

ЗА ЗНАКА НА НОРМАЛНАТА ПРОИЗВОДНА В ТОЧКИТЕ НА АБСОЛЮТЕН ЕКСТРЕМУМ НА РЕШЕНИЯТА НА ОБЩОТО ЕЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧНО УРАВНЕНИЕ И НЯКОИ ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ОТ НОЙМАН-ДИРИХЛЕТОВ ТИП

Иван Райчинов

Нека G е ограничена област в реалното n -мерно евклидово пространство $E_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ и нека нейната граница Σ е частично гладка.

Да разгледаме общото елиптико-параболично уравнение

$$(1) \quad L(u) = a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x),^*$$

където коефициентите $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $c(x)$ и дясната страна $f(x)$ са достатъчно гладки в затворената област $\bar{G} = G \cup \Sigma$ и удовлетворяват там неравенствата

$$2) \quad a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq 0, \quad = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in E_n$$

(и

$$(3) \quad -c(x) \geq c_0 = \text{const} > 0.$$

Следвайки Г. Фикера [1], да въведем разлагането $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ където Σ_3 означава множеството от точки $x \in \Sigma$, в които $a^{ij}(x)v_i(x)v_j(x) \neq 0$ ($v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ е единичен вектор на вътрешната нормала към повърхнината Σ в точката x от нея^{**}), а Σ_0 , Σ_1 и Σ_2 са подмножествата а $\Sigma \setminus \Sigma_3$, дефинирани съответно с релациите $b(x) = [b^i(x) - a_{x_j}^{ij}(x)]v_i(x) = 0$, $b(x) > 0$ и $b(x) < 0$.

Известно е, че теоремата за единственост на решението на втората гранична задача за елиптичните и параболичните уравнения се получава лесно от строгия принцип на максимума, отнасящ се до знака на нормалната производна на решението в точките, където то достига своите абсолютни екстремуми. За елиптичните и параболичните уравнения този принцип е изследван в работите [2]—[5]. В [6] е получен аналогичен ре-

* По повтарящите се индекси се извършва сумиране от 1 до n .

Върху контурите на клетките на непрекъснатост на $v_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, нормалата не е еднозначно определена, но без ограничение на общостта ще считаме фиксирано по едно от възможните ѝ положения.

зултат за елиптически уравнения с параболични израждания върху границата на областта.

В тази работа ние ще докажем една теорема за знака на нормалната производна в точките на абсолютен екстремум на решенията на общото елиптико-параболично уравнение (1). По-нататък в § 1, ползвайки се от тази теорема, ще изследваме някои гранични задачи от Нойман-Дирихлетов тип, отнасящи се до ултрапараболичното уравнение

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x, t_1, t_2) \frac{\partial u}{\partial t_1} + a_2(x, t_1, t_2) \frac{\partial u}{\partial t_2} + b(x, t_1, t_2)u + f(x, t_1, t_2).$$

В частност ще докажем теорема за съществуване и единственост на класическо решение на втората гранична задача за уравнението (4), когато областта е паралелепипед.

Да отбележим, че втората гранична задача за общото елиптико-параболично уравнение е изследвана в [1], [7] — [9], но нейното изчерпателно изучаване очевидно ще бъде предмет на бъдещите изследвания на редица математици.

§ 1. КЪМ СТРОГИЯ ПРИНЦИП НА МАКСИМУМА ЗА ОБЩОТО ЕЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧНО УРАВНЕНИЕ

В този параграф ще докажем следната

Теорема 1.1. Нека функцията $u(x)$ е непрекъсната в затворената област $\bar{G}$ и нека производните ѝ, участващи в оператора $L(u)$, са непрекъснати в областта G . Нека $L(u) \geq 0, \forall x \in G$. Нека неравенството $u(x) > 0$ притежава поне едно решение $x \in G$ и нека $\bar{x} \in \Sigma_3$ е една точка на строго сферична изпъкналост отвътре на Σ . Тогава ако навсякъде в $\bar{G}$ е в сила неравенството $u(x) \leq u(\bar{x})$, т. е. ако в точката x функцията $u(x)$ приема своя абсолютен максимум в $\bar{G}$, то в сила е неравенството

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{u(x) - u(\bar{x})}{\varrho(x, \bar{x})} < 0, \quad \varrho(x, \bar{x}) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

където $\vec{l}$ е произволна посока, сключваща остър ъгъл с нормалния вектор $\nu(\bar{x})$.

