

ОБ УСРЕДНЕНИИ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Друми Д. Байнов

В работе [1] предлагается общий метод построения асимптотических решений в любом приближении относительно параметра ε систем с запаздыванием типа

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &= Y_0(x(t), y(t), t) + \varepsilon Y_1(x(t), x(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta), t, \varepsilon), \\ \dot{x}(t) &= \varepsilon X(x(t), x(t-\Delta), y(t), (y-\Delta), t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь X и Y — соответственно n - и m -мерные векторные функции, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, Δ (запаздывание) — неотрицательная величина.

Вырожденной системой, получающейся из (1) при $\varepsilon = 0$, называется система

$$(2) \quad \dot{y}(t) = Y_0(x(t), y(t), t), \quad x = \text{const.}$$

Пусть общее решение (2)

$$(3) \quad y = \varphi(x, y^0, t^0, t) \equiv \varphi(t), \quad \varphi(x, y^0, t^0, t^0) = y^0$$

известно.

Начальные значения для системы (1) задаются на начальном множестве $E_0[t^0 - k\Delta, t^0]$ в форме

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= x^0 + \varepsilon f_1(t) + \dots + \varepsilon^k f_k(t), \\ y &= \varphi(t) + \varepsilon g_1(t) + \dots + \varepsilon^{k-1} g_{k-1}(t), \end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ — решение системы (2), а k определяется номером приближения.

Если существует независящее от параметров t^0, y^0 среднее значение

$$(5) \quad \bar{X}(x, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(x, x, \varphi(x, y^0, t, t^0), \varphi(x, y^0, t^0, t-\Delta), t, 0) dt,$$

то для системы (1) с начальным условием

$$(6) \quad y(t) = \varphi(t), \quad x(t) = x^0,$$

заданным на отрезке $[t^0 - \Delta, t^0]$, усредненным уравнением в первом приближении является уравнение

$$(7) \quad \dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}(x, \bar{x}), \quad x|_{t=t^0} = x^0.$$

В работе [1] при некоторых общих ограничениях сформулирована следующая

Теорема А. Равномерно в промежутке $[t^0, t^0 + \frac{L}{\varepsilon}]$, где L — сколько угодно большое положительное число, имеет место оценка $|x - \bar{x}| < O(1)$, если (x, y) является решением (1), а $\bar{x}$ — решение системы (7).

Если $A = A(x, y, t)$, $0 < \delta_0 < A(x, y, t) \leq 1$, и начальные данные вида (4) заданы на начальном множестве $[t^0 - kA_0, t^0]$ при некоторых дополнительных условиях имеет место теорема, аналогичная теореме А.

В настоящей работе мы применим предложенную в [1] схему усреднения для некоторых систем с малым параметром при производной и с малым запаздыванием.

Рассмотрим квазилинейную систему

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(x(t)) y(t) + B(x(t)), \\ \dot{x}(t) &= \varepsilon [\tilde{A}(x(t), x(t-A)) y(t) + \tilde{B}(x(t), x(t-A)) y(t-A) \\ &\quad + \tilde{C}(x(t), x(t-A))], \end{aligned}$$

где A квадратная $m \times m$ матрица, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — $n \times m$ матрицы, B и $\tilde{C}$ — матрицы столбцы, x — n -мерный вектор, y — m -мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, A — неотрицательная постоянная величина.

Начальные значения для системы (8) зададим на начальном множестве $[-A, 0]$ в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= x^0, \\ y &= q(t) = q(x, t). \end{aligned}$$

Здесь $q(x, t)$ — решение системы

$$(10) \quad \dot{y}(t) = A(x(t)) y(t) + B(x(t)), \quad x = \text{const},$$

для которого $q(x, 0) = y^0$ (на y^0 смотрим как на параметр).

Для системы (8) с начальными значениями (9), заданными на начальном множестве $[-A, 0]$, имеет место следующая

Теорема 1. Пусть:

1. В ограниченной и замкнутой области D переменных x некоторые из собственных значений матрицы $A(x)$ остаются комплексными с отрицательными действительными частями, а остальные собственные значения остаются чисто мнимыми.

