзнателни човешки дейности на съвременното общество: проблемът за строежа и реализирането на математическите структури, математическите основи на изчислителната техника и кибернетиката, математическото моделиране. Тези явления определят тенденциите на изследванията, а следователно и прогнозирането на тези тенденции във всяка област на съвременното математическо творчество.

Необходимостта от хармонично развитие и комплексно използване на всички основни слоеве на съвременната математика трябва да бъде съвършено ясна за всички специалисти в областта на математиката. Това може да се осъществи, ако младите специалисти владеят независимо от своя профил основни познания от общия фундамент на съвременната математика. Талантливи математици, въоръжени с такива общи представи, ще съдействуват най-добре за развитието на прогреса в целия свят.

ALLGEMEINSTE TENDENZEN UND PROGNOSEN DER MATHEMATIK DER GEGENWART

Ljubomir Iliev

(Zusammenfassung)

Heutzutage muß das ganze mathematische Potential der geistigen Entwicklung der Menschheit und, insbesondere der Anwendung der Mathematik in den anderen Wissenschaften und der Praxis zur Verfügung gestellt werden. In diesem Vorgang haben die Mathematiker zusammen mit den Schöpfern der anderen Wissenschaften eine entscheidende Rolle zu spielen. Alldies for-

dert die Mathematiker auf die ganze heutige Front der mathematischen Wissenschaften und deren alle Möglickeiten klar zu übersehen. Gleichzeitig müssen sich begabte Mathematiker, in Zusammenarbeit mit Schöpfern aus den anderen Wissenschaften und der Praxis, der Anwendung dieser Möglichkeiten zuwenden.

Bei der Lösung all dieser Fragen tragen die Vertreter der Mathematik, zusammen mit den anderen Wissenschaftlern, eine historische Verantwortung.

Die Entwicklungsstufen und der Zustand der Mathematik haben eine klare Übersichtbarkeit erreicht. Drei markante Erscheinungen, die im Grunde der mathematischen Wissenschaften liegen, spiegeln sich in der Entwicklung aller Wissenschaften und bewußten menschlichen Tätigkeiten der gegenwärtigen Gesellschaft ab: das Problem des Aufbaues und der Verwirklichung der mathematischen Strukturen, die mathematischen Grundlagen der Rechentechnik und der Kybernetik, das mathematische Modellieren. Diese Erscheinungen bestimmen die Tendenzen der Forschung, folglich auch die Prognose dieser Tendenzen in jedem Gebiet des gegenwärtigen mathematischen Schaffens.

Die Notwendigkeit einerharmonischen Entwicklung aller grundlegenden Schichten der heutigen Mathematik muß jedem Mathematiker klar sein. Dies läßt sich verwirklichen, wenn die jungen Fachleute unabhängig von ihrem Profil grundlegendes Wissen aus dem allgemeinen Fundament der heutigen Mathematik beherrschen. Begabte Mathematiker, gerade mit solchen allgemeinen Vorstellungen ausgerüstet, können erstrecht zum Fortschritt der heutigen Welt beitragen.