Доказателство. Теоремата на Вайерщрас за непрекъснатите в компактни множества функции показва, че абсолютният максимум $M = \max_{\bar{G}} u(x)$ съществува. От друга страна, той е положителен, защото неравенството $u(x) > 0$ има поне едно решение $x \in G$. В такъв случай, използвайки условието (3), с помощта на разсъждения, аналогични на тези от стр. 111 на [1], лесно заключаваме, че максимумът M не се достига в никоя точка от областта G . Следователно в сила е неравенството

$$(1.2) \quad u(x) < M, \quad x \in G,$$

от което ще се възползваме след малко.

Точката $x \in \Sigma$ се нарича точка на строга сферична изпъкналост отвътре на Σ , ако съществува затворено кълбо K такова, че $K \subset G$ и $K \cap \bar{G} = \{\bar{x}\}$.

Сега, ползвайки се от предположенията за точката x , да фиксираме едно кълбо κ с център в точката x^* , така че да имаме: $\kappa \subset G$, $\kappa \cap \bar{G} = \{x^*\}$ (фиг. 1). Освен това да прекараме една хиперравнина δ , разделяща областта G на две отворени точкови множества G_1 и G_2 по такъв начин, че $x^* \in G_2$, $x \in \bar{G}_1 \setminus \delta$ и да бъде в сила неравенството

$$(1.3) \quad \varrho(x, x^*) > 0, \quad x \in \bar{G}_1 \cap \kappa.$$

По-нататък ще предположим още, че хиперравнината δ е прекарана по такъв начин, че множеството $\bar{\Omega} = \bar{G}_1 \cap \bar{\kappa}$ да се съдържа в определена околност на точката x . Съществуването на хиперравнина с всичките тези свойства е очевидно.

Да разгледаме в $\bar{\Omega}$ помощните функции

$$(1.4) \quad p(x) = e^{-\alpha} \quad \varrho = \varrho(x, x^*),$$

и

$$(1.5) \quad q(x) = u(x) + \varepsilon p(x),$$

където α и ε са положителни параметри, които ще фиксираме по подходящ начин.

Най-напред ще направим избора на параметъра ε . За целта съобразяваме, че фамилията от функции $p(x)$, получаващи се при изменението на α в интервала $(0, +\infty)$, е равномерно ограничена в $\bar{\Omega}$ и означаваме с M_1 една положителна константа, независеща от α и такава, че за всяко $x \in \bar{\Omega}$ и за всяко $\alpha \in (0, +\infty)$ да имаме $p(x) \leq M_1$. След това означаваме с I_1' и I_2' частите от границата на областта Ω , които лежат съответно върху хиперравнината δ и повърхнината на кълбото κ . Параметъра избираме произволно в интервала $(0, k)$, $k = \frac{1}{M_1} (M - \max_{\bar{I}_1} u(x))$. Съгласно (1.2) имаме $k > 0$.

При така направения избор на параметъра ε е в сила неравенството

$$(1.6) \quad \max_{\bar{I}_1'} q(x) < \max_{\bar{I}_2'} q(x),$$

което се проверява непосредствено.

