БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XII

ИЗВЕЖДАНЕ УРАВНЕНИЯТА НА ДВИЖЕНИЕТО НА МАТЕРИАЛНИТЕ СИСТЕМИ, БЕЗ ДА СЕ ИЗПОЛЗВАТ ПРИНЦИПЪТ НА ДАЛАМБЕР — ЛАГРАНЖ И ПРИНЦИПЪТ НА ХЬОЛДЕР

Иван А. Ценов

В тази работа се извеждат уравненията на движението на холономна система и на нехолономна система с линейна и нелинейна връзка от първи и втори ред, т. е. връзка, изразена чрез неинтегруеми диференциални уравнения — линейни и нелинейни — относно обобщените скорости и ускорения, и с други нехолономни връзки, без да се използват общото уравнение на динамиката, което изразява принципа на Даламбер — Лагранж, и принципът на Хьолдер.

За извеждане уравненията на движението на холономна система от общото уравнение на динамиката ние ще дадем друг вид на това уравнение, в което ще фигурират диференциалите $[d\ddot{q}_i]=d\ddot{q}_1, d\ddot{q}_2, \ldots, d\ddot{q}_s$ на обобщените ускорения $[\ddot{q}_i]$ на системата вместо вариациите $[\delta q_i]$ на обобщените координати $[q_i]$. Това уравнение ще използваме, за да изведем и уравненията на движението на нехолономна система.

1. Преди да намерим новото общо уравнение на динамиката, ние ще разгледаме въпроса: виртуални (възможни) премествания на системата, съвместими с холономните връзки (или допустими от връзките) в даден момент t.

Като се използват уравненията на холономните връзки на системата, съставена от n материални точки M_λ, векторните координати на тия точки се дават с равенствата

$$\overrightarrow{OM_\lambda}=\vec{M}_\lambda([q_i], t) \quad (\lambda=1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

гдето обобщените координати $[q_i]$ са дадени функции $[q_i(t)]$ на времето t, които се получават от интегрирането при дадени начални условия на диференциалните уравнения на движението на системата.

Равенствата (1) показват, че за даден момент t числените стойности на независимите обобщени координати определят в този момент положението на точките на системата, т. е. положението на системата в нейното реално движение под действието да дадените сили на системата.

Обобщените координати са произволни и независими функции $[q_i(t)]$ на времето t, които функции представляват общото решение на диференциалните уравнения на движението на системата и съдържат $2s$ произволни константи. Такива функции са и производните $[\dot{q}_i(t)]$, $[\ddot{q}_i(t)]$ на функциите $[q_i(t)]$. Тогава диференциалите $[dq_i]$, $[d\dot{q}_i]$, $[d\ddot{q}_i]$ на $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$, $[\ddot{q}_i]$ са произволни и независими безкрайно малки функции на t от вида $[\varphi_i(t)\varepsilon]$, гдето $[\varphi_i(t)]$ са произволни и независими функции на t, ε — произволна малка постоянна величина. Тези диференциали могат да се заменят помежду си.

Ако към функциите $[q_i(t)]$, които определят в даден момент t положението на системата в реалното ѝ движение, прибавим произволните и незивисими диференциали $[dq_i]$, образуват се нови произволни и независими функции на t:

$$(2) \qquad \bar{q}_i(t)=q_i(t)+dq_i(t) \quad (i=1,\ 2,\dots,s).$$

За дадения момент t числените стойности на $[\bar{q}_i(t)]$, получени от равенствата (2), определят положението на системата в безкрайно близките съседни кинематични движения до реалното движение, които движения се определят с безкрайно близките функции $[\bar{q}_i(t)]$ на функциите $[q_i(t)]$. Равенствата (2), записани във вида $\bar{q}_i(t)-q_i(t)=dq_i(t)$, $i=1,\ 2,\dots,s$, показват, че диференциалите $[dq_i(t)]$ са нарастванията на обобщените координати $[q_i(t)]$ на системата при нейното преминаване от реалното движение в съседните движения. В това преминаване координатите $q_i(t)$ нарастват с $[dq_i(t)]$, без да се променя времето t, т. е. диференциалът на t е равен на нула ($dt=0$).