2. Элементарные делители матрицы $A(x)$, соответствующие чисто мнимым собственным значениям, простые.

3. Существует неособенная, достаточно гладкая матрица $S(x)$, для которой $SAS^{-1} = \text{diag} [J_0, \dots, J_s]$, где J_j — жордановы клетки фиксированных размеров, отвечающие элементарным делителям матрицы $A(x)$.

Тогда для средних значений (5) правых частей системы (8) имеет место формула

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\tilde{A}(x, x)y(t) + \tilde{B}(x, x)y(t-A) + \tilde{C}(x, x)] dt$$

$$\tilde{C}(x, x) - (\tilde{A}(x, x) + \tilde{B}(x, x))A^{-1}(x, x)B(x, x),$$

где $y(t) = \varphi(x, t)$.

Доказательство. Порождающей системой системы (8) является система (10).

Пусть $S(x)$ неособенная матрица, для которой

$$SAS^{-1} = \text{diag}[J_0, \dots, J_s],$$

$$(11) \quad J_0 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_q \end{vmatrix},$$

$$J_i = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_{q+i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{q+i} \end{vmatrix}}_{r_i}$$

$$i = 1, 2, \dots, s, \quad m = q + r_1 + \dots + r_s,$$

$\lambda_v = g_v$, $v = 1, 2, \dots, q+s$, — собственные значения матрицы $A(x)$, причем $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ — чисто мнимые, $\text{Re} \lambda_j < 0$ при $j > q$. При фиксированном x решение $y(t) = \varphi(x, t)$ выражается формулой

$$(12) \quad y(t) = S^{-1} e^{\text{diag}[J_0, \dots, J_s]t} SC - A^{-1}B.$$

Легко видеть, что

$$(13) \quad \int_0^T e^{\text{diag}[J_0, \dots, J_s]t} dt = D(T) - \bar{D},$$

$$\int_0^T e^{\text{diag}[J_0, \dots, J_s](t-A)} dt = D(T-A) - \bar{D}$$

Здесь $D(T)$, $\bar{D} = \text{const}$ и $\bar{\bar{D}} = \text{const}$ квазидиагональные матрицы, причем

$$D(T) = \text{diag}[D_0(T), \dots, D_s(T)],$$

$$(14) \quad D_0(T) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_1} e^{i_1 T} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} e^{i_2 T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_q} e^{i_q T} \end{vmatrix},$$

$$D_i(T) = e^{i_{q+i} T} \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_{q+i}} & P_{i1}(T) & P_{i2}(T) & P_{i, r_i-1}(T) \\ 0 & \frac{1}{\lambda_{q+i}} & P_{i1}(T) & P_{i, r_i-2}(T) \\ 0 & 0 & 0 & P_{i1}(T) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_{q+i}} \end{vmatrix}.$$

Функции $P_{ij}(T)$ являются многочленами от T степени j . Для средних значений правых частей системы (6) получаем

$$(15) \quad \begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\tilde{A} y(t) + \tilde{B} y(t-\Delta) + \tilde{C}] dt \\ &= \tilde{A} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt + \tilde{B} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t-\Delta) dt + \tilde{C} \\ &= \tilde{A} S^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T)}{T} SC - \tilde{A} S^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{D}}{T} SC + \tilde{B} S^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T-\Delta)}{T} SC \\ & \quad - \tilde{B} S^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{D}}{T} SC + \tilde{C} - \tilde{A} A^{-1} B - \tilde{B} A^{-1} B = \tilde{C} - (\tilde{A} + \tilde{B}) A^{-1} B. \end{aligned}$$

Этим теорема 1 доказана.