Параметъра α избираме толкова голям, че да е в сила неравенството

$$(1.7) \quad L(p(x)) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

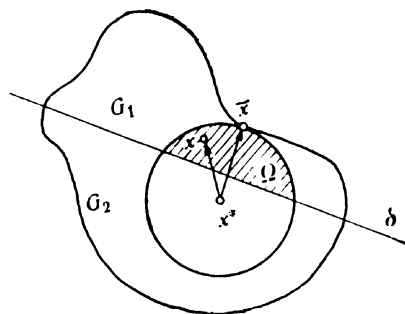
За да покажем, че това е възможно, пресмятаме $L(p(x))$ и получаваме равенството

$$(1.8) \quad L(p(x)) = p(x) \{ 4\alpha^2 a^{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) - 2\alpha [a^{ij}(x)\delta^{ij} + b^i(x)(x_i - x_i^*)] + c(x) \}$$

(δ^{ij} — символи на Кронекер).

Да спрем нашето внимание върху функцията

$$\varphi(x) = a^{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*)$$



Фиг. 1

и да разгледаме нейната стойност в точката x . Като вземем пред вид, че векторите $v(x)$ и $x - x^*$ са колинеарни и ненулеви, т. е. че съществува число $\lambda \neq 0$ такова, че $x - x^* = \lambda v(x)$, за $q(x)$ получаваме

$$q(x) = a^{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) = \lambda^2 a^{ij}(x)v_i(x)v_j(x).$$

Оттук съгласно (2) и условието $x \in \Sigma_\eta$ следва неравенството

$$(1.9) \quad q(x) > 0.$$

От (1.9) и от непрекъснатостта на функцията $q(x)$ заключаваме, че съществува околност A на точката $\bar{x}$, в която е в сила неравенството

$$(1.10) \quad q(x) = a^{ij}(x)(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) \geq \mu \quad \text{const} > 0.$$

Ние ще считаме, че сме фиксирали хиперравнината δ , така че $\Omega \subset A$. Тогава неравенството (1.10) е в сила за всяко $x \in \bar{\Omega}$.

Като се възползваме от (1.10) и вземем пред вид ограничеността на функциите, участващи в (1.8), от последното получаваме неравенството

$$(1.11) \quad L(p(x)) \geq p(x)(4\mu a^2 - M_2 a - M_3), \quad x \in \Omega,$$

където с M_2 и M_3 сме означили достатъчно големи положителни константи, независещи от a . Сега, вземайки пред вид, че $p(x) > 0$ и $\mu > 0$, от (1.11) веднага заключаваме, че посоченият по-горе избор на параметъра a наистина е възможен. (Изразът $4\mu a^2 - M_2 a - M_3$ расте неограничено при $a \rightarrow +\infty$.) И така, ние ще си послужим с помощните функции (1.4) и (1.5), където ε и a са фиксирани по такъв начин, че са в сила неравенствата (1.6) и (1.7).

От (1.7) и условието за $L(u)$ получаваме неравенството

$$(1.12) \quad L(q(x)) = L(u(x)) + \varepsilon L(p(x)) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

От (1.12) по съображения, аналогични на изтъкнатите при извода на неравенството (1.2), заключаваме, че е в сила неравенството

$$(1.13) \quad q(x) \leq \max q(x), \quad x \in \Omega.$$

(Функцията $q(x)$ има в Ω най-голяма стойност, защото $u(x) \in C^0(\Omega)$ и множеството Ω е компактно.)

Съгласно (1.13) $\max q(x)$ би могъл да се достигне само върху $I'_1 \cup \bar{I}'_2$, но (1.6) изключва възможността той да се достига върху I'_1 . Тогава, като вземем пред вид, че върху I'_2 функцията $p(x)$ е константа, можем да твърдим, че $q(x) = u(x) - \varepsilon p(x)$ достига най-голямата си стойност върху I'_2 само тогава, когато функцията $u(x)$ достига своята такава. Но от неравенството (1.2) и обстоятелството, че $I'_2 \setminus \{x\} \subset G$, е ясно, че това става само в точката x . Следователно нашата помощна функция $q(x)$ удовлетворява неравенството

$$q(x) < q(x), \quad x \in \Omega \setminus \{x\},$$

от което лесно получаваме неравенството

$$(1.14) \quad \frac{u(x) - u(\bar{x})}{\varrho(x, \bar{x})} < -\varepsilon \frac{\varrho(x) - p(\bar{x})}{\varrho(x, \bar{x})}, \quad x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}.$$