За да се получи виртуално (възможно) преместване на системата, съвместимо с холономните връзки (или допустимо от връзките) в даден момент t, достатъчно е да се дадат на независимите обобщени координати $[q_i]$ произволните и независими нараствания или диференциали $[dq_i]$, които са безкрайно малки функции на t. Понеже виртуалното преместване на системата в момента t е дефинирано с диференциалите $[dq_i]$ на $[q_i]$, тогава от (1) се получават съответствуващите нараствания или диференциали на векторните координати $\overrightarrow{OM}_\lambda$ на различните точки M_λ на системата, т. е. получават се произволните виртуални премествания на системата, съвместими с връзките в този момент. Тези премествания се дават с векторните уравнения

$$(3) \qquad d\overrightarrow{OM}_\lambda=\frac{\partial\overrightarrow{M}_\lambda}{\partial q_i}\,dq_i \quad (\lambda=1,\ 2,\dots,n),\ i=1,\ 2,\dots,s.^*$$

Ако уравненията, които изразяват холономните връзки, не зависят от времето t или ако холономните връзки са постоянни, векторните координати на различните точки на системата зависят само от обобщените координати: $\overrightarrow{OM}_\lambda=\overrightarrow{M}_\lambda[q_i]$ ($\lambda=1,\ 2,\dots,n$). Тогава реалното преместване на системата е вместено във виртуалните премествания, дадени с (3). Ако връзките не са постоянни, реалното преместване на системата се получава от (1):

---

* Приемаме тензорното правило за сумиране членове с еднакви индекси, например i; в такива случаи пишем $i=1,\ 2,\dots,s$ незаградено в скоби.

$$d\overrightarrow{OM}_\lambda = \frac{\partial \overrightarrow{M}_\lambda}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \overrightarrow{M}_\lambda}{\partial t} dt, \quad i=1, 2, \dots, s;$$

то също се включва във виртуалните премествания на системата, съвместими с връзките за даден момент t, понеже при това преместване, както видяхме по-горе, $dt=0$.

2. Да намерим сега общото уравнение на динамиката и да изведем от него уравненията на движението на холономна система. Нека $\overrightarrow{F}_\lambda$ са дадените сили, които действуват на различните точки M_λ на системата, $-m_\lambda \ddot{\overrightarrow{M}}_\lambda$ са инерчните сили на точките M_λ с маси m_λ и R_λ са реакциите (силите) на връзките без триене върху точките M_λ. Съгласно принципа на Даламбер* имаме равновесие във всеки момент между трите вида сили, приложени на всяка точка M_λ от системата; следователно за едно какво да е виртуално преместване сумата от виртуалните работи на тия сили е равна на нула. Но ако това виртуално преместване е съвместимо с връзките, които съществуват в даден момент t, сумата от виртуалните работи на силите на връзките е равна на нула съгласно теоремата за виртуалните работи на независими виртуални премествания; прочее сумата от виртуалните работи на инерчните сили и на дадените сили е още нула:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (-m_\lambda \ddot{\overrightarrow{M}}_\lambda + F_\lambda) d\overrightarrow{OM} = 0.$$

Въз основа на (3) получаваме общото уравнение на динамиката

(4) $$(-P_i + Q_i) dq_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, s,$$

гдето

$$P_i = \sum_{\lambda=1}^{n} m_\lambda \ddot{\overrightarrow{M}}_\lambda \frac{\partial \overrightarrow{M}_\lambda}{\partial q_i} \qquad Q_i = \sum_{\lambda=1}^{n} F_\lambda \frac{\partial \overrightarrow{M}_i}{\partial q_i} \qquad (i=1, 2, \dots, s).$$

За да бъде проверено това уравнение, каквито и да бъдат произволните и независими диференциали $[dq_i]$, трябва

(5) $$P_i - Q_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s);$$

това са уравненията на движението на холономна система.

На уравнението (4) и на уравненията (5) ще дадем друг вид, като въведем в тях функцията

(6) $$K = \frac{1}{2} (\ddot{T} - 3\ddot{T}_0) - Q_i \ddot{q}_i,$$

гдето T е кинетичната енергия на системата, която е функция на t, $[q_i]$,

* Даламбер работи с вариациите $[\delta q_i]$ на $[q_i]$, а ние работим с диференциалите $[dq_i]$ на $[q_i]$, понеже виртуалното преместване на системата в даден момент t е дефинирано с $[dq_i]=[\delta q_i]$.