Рассмотрим систему

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &= Y(x(t), y(t)), \\ \dot{x}(t) &= \varepsilon X(x(t), x(t-\Delta), y(t), y(t-\Delta)), \end{aligned}$$

где x — n -мерный вектор, y — m -мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, Δ — неотрицательная величина. Начальные значения для системы (16) зададим на начальном множестве $[-\Delta, 0]$ в виде

$$(17) \quad \begin{aligned} x &= x^0, \\ y &= \varphi(t) = q(x, t). \end{aligned}$$

Здесь $\varphi(x, t)$ — решение системы

$$(18) \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad x = \text{const},$$

для которого $\varphi(x, 0) = y^0$.

Введем некоторые определения. Пусть $y = \varphi(x)$ — одно из решений системы уравнений $Y(x, y) = 0$ или, как будем говорить, один из корней системы уравнений, определенный на ограниченном и замкнутом множестве D .

Корень $y = f(x)$ назовем изолированным на множестве D , если найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что система $Y(x, y) = 0$ не имеет решений, отличных от $f(x)$ для $|y - f(x)| < \varepsilon_1$. Изолированный корень $y = f(x)$ назовем положительно устойчивым в D , если для всех точек $x^* \in D$ точки $y = f(x)$ являются асимптотически устойчивыми по Ляпунову точками покоя системы (18).

Будем говорить, что точка покоя $y = f(x^*)$ системы (18) равномерно асимптотически устойчива относительно множества D изменения x^* , если для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon_1) > 0$, что для всех $x^* \in D$ выполняется неравенство

$$(19) \quad |y(t) - f(x^*)| < \varepsilon_1$$

как только

$$|y(t^0) - f(x^*)| < \delta(\varepsilon_1)$$

и, кроме того, имеет место предельный переход

$$(20) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = f(x^*).$$

Если множество D ограничено и замкнуто, то из свойства асимптотической устойчивости при каждом фиксированном значении x^* следует свойство равномерной асимптотической устойчивости.

Назовем областью влияния изолированного положительно устойчивого корня $y = f(x)$ совокупность точек (x^*, y^*) таких, что решение системы (18), удовлетворяющее начальному условию $y|_{t=0} = y^*$, при $t \rightarrow \infty$ стремится к значению $f(x^*)$.

Теорема 2. Пусть:

1. Корень $y = f(x)$ уравнения $Y(x, y) = 0$ является изолированным положительно устойчивым корнем в некоторой ограниченной замкнутой области D .

2. Точка (x^0, y^0) принадлежит области влияния этого корня.

3. Функция $X(x, u, y, v)$ имеет равномерно ограниченные частные производные по u и v .

Тогда для средних значений (5) правых частей системы (16) имеет место формула

$$(21) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, x, y(t), y(t-\Delta)) dt = X(x, x, f(x), f(x)),$$

где $y(t) = \varphi(x, t)$.

Доказательство. Применяя для функции $X(x, x, y(t), y(t-\Delta))$ теорему Лагранжа, получаем

$$(22) \quad X(x, x, y(t), y(t-\Delta)) = X(x, x, f(x), f(x)) + \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} [y(t) - f(x)] + \frac{\partial X^*}{\partial y(t-\Delta)} [y(t-\Delta) - f(x)].$$

Индекс * означает, что значение функции берется в некоторой промежуточной точке. Тогда среднее значение функции $X(x, x, y(t), y(t-\Delta))$ примет вид

$$(23) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, x, y(t), y(t-\Delta)) dt = X(x, x, f(x), f(x)) \\ + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} [y(t) - f(x)] dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial X^*}{\partial y(t-\Delta)} [y(t-\Delta) - f(x)] dt.$$

Докажем, что

$$(24) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} [y(t) - f(x)] dt = 0,$$

$$(25) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial X^*}{\partial y(t-\Delta)} [y(t-\Delta) - f(x)] dt = 0.$$

Из условий теоремы 2 следует, что

$$(26) \quad \left| \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} \right| < M, \quad |y(t) - f(x)| < N$$

и

$$(27) \quad |y(t) - f(x)| < \varepsilon_1,$$

если $t \geq t^*$ (t^* — достаточно большое фиксированное значение t).