Да оставим сега точката $x \in \Omega$ да клони към $\bar{x}$, оставайки върху произволно избран лъч $\vec{l}$, изхождащ от точката x и сключващ остър ъгъл с нормалния вектор $\nu(\bar{x})$. Тогава от (1.14) следва неравенството

$$(1.15) \quad \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \vec{l}} - \varepsilon \frac{\partial p(\bar{x})}{\partial \vec{l}} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{l}} - \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{u(x) - u(\bar{x})}{\varrho(x, \bar{x})} \right)$$

Но за $\partial p(x)/\partial \vec{l}$ е в сила равенството

$$\frac{\partial p(x)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial p(x)}{\partial \vec{\nu}} \cos(\vec{l}, \vec{\nu}) + \frac{\partial p(x)}{\partial \tau} \cos(\vec{l}, \vec{\tau}).$$

Оттук, като вземем пред вид, че $\frac{\partial p(x)}{\partial \vec{\nu}} = e^{-\varrho^2} 2\varrho > 0$, $\frac{\partial p(x)}{\partial \tau} = 0$ и $\cos(\vec{l}, \vec{\nu}) > 0$

($(\vec{l}, \vec{\nu})$ — остър ъгъл), получаваме неравенството

$$\frac{\partial p(x)}{\partial \vec{l}} > 0,$$

което заедно с неравенството (1.15) ни дават неравенството (1.1). Теорема (1.1) е доказана.

От доказателството на теорема 1.1 е ясно, че е в сила аналогична теорема и за точките, в които функцията $u(x)$ достига своя минимум, именно:

Ако функцията $u(x)$ удовлетворява условията на теорема 1.1 с тази разлика, че вместо условията $u(x) > 0$ има поне едно решение $x \in \bar{G}$, $L(u) \geq 0$ в G и $u(x) \leq u(\bar{x})$ в $\bar{G}$, са в сила условията: $u(x) < 0$ има поне едно решение $x \in \bar{G}$, $L(u) \leq 0$ в G и $u(x) \geq u(\bar{x})$, то в сила е неравенството

$$(1.1') \quad \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \vec{l}} > 0,$$

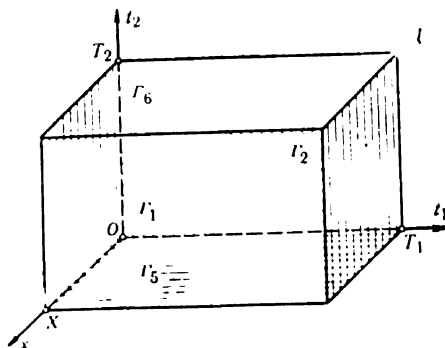
където $\vec{l}$ и този път е произволна посока, сключваща остър ъгъл с нормалния вектор $\nu(\bar{x})$.

§ 2. ГРАНИЧНИ ЗАДАЧИ ОТ НОЙМАН-ДИРИХЛЕТОВ ТИП ЗА УЛТРАПАРАБОЛИЧНИ УРАВНЕНИЯ С ЕДНА ПРОСТРАНСТВЕНА НЕЗАВИСИМА ПРОМЕНЛИВА И ДВЕ „ВРЕМЕНА“

В този параграф ще разглеждаме ултрапараболичното уравнение (4), при което, следвайки [10], ще предполагаме, че функциите $a_1(x, t_1, t_2)$, $a_2(x, t_1, t_2)$, $b(x, t_1, t_2)$ и $f(x, t_1, t_2)$ са дефинирани в затворения паралеле-