$[\dot{q}_i]$; T_0 е функцията T, разгледана като функция само на t и $[q_i]$, т. е. разгледана при фиксирани обобщени скорости; $[Q_i]$ са обобщените сили. K е функция на t, $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$, $[\ddot{q}_i]$, но ще се разгледа като функция само на обобщените ускорения $[\ddot{q}_i]$.

В нашите работи [1], [2] ние доказахме, че

$$P_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3\frac{\partial \ddot{T}_0}{\partial \ddot{q}_i}\right) \quad (i=1,\ 2, \ldots, s)$$

и уравненията на движението (5) на холономна система стават

(7)
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}} - \frac{3\ddot{T}_0}{\partial \ddot{q}_i}\right) - Q_i = 0 \quad (i=1,\ 2, \ldots, s).$$

Но тези уравнения се получават, като приравним на нула частните производни на функцията K спрямо $[\ddot{q}_i]$:

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3\frac{\partial \ddot{T}_0}{\partial \ddot{q}_i}\right) - Q_i = 0.$$

Общото уравнение на динамиката (4) приема вида

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}}\, d\ddot{q}_i = 0.$$

Заменяме $[dq_i]$ с $[d\ddot{q}_i]$ и получаваме новото общо уравнение на динамиката

(8)
$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}}\, d\ddot{q}_i = 0, \quad i=1,\ 2, \ldots, s,$$

което се получава, като приравним на нула пълния диференциал на функцията K

$$dK \equiv \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}\, d\ddot{q}_i - 0.$$

Да изведем от това уравнение уравненията (7) на холономна система.

Понеже диференциалите $[d\ddot{q}\ ]$ в уравнението (8) са произволни и независими, то за да бъде проверено това уравнение, каквито и да са $[d\ddot{q}_i]$, трябва коефициентите $\partial K/\partial \ddot{q}_i$ на $[d\ddot{q}_i]$ да бъдат поотделно равни на нула. Прочее получават се уравненията (7).

3. За нехолономна система диференциалите $[d\ddot{q}_i]$ в уравнението (8) не са независими. Те са свързани с линейни уравнения относно $[d\ddot{q}_i]$, получени, като се диференцират уравненията, които изразяват нехолономните връзки. За линейни и нелинейни връзки от първи ред диференцират се относно t уравненията на връзките, като се задържат само членовете с $[\dot{q}_i]$, и после така получените уравнения се диференцират, като се задържат само членовете с $[d\ddot{q}_i]$. Уравненията на линейни и нелинейни връзки от втори ред съдържат $[\ddot{q}_i]$ затова тези уравнения се само диференцират, като се задържат членовете с $[d\ddot{q}_i]$.

Да разгледаме разните нехоломни връзки, като за съкращение в писането допускаме, че броят на уравненията на всяка нехолономна връзка е равен на l.

1) Линейна връзка от първи ред с уравнения

$$A_{ri}\dot{q}_i + A_r = 0 \quad (r=1, 2, \ldots, l), \quad i=1, 2, \ldots, s;$$

A_{ri}, A_r — функции на t, $[q_i]$. Съгласно казаното по-горе диференцираме два пъти; получават се уравненията

$$A_{ri}\ddot{q}_i = 0, \quad A_{ri}d\ddot{q}_i \equiv A_{r\alpha}d\ddot{q}_\alpha + A_{r\beta}d\ddot{q}_\beta = 0,$$

$\alpha=1, 2, \ldots, k$; $\beta=k+1, k+2, \ldots, k+l$. Решенията на тия l уравнения с неизвестни $[d\ddot{q}_\beta]$ — на брой също l — имат вида

(9) $$d\ddot{q}_\beta = a_{\beta\alpha}d\ddot{q}_\alpha \quad (\beta=k+1, k+2, \ldots, k+l), \quad \alpha=1, 2, \ldots, k.$$