Оценим по модулю левую часть равенства (24):

$$(28) \quad \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} [y(t) - f(x)] dt \right| \\ \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{t^*} \left| \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} \right| |y(t) - f(x)| dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t^*}^T \left| \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} \right| |y(t) - f(x)| dt.$$

Для правой части неравенства (28) получаем

$$(29) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{t^*} \left| \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} \right| |y(t) - f(x)| dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M N t^* = 0,$$

$$(30) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t^*}^T \left| \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} \right| |y(t) - f(x)| dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M \varepsilon_1 (T - t^*) = M \varepsilon_1.$$

Из неравенств (28), (29) и (30) следует, что

$$(31) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\partial X^*}{\partial y(t)} [y(t) - f(x)] dt = 0.$$

Аналогичным образом доказывается и равенство (25).

Этим теорема 2 доказана.

Рассмотрим систему

$$(32) \quad \begin{aligned} \varepsilon \frac{dy(t)}{dt} &= Y(x(t), y(t), t), \\ \frac{dx(t)}{dt} &= X(x(t), x(t-\varepsilon\Delta), y(t), y(t-\varepsilon\Delta), t), \end{aligned}$$

где x — n -мерный вектор, y — m -мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, Δ — неотрицательная постоянная величина.

Системе (32) ставим в соответствие систему

$$(33) \quad \begin{aligned} \varepsilon \frac{d\tilde{y}}{dt} &= Y(x^*, \tilde{y}, t^*), \\ x^* &= \text{const}, \quad t^* = \text{const}. \end{aligned}$$

Пусть $y = \psi(x^*, t^*, t, \varepsilon, y^0)$, $\psi(x^*, t^*, 0, \varepsilon, y^0) = y^0$ — общее решение системы (33), где на y^0 смотрим как на параметр.

Начальные значения для системы (32) зададим на начальном множестве $[-\varepsilon\Delta, 0]$ в виде

$$(34) \quad \begin{aligned} x &= x^0, \\ y &= \psi(x^*, t^*, t, \varepsilon, y^0). \end{aligned}$$

После замены переменных $t = \varepsilon\tau$ система (32) переходит в систему

$$(35) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= Y(x(\tau), y(\tau), t), \\ \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon X(x(\tau), x(\tau-\Delta), y(\tau), y(\tau-\Delta), t), \\ \frac{dt}{d\tau} &= \varepsilon \end{aligned}$$

с начальными значениями

$$(36) \quad \begin{aligned} x &= x^0, \\ y &= \varphi(\tau) = \varphi(x, t, \tau), \\ t &= 0, \end{aligned}$$

заданных на начальном множестве $[-\Delta, 0]$.

Здесь $\varphi(x, t, \tau)$ — решение системы

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= Y(x, y, t), \\ x &= \text{const}, \quad t = \text{const}, \end{aligned}$$

для которого $\varphi(x, t, 0) = y^0$.

Система (35) является частным случаем системы (16).

Теорема 3. Пусть:

1. Для системы (35) выполнены условия теоремы А и теоремы 2.
2. В ограниченной и замкнутой области D переменных x , y и t все собственные значения матрицы $\frac{\partial}{\partial y} Y(x, y, t)$ имеют отрицательные действительные части.

3. Матрица $\frac{\partial}{\partial y} Y(x, y, t)$ равномерно непрерывна по x и t .

4. Функция $Y(x, y, t)$ имеет равномерно ограниченную частную производную по x .

Тогда первое приближение для решения системы (32) с начальными значениями (34) можно получить по следующему правилу.

В первое из уравнений (32) полагаем $\varepsilon = 0$ и решаем так полученное уравнение $Y(x, y, t) = 0$ в отношении y . Один из корней этого уравнения, удовлетворяющий условиям теоремы 2, подставляем во второе из уравнений (32). Решение этого уравнения при начальном значении $x|_{t=0} = x^0$ будет первым приближением для функции x . Подставляем его в первое из уравнений (32). Решаем так полученное уравнение при начальном условии $y|_{t=0} = y^0$ и получаем первое приближение для функции y .