пипед $\bar{D}: 0 \leq x \leq X, 0 \leq t_1 \leq T_1, 0 \leq t_2 \leq T_2$ (X, T_1, T_2 — фиксирани положителни числа) (фиг. 2) и удовлетворяват следните условия:

а) В отворената област D (съставена от вътрешните точки на $\bar{D}$) функциите $a_1(x, t_1, t_2)$, $a_2(x, t_1, t_2)$, $b(x, t_1, t_2)$ и $f(x, t_1, t_2)$ удовлетворяват по отношение на всеки от аргументите си условието на Липшиц.



Фиг. 2

б) В затворената област $\bar{D}$ съществуват и удовлетворяват там условието на Липшиц спрямо x, t_1 и t_2 производните $\partial a_i / \partial t_k$, $\partial b / \partial t_k$, $\partial f / \partial t_k$, $i, k = 1, 2$.

в) Съществува такова положително число l , че производните $\partial a_i / \partial x$, $\partial b / \partial x$, $\partial f / \partial x$, $i = 1, 2$, са дефинирани в $\bar{D}_1: 0 \leq x \leq X, 0 \leq t_1 \leq 2l, 0 \leq t_2 \leq T_2$ и $\bar{D}_2: 0 \leq x \leq X, T_1 - 2l \leq t_1 \leq T_1, 0 \leq t_2 \leq T_2$ и удовлетворяват там условието на Липшиц спрямо x, t_1 и t_2 .

г) Съществува такова положително число l_1 , че функцията $f(x, t_1, t_2)$ се анулира за всяка точка от $\bar{D}$, чиито координати удовлетворяват някое от неравенствата $x \leq l_1$, $x \geq X - l_1$, $t_1 \leq l_1$, $t_1 \geq T_1 - l_1$.

д) В сила са неравенствата

$$a_1(x, 0, t_2) > 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2;$$

$$a_1(x, T_1, t_2) < 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2;$$

$$a_2(x, t_1, t_2) \geq \lambda, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (x, t_1, t_2) \in \bar{D}.$$

Нека отбележим, че условието д) без ограничение на общността може да се формулира и така: в сила са неравенствата

$$a_1(x, 0, t_2) \geq \mu, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad (x, t_1, t_2) \in \bar{D}_1;$$

$$a_1(x, T_1, t_2) \geq \mu, \quad (x, t_1, t_2) \in \bar{D}_2;$$

$$a_2(x, t_1, t_2) \geq \lambda, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (x, t_1, t_2) \in \bar{D}.$$

Това е така, защото функцията $a_1(x, t_1, t_2)$ е непрекъсната в затворената област $\bar{D}$ (в частност и върху стените ѝ с уравнения $t_1 = 0$ и $t_1 = T_1$) и числото l в условието в) може да бъде колкото искаме малко. Също така по известни съображения без ограничение на общността ще считаме, че $b(x, t_1, t_2) \geq b_0$, $b_0 = \text{const} > 0$.

е) В паралелепипедите $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t_1 \leq T_1$, $0 \leq t_2 \leq T_2$ и $X-l \leq x \leq X$, $0 \leq t_1 \leq T_1$, $0 \leq t_2 \leq T_2$ функциите $a_1(x, t_1, t_2)$, $a_2(x, t_1, t_2)$ и $b(x, t_1, t_2)$ са константи относно променливата x .