Ако в уравнението (8), написано във вида

(8′) $$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} d\ddot{q}_i \equiv \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} d\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} d\ddot{q}_\beta, \quad \alpha=1, 2, \ldots, k;$$

$$\beta=k+1, k+2, \ldots, k+l,$$

заменим зависимите $[d\ddot{q}_\beta]$ с техните изрази чрез независимите $d\ddot{q}_\alpha$, дадени с (9), получава се общото уравнение на динамиката за нехолономна система:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} a_{\beta\alpha}\right) d\ddot{q}_\alpha = 0.$$

Понеже $[d\ddot{q}_\alpha]$ са произволни и независими, уравненията на движението са

(10) $$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} a_{\beta\alpha} = 0 \quad (\alpha=1, 2, \ldots, k), \quad \beta=k+1, k+2, \ldots, k+l,$$

$a_{\beta\alpha}$ — функции на t, $[q_i]$.

2) Нелинейна връзка от първи ред с уравнения $f_r(t, [q_i], [\dot{q}_i])=0$. Диференцират се два пъти:

$$\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = 0; \qquad \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_i} d\ddot{q}_i = \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\alpha} d\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_\beta} d\ddot{q}_\beta = 0.$$

От последните уравнения получаваме $d\ddot{q}_\beta = a_{\beta\alpha}d\ddot{q}_\alpha$ и тогава от уравнението (8′) извеждаме уравненията на движението (10), но сега $a_{\beta\alpha}$ са функции на t, $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$.

3) Линейна връзка от втори ред с уравнения $A_{r\alpha}\ddot{q}_i + A_r = 0$, A_{ri}, A_r — функции на t, $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$. Диференцираме уравненията

$$A_{ri}d\ddot{q}_i \equiv A_{r\alpha}d\ddot{q}_\alpha + A_{r\beta}d\ddot{q}_\beta = 0.$$

От тези уравнения и уравнения (8′) намираме уравненията на движението (10), като $a_{\beta\alpha}$ са функции на t, $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$.

4) Нелинейна връзка от втори ред с уравнения

$$f_r(t, [q_i], [\dot{q}_i], [\ddot{q}_i]) = 0 \quad (r=1, 2, \ldots, l).$$

Диференцираме уравненията

$$\frac{\partial f_r}{\partial \ddot{q}_i} d\ddot{q}_i \equiv \frac{\partial f_r}{\partial \ddot{q}_\alpha} d\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial f_r}{\partial \ddot{q}_\beta} d\ddot{q}_\beta = 0.$$

От тези уравнения и уравнението (8′) се извеждат уравненията (10), като $a_{\beta\alpha}$ са функции на t, $[q_i]$, $[\dot q_i]$, $[\ddot q_i]$.

5) Други нелинейни връзки от първи и втори ред, които могат да се напишат под формата

$$A_{ri}dq_i + A_r dt = 0, \quad A_{ri}d\dot q_i + A_r dt = 0 \quad (r=1, 2, \dots, l),$$

A_{ri}, A_r — функции на t, $[q_i]$, $[\dot q_i]$ и на t, $[q_i]$, $[\dot q_i]$, $[\ddot q_i]$. Тези уравнения не изразяват линейна връзка от първи ред (гдето A_{ri}, A_r — функции на t $[q_i]$) и линейна връзка от втори ред (A_{ri}, A_r — функции на t, $[q_i]$, $[\dot q_i]$).

Понеже ще използваме уравненията (8′), за да изведем уравненията на движението, сменяме в (11) произволните и независими $[dq_i]$ и $[d\dot q_i]$ с $[d\ddot q_i]$, като членовете $A_r dt$ не се пишат, тъй като функцията K в уравнението (8′) се разглежда при фиксирано t и тогава $dt=0$. Получават се уравненията

$$A_{ri}d\ddot q_i \equiv A_{r\alpha}d\ddot q_\alpha + A_{r\beta}d\ddot q_\beta = 0$$

с неизвестни $[d\ddot q_\beta]$, на които решенията имат вида $d\ddot q_\beta = a_{\beta\alpha}d\ddot q_\alpha$. Уравнението (8′) става

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \ddot q_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot q_\beta} a_{\beta\alpha}\right) d\ddot q_\alpha = 0.$$

Понеже $[d\ddot q_\alpha]$ са произволни и независими, получават се уравненията на движението (10); $a_{\beta\alpha}$ — функции на t, $[q_i]$, $[\dot q_i]$ и на t, $[q_i]$, $[\dot q_i]$, $[\ddot q_i]$.