Доказательство теоремы 3 вполне совпадает с доказательством теоремы 3 из [2] и поэтому мы его не приводим.

Рассмотрим систему

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(x(t), y(t)), \\ \frac{dx}{dt} &= \varepsilon X(x(t), x(t - \Delta(x)), y(t), y(t - \Delta(x))), \end{aligned}$$

где x — n -мерный вектор, y — m -мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\Delta(x)$ — равномерно ограниченная функция x ($0 < \delta_0 \leq \Delta(x) \leq \Delta_0$) с начальными значениями

$$(39) \quad \begin{aligned} x &= x^0, \\ y &= \varphi(t) = \varphi(x, t), \end{aligned}$$

заданных на начальном множестве $[-\Delta_0, 0]$.

Здесь $\varphi(x, t)$ — решение системы

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(x, y), \\ x &= \text{const}, \end{aligned}$$

для которого $\varphi(x, 0) = y^0$.

Для системы (38) имеет место теорема 2.

Если рассмотреть квазилинейная система, соответствующая системе (38), то для нее имеет место теорема 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов, В. М., Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов. О применении метода усреднения к некоторым системам дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Вестник Московского университета, физика, астрономия, № 2, 1968.
2. Байнов, Д. Д. Об усреднении в некоторых системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Математический вестник, 5 (20), с. 1968.

Поступила 15. II. 1969 г.

ВЪРХУ УСРЕДНЯВАНЕТО В НЯКОИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ СЪС ЗАКЪСНЕНИЕ

Друми Д. Байнов

(Резюме)

В настоящата работа се предлага алгоритъм за намиране на първото приближение относно параметъра ε на решението на системи диференциални уравнения от вида

$$\varepsilon \frac{dy(t)}{dt} = Y(x(t), y(t), t),$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t), x(t-\varepsilon\Delta), y(t), y(t-\varepsilon\Delta), t, \varepsilon),$$

където

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_m), \quad X = (X_1, \dots, X_n), \quad Y = (Y_1, \dots, Y_m),$$

$\varepsilon > 0$ е малък параметър, а Δ — положителна константа.

Началните стойности за функциите x и y са зададени на началното множество $[-\varepsilon\Delta, 0]$ във вида

$$x = x^0,$$
$$y = \psi(x^*, t^*, t, \varepsilon, y^0).$$

Тук функцията $\psi(x^*, t^*, t, \varepsilon, y^0)$ е общото решение на системата

$$\varepsilon \frac{d\tilde{y}}{dt} = Y(x^*, \tilde{y}, t^*),$$
$$x^* = \text{const}, \quad t^* = \text{const}.$$

ON THE AVERAGING IN SOME SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDATION

Drumi D. Bainov

(Summary)

The present paper proposes an algorithm for finding the first approximation with respect to the parameter ε for the solution of systems of differential equations of the type

$$\varepsilon \frac{dy(t)}{dt} = Y(x(t), y(t), t),$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t), x(t-\varepsilon\Delta), y(t), y(t-\varepsilon\Delta), t, \varepsilon),$$

where

$x=(x_1, \dots, x_n)$, $y=(y_1, \dots, y_m)$, $X=(X_1, \dots, X_n)$, $Y=(Y_1, \dots, Y_m)$,
 $\varepsilon > 0$ is a small parameter, and Δ — a positive constant.

The initial values of the functions x and y are given on the initial set $[-\varepsilon\Delta, 0]$ of the kind

$$x = x^0,$$

$$y = \psi(x^*, t^*, t, \varepsilon, y^0).$$

Here the function $\psi(x^*, t^*, t, \varepsilon, y^0)$ is the general solution of the system

$$\varepsilon \frac{d\tilde{y}}{dt} = Y(x^*, \tilde{y}, t^*),$$

$$x^* = \text{const}, \quad t^* = \text{const}.$$