Лесно се проверява, че различните стени на паралелепипеда D са от тип Σ_1 , Σ_2 или Σ_3 , както следва (фиг. 2):

$$I'_1 = \{(x, t_1, t_2) \in \bar{D} / x=0, t_1 t_2 (t_1 - T_1) (t_2 - T_2) \neq 0\} \subset \Sigma_3,$$

$$I'_2 = \{(x, t_1, t_2) \in \bar{D} / x=X, t_1 t_2 (t_1 - T_1) (t_2 - T_2) \neq 0\} \subset \Sigma_3,$$

$$I'_3 = \{(x, t_1, t_2) \in \bar{D} / t_1=0, x t_2 (x-X) (t_2 - T_2) \neq 0\} \subset \Sigma_2,$$

$$I'_4 = \{(x, t_1, t_2) \in \bar{D} / t_1=T_1, x t_2 (x-X) (t_2 - T_2) \neq 0\} \subset \Sigma_2,$$

$$I'_5 = \{(x, t_1, t_2) \in \bar{D} / t_2=0, x t_1 (x-X) (t_1 - T_1) \neq 0\} \subset \Sigma_2,$$

$$I'_6 = \{(x, t_1, t_2) \in \bar{D} / t_2=T_2, x t_1 (x-X) (t_1 - T_1) \neq 0\} \subset \Sigma_2.$$

В такъв случай съгласно изследванията на Фикера [1] граничните задачи за уравнението (4), разглеждано в областта $\bar{D}$, ще бъдат коректни, ако граничните условия се задават не върху цялата граница, а върху нейната част $\bar{I}' = \bar{\Sigma} \setminus I'_6 \subset \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Нека изрично обърнем внимание, че частта от границата, върху която трябва да се задават гранични условия, за разлика от случаите, разглеждани в [7] и [8], в нашия случай съдържа и части от типа Σ_2 , при което $\Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \emptyset$. Това обстоятелство, както беше показано в [10], изобщо затруднява изследването на граничните задачи. Освен това контурът на разглежданата от нас област не е гладък, докато в [7] и [8] предположенията за висока гладкост на границата на разглеждана област се използват съществено.

В [10] за уравнението (4) е изследвана задачата на Дирихле и чрез нея е разрешена задачата на Коши в различните нейни постановки, посочени в [11]. (Разбира се, методът е описан само върху една от тези постановки, тъй като от направеното е ясна разрешимостта на тази задача и в другите нейни постановки, посочени в [11].) Сега, ползвайки се от тези резултати, с помощта на теорема 1.1 ще изследваме няколко гранични задачи за уравнението (4) в областта $\bar{D}$, при които върху някои части от $\bar{I}'$ ще бъде зададена неизвестната функция, а върху останалите ѝ части — нейната нормална производна. Такива смесени задачи ще наричаме задачи от Нойман-Дирихлетов тип и ще ги отбелязваме за краткост със символа (N—D); придружен с различни индекси.

Задача (N—D)₁. Да се намери функция $u(x, t_1, t_2)$, която да е непрекъснатата заедно със своите производни $\partial u / \partial t_1$, $\partial u / \partial t_2$, $\partial^2 u / \partial x^2$ в затворената област $\bar{D}$, да удовлетворява там уравнението (4) и върху границата $\bar{I}'$ да се подчинява на граничните условия

$$(2.1) \quad u(x, t_1, t_2)_{\bar{I}'} = 0$$

и

$$(2.2) \quad \frac{\partial u(x, t_1, t_2)}{\partial x} \Big|_{I'_1} = 0.$$

Теорема 2.1. Задачата $(N-D)_1$ притежава едно единствено решение. Това решение и производните му от вида $\partial u/\partial t_1$, $\partial u/\partial t_2$, $\partial^2 u/\partial x^2$ удовлетворяват в $\bar{D}$ условието на Липшиц спрямо x , t_1 и t_2 , като Липшицовите константи зависят само от максимумите на модулите и от Липшицовите константи на коефициентите на уравнението (4) и на техните производни, изброени в условието б).