Ако един член на сумите $A_{ri}dq_i$ и $A_{ri}d\dot q_i$ не съдържа множител dq_i и $d\dot q_i$, този член с индекс 1 поставяме на първо място в уравнението (12) получаваме

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot q_1} d\ddot q_1 + \left(\frac{\partial K}{\partial \ddot q_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot q_\beta} a_{\beta\alpha}\right) d\ddot q_\alpha = 0,$$

$$(\alpha = 2, 3, \dots, k; \quad \beta = k+2, k+3, \dots, k+l.$$

Диференциалите $d\ddot q_1$ и $d\ddot q_\alpha$ са произволни и независими. Уравненията на движението на брой k са

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot q_1} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial \ddot q_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot q_\beta} a_{\beta\alpha} = 0$$

$$(\alpha = 2, 3, \dots, k), \; \beta = k+2, k+3, \dots, k+l.$$

4. На уравненията на движението на нехолономна система (10) ще дадем друга форма, като въведем функцията

$$R = \frac{1}{2}(\ddot T - 3\ddot T_0),$$

в която форма ще фигурират обобщените сили на системата. Функцията

$$K = K([\ddot q_\alpha], [\ddot q_\beta]) = R([\ddot q_\alpha], [\ddot q_\beta]) - (Q_\alpha \ddot q_\alpha + Q_\beta \ddot q_\beta)$$

и уравненията (10) приемат формата

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot q_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \ddot q_\beta} a_{\beta\alpha} = Q_\alpha + Q_\beta a_{\beta\alpha}, \quad a_{\beta\alpha} = \frac{\partial q_\beta}{\partial \ddot q_\alpha} \tag{13}$$

$(\alpha=1, 2, \ldots, k)$, $\beta=k+1, \; k+2, \ldots, k+l$, гдето $P_\alpha=Q_\alpha+Q_\beta a_{\beta\alpha}$ са обобщените сили на нехолономната система, а Q_α и Q_β — обобщените сили на холономна система.

Ние ще приложим тия уравнения на простия пример: с механизъм се определя система от две тела, в която движението на едното тяло — въртене около ос с ъглова скорост $\dot{\varphi}_1$ — предизвиква движението на другото тяло — въртене около ос с ъглова скорост $-\dot{\varphi}_2$. Нехолономната връзка на системата се изразява с неинтегруемото уравнение

$$\varrho(t)\dot{\varphi}_1-r\dot{\varphi}_2=0. \tag{14}$$

Обобщените координати на системата, разгледана като холономна — без връзката (14), са ъглите φ_1 и $-\varphi_2$. Кинетичната енергия е

$$T=\frac{1}{2}\,(I_1\dot{\varphi}_1^2+I_2\dot{\varphi}_2^2).$$

Оттук

$$\dot{T}=I_1\dot{\varphi}_1\ddot{\varphi}_1+I_2\dot{\varphi}_2\ddot{\varphi}_2, \qquad \ddot{T}=I_1\ddot{\varphi}_1^2+I_2\ddot{\varphi}_2^2+\cdots; \qquad T_0=0.$$

Тогава функцията

$$R=\frac{1}{2}\,(I_1\ddot{\varphi}_1^2+I_2\ddot{\varphi}_2^2). \tag{15}$$

За примера уравненията (13) ще се приложат за $\alpha=1$, $\beta=1+1=2$; получава се само едно уравнение

$$\frac{\partial R}{\partial\ddot{\varphi}_1}+\frac{\partial R}{\partial\ddot{\varphi}_2}\,a_{1,2}=Q_1+Q_2a_{12} \tag{16}$$

Трябва да се намерят изразите на a_{12}, Q_1, Q_2. От (14) имаме

$$\dot{\varrho}\dot{\varphi}_1+\varrho\ddot{\varphi}_1=r\ddot{\varphi}_2, \quad \ddot{\varphi}_2=\frac{\varrho}{r}\,\ddot{\varphi}_1+\frac{\dot{\varrho}}{r}\,\dot{\varphi}_1, \qquad a_{12}=\frac{\partial\ddot{\varphi}_2}{\partial\ddot{\varphi}_1}=\frac{\varrho}{r}$$

Обобщените сили Q_1 и Q_2 се намират от уравненията на виртуалните работи на дадените сили $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на телата:

$$F_1d\overrightarrow{OM}_1=X_1dx_1+Y_1dy_1+Z_1dz_1=N_1d\varphi_1,$$

$$\vec{F}_2d\overrightarrow{OM}_2=-N_2d\varphi_2 \quad (dt=0);$$

тогава $Q_1=N_1$, $Q_2=-N_2$. Обобщената сила на нехолономната система е

$$P_1=N_1+\frac{\varrho}{r}\,N_2.$$

Уравнението на движението на нехолономната система (16) въз основа на (15) е

$$I_1\ddot{\varphi}_1+I_2\ddot{\varphi}_2\,\frac{\varrho}{r}=P_1, \tag{17}$$

гдето $\ddot{\varphi}_2=\frac{\varrho}{r}\,\ddot{\varphi}_1+\frac{\varrho'}{r}\,\dot{\varphi}_1$.

От това уравнение и уравнението (14) се намират обобщените координати φ_1 и φ_2 във функции на t.

Уравнението (17) се получава и така: в (15) поставяме израза на $\ddot{\varphi}_2$ чрез $\ddot{\varphi}_1$; получава се функцията

$$R_e = \frac{1}{2}\left[I_1\ddot{\varphi}_1^2 + I_2\left(\frac{\varrho}{r}\ddot{\varphi}_1 + \frac{\varrho'}{r}\dot{\varphi}_1\right)^2\right]$$

и уравнението на движението е

$$\frac{\partial R_e}{\partial \ddot{\varphi}_1} \equiv I_1\ddot{\varphi}_1^2 + I_2\frac{\varrho^2}{r^2}\varphi_1 + I_2\frac{\varrho\varrho'}{r^2}\dot{\varphi}_1 = P_1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ценов, И. Върху интегралните вариационни принципи в аналитичната динамика. Год. на Соф. Унив., Физ.-мат. фак., **52**, 1964, 229.
2. Ценов, И. Об одной новой форме уравнений аналитической динамики. ДАН СССР, **33**, № 1, 1953, 21.

Постъпила на 24. XII. 1965 г.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ СИСТЕМ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИНЦИПА D'ALEMBERT — LAGRANGE И ПРИНЦИПА HÖLDER

Иван А. Ценов

(Резюме)

Если ввести функцию

$$K = \frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0) - Q_i\ddot{q},$$

где T — кинетическая энергия системы, зависящая от времени t, обобщенных координат $[q_i] = q_1, q_2, \ldots, q_s$ и обобщенных скоростей $[\dot{q}_i]$, а T_0 — функция T, рассматриваемая как функция только величин t и $[q_i]$, и $[Q_i]$ — обобщенные силы, тогда K является функцией t, $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$, $[\ddot{q}_i]$, но рассматривается как функция только обобщенных ускорений $[\ddot{q}_i]$. Полный дифференциал функции K, приравненный нулю, есть новое общее уравнение динамики

$$dK \equiv \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} d\ddot{q}_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

где дифференциалы $[d\ddot{q}_i]$ — произвольные бесконечно малые функции t.

Для голономных систем эти дифференциалы независимы; тогда дифференциальные уравнения движения голономных систем будут

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3\frac{\partial \ddot{T}_0}{\partial \ddot{q}_i}\right) - Q_i = 0, \; i = 1, 2, \ldots, s,$$

из которых находим обобщенные координаты как функции времени t.

Для неголономных систем $[d\ddot{q}_i]$ не независимы. Они связаны линейными уравнениями относительно $[d\ddot{q}_i]$, полученными дифференцированием уравнений, которые выражают неголономные связи, сохраняя только члены с $[d\ddot{q}_i]$. Допускаем, что число уравнений неголономных связей равно l.