Доказателство. Най-напред ще докажем твърдението за единственост. За целта допускаме противното и разглеждаме две различни и произволно взети решения $u_1(x, t_1, t_2)$ и $u_2(x, t_1, t_2)$ на задачата $(N-D)_1$. Без ограничение на общността предполагаме, че неравенството $u_1(x, t_1, t_2) > u_2(x, t_1, t_2)$ притежава поне едно решение $(x, t_1, t_2) \in \bar{D}$. В такъв случай съгласно цитираната по-горе теорема на Вайерщрас съществува точка $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{t}_1, \bar{t}_2)$, за която са в сила релациите

$$(2.3) \quad v(\bar{P}) = \max_{\bar{D}} v(x, t_1, t_2) > 0, \quad \bar{P} \in \bar{D},$$

където $v(x, t_1, t_2) = u_1(x, t_1, t_2) - u_2(x, t_1, t_2)$.

Точката $\bar{P}$ не може да принадлежи на I'_1 ($I'_1 \subset \Sigma_3$), защото в противен случай съгласно теорема 1.1 и неравенството (2.3) бихме заключили, че $\frac{\partial v(\bar{P})}{\partial x} < 0$, което противоречи на условието (2.2). Очевидно тя не принадлежи и на $\bar{I} \setminus I'_1$, защото $v(\bar{P}) > 0$, а съгласно (2.1) $v(x, t_1, t_2)|_{\bar{I} \setminus I'_1} = 0$. Следователно $\bar{P} \in D \cup I_6$.

Тогава функцията $v(x, t_1, t_2)$ има локален максимум в точката $(\bar{x}, \bar{t}_1)$ и следователно са в сила релациите

$$(2.4) \quad \frac{\partial v(\bar{P})}{\partial x} = \frac{\partial v(\bar{P})}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 v(\bar{P})}{\partial x^2} < 0.$$

Освен това функцията $v(\bar{x}, \bar{t}_1, t_2)$ очевидно притежава лява производна в точката $\bar{t}_2$ и при всички достатъчно малки стойности на h , $h > 0$, е в сила неравенството

$$-\frac{1}{h} [v(\bar{x}, \bar{t}_1, \bar{t}_2 - h) - v(\bar{x}, \bar{t}_1, \bar{t}_2)] \geq 0.$$

Оттук при $h \rightarrow 0$ получаваме неравенството

$$(2.5) \quad \frac{\partial v(\bar{P})}{\partial t} \geq 0.$$

Сега като вземем пред вид (2.4), за стойността на оператора

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a_1(x, t_1, t_2) \frac{\partial v}{\partial t_1} - a_2(x, t_1, t_2) \frac{\partial v}{\partial t_2} - b(x, t_1, t_2)v$$

в точката $\bar{P}$ получаваме оценката

$$M[v(\bar{P})] \leq -a_2(\bar{x}, \bar{t}_1, \bar{t}_2) \frac{\partial v(\bar{P})}{\partial t_2} - b(\bar{x}, \bar{t}_1, \bar{t}_2)v(\bar{P}),$$

от която въз основа на (2.3), (2.5), условието д) и забележките към него непосредствено следва неравенството

$$(2.6) \quad M[v(\bar{P})] < 0.$$

От друга страна, навсякъде в $\bar{D}$ е изпълнено равенството

$$(2.7) \quad M[v] = M[u_1] - M[u_2] = f(x, t_1, t_2) - f(x, t_1, t_2) \equiv 0.$$

Полученото противоречие опровергава нашето допускане. Следователно твърдението за единственост, съдържащо се в теорема 1.1, е доказано.

Сега ще докажем, че задачата $(N-D)_1$ притежава решение с указаните в теоремата свойства. За тази цел ще разгледаме помощното ултра-параболично уравнение

$$(2.8) \quad M^*[z] \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - A_1(x, t_1, t_2) \frac{\partial z}{\partial t_1} - A_2(x, t_1, t_2) \frac{\partial z}{\partial t_2} - B(x, t_1, t_2)z = F(x, t_1, t_2),$$

чиито коефициенти A_1, A_2, B и дясна страна F са четните продължения през равнината $x=0$ на съответните коефициенти a_1, a_2, b и дясната страна f на уравнението (4). По-точно, дефинирани са посредством равенствата

$$(2.8') \quad \begin{aligned} A_i(x, t_1, t_2) &= \begin{cases} a_i(x, t_1, t_2), & (x, t_1, t_2) \in \bar{D}, \\ a_i(-x, t_1, t_2), & (x, t_1, t_2) \in \bar{D}^*, \quad i = 1, 2; \end{cases} \\ B(x, t_1, t_2) &= \begin{cases} b(x, t_1, t_2), & (x, t_1, t_2) \in \bar{D}, \\ b(-x, t_1, t_2), & (x, t_1, t_2) \in \bar{D}^*; \end{cases} \\ F(x, t_1, t_2) &= \begin{cases} f(x, t_1, t_2), & (x, t_1, t_2) \in \bar{D}, \\ f(-x, t_1, t_2), & (x, t_1, t_2) \in \bar{D}^*, \end{cases} \end{aligned}$$

където $\bar{D}^* = -X \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t_1 \leq T_1, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2$.

Пред вид условията г) и е) функциите $A_i, i = 1, 2, B$ и F удовлетворяват по отношение на областта $\bar{R} \equiv \bar{D} \cup \bar{D}^*$ всичките условия на теорема 1 от [10] и следователно задачата на Дирихле за уравнението (2.8) в областта $\bar{R}$ при гранични условия

$$(2.9) \quad z|_{t_1=0} = z|_{t_1=T_1} = z|_{t_2=0} = z|_{t_2=T_2} = z|_{x=X} = z|_{x=-X} = 0$$

притежава единствено решение, което заедно със своите производни $\partial^2 z / \partial x^2, \partial z / \partial t_i, i = 1, 2$, удовлетворяват в $\bar{R}$ условието на Липшиц и при това Липшицовите константи зависят само от максимумите на модулите и от Липшицовите константи на коефициентите на уравнението и на техните производни от вида на изброените в условието б).

Да означим със $z(x, t_1, t_2)$ решението на тази задача.

Очевидно съгласно (2.8') функцията $z(x, t_1, t_2)$ удовлетворява в $\bar{D}$ уравнението (4). Също така очевидно е, че тя удовлетворява и граничното условие (2.1). Следователно за да заключим, че тази функция, разглеждана само в $\bar{D}$, е едно решение на нашата задача $(N-D)_1$, е достатъчно да установим, че тя удовлетворява и условието (2.2): $\frac{\partial z}{\partial x} /_{\Gamma_1} = 0$. За да направим това, ще установим, че функцията $z(x, t_1, t_2)$ е четна по отношение на независимата променлива x и тогава благодарение на нейната гладкост в $\bar{R}$ непосредствено ще следва $\frac{\partial z}{\partial x} /_{\Gamma_1} = 0$.

И така да разгледаме една произволна точка (x^0, t_1^0, t_2^0) от отворената област R . Фактът, че $z(x, t_1, t_2)$ удовлетворява уравнението (2.8), ни позволява да заключим, че е в сила равенството

$$(2.10) \quad M^*[z(x^0, t_1^0, t_2^0)] \equiv \frac{\partial^2 z(x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial x^2} - A_1(x^0, t_1^0, t_2^0) \frac{\partial z(x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial t_1} - A_2(x^0, t_1^0, t_2^0) \frac{\partial z(x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial t_2} - B(x^0, t_1^0, t_2^0) z(x^0, t_1^0, t_2^0) = F(x^0, t_1^0, t_2^0).$$

Да пресметнем стойността на оператора $M^*[z]$ за функцията $z(-x, t_1, t_2)$ в същата точка (x^0, t_1^0, t_2^0) . Имаме равенството

$$M^*[z(-x^0, t_1^0, t_2^0)] = \frac{\partial^2 z(-x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial x^2} - A_1(x^0, t_1^0, t_2^0) \frac{\