Общее уравнение динамики запишем так:

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i}\, d\ddot{q}_i \equiv \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha}\, d\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta}\, d\ddot{q}_\beta = 0;\quad \alpha = 1,\ 2, \ldots, k;\ \beta = k+1, \ldots, k+l\,(\quad s).$$

Решения l уравнений связей с неизвестными $[d\ddot{q}_\beta]$, число которых также l, имеют вид

$$d\ddot{q}_\beta = a_{\alpha\beta}\, d\ddot{q}_\alpha \quad (\beta = k+1,\ k+2, \ldots, k+l);\quad \alpha = 1,\ 2, \ldots, k.$$

Заменяем зависимые $[d\ddot{q}_\beta]$ их выражениями через независимые $[dq_\alpha]$ в общем уравнении динамики; получается общее уравнение динамики для неголономной системы

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta}\, a_{\beta\alpha}\right) d\ddot{q}_\alpha = 0.$$

Так как $[d\ddot{q}_\alpha]$ — произвольны и независимы, то получаются дифференциальные уравнения движения для любой неголономной системы

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta}\, a_{\beta\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2, \ldots, k);\quad \beta = k+1,\ k+2,\ k+l;$$

$a_{\beta\alpha}$ — функции t, $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$, $[\ddot{q}_i]$. К этим k уравнениям прибавляем и l уравнений связей; получаются $k+l=s$ уравнений, из которых находим $[q_i]$ как функции времени t.

DEDUCTION OF THE MOVEMENT EQUATIONS OF MATERIAL SYSTEMS WITHOUT APPLYING THE PRINCIPLES OF D'ALEMBERT-LAGRANGE AND HÖLDER

Ivan A. Cenov

(Summary)

If we introduce the function

$$K = \frac{1}{2}\,(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0) - Q_i\ddot{q}_i,$$

wherein T is the kinetic energy of the system, function of the time t, of the generalized coordinates $[q_i] = q_1,\ q_2, \ldots,\ q_s$ and of the generalized velocities $[\dot{q}_i]$, T_0 is the function T, considered as a function only of t and of $[q_i]$, and $[Q_i]$ are the generalized forces, then K is a function of t, $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$,

$[\ddot{q}_i]$, but is considered as a function only of the generalized accelerations $[\ddot{q}_i]$. The total differential of the function K, equaled to zero, is the new general equation of dynamics

$$dK \quad \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} \, d\ddot{q}_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

where the differentials $[d\ddot{q}_i]$ are arbitrary infinitesimal functions of t.

For a holonomic system these differentials are independent too; then the differential equations of the holonomic systems are

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3\frac{\partial \ddot{T}_0}{\partial \ddot{q}_i}\right) - Q_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

from which we find the generalized coordinates as functions of the time t.

For a non-holonomic system $[d\ddot{q}_i]$ are not independent. They are bound by linear equations with respect to $[d\ddot{q}_i]$, obtained by differentiation of the equations which express the non-holonomic connections detaining only the terms that contain $[d\ddot{q}_i]$. We assume that the number of equations of the non-holonomic connections is equal to l.

Thus we write general equation of dynamics:

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} \, d\ddot{q}_i = \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} \, d\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} \, d\ddot{q}_\beta = 0; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k;$$

$$\beta = k+1, k+2, \ldots, k+l \ (=s).$$

The solutions of l equations of the connections with unknown $[d\ddot{q}_\beta]$ — whose number is also l — are of the kind

$$d\ddot{q}_\beta = a_{\alpha\beta} d\ddot{q}_\alpha \quad (\beta = k+1, k+2, \ldots, k+l); \ \alpha = 1, 2, \ldots \ k.$$

We substitute the dependent $[d\ddot{q}_\beta]$ by their expressions through the independent $[d\ddot{q}_\alpha]$ into the general equation of dynamics and obtain the general equation of dynamics for a non-holonomic system

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} \, a_{\beta\alpha}\right) d\ddot{q}_\alpha = 0.$$

As $[d\ddot{q}_\alpha]$ are arbitrary and independent, we obtain the differential equations of movement of a holonomic system

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_\beta} \, a_{\beta\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, k); \ \beta = k+1, k+2, \ldots, k+l.$$

$a_{\beta\alpha}$ are functions of t, $[q_i]$, $[\dot{q}_i]$, $[\ddot{q}_i]$. We add to these k equations the l equations of the connections; we obtain $k+l=s$ equations from which we find $[q_i]$ as functions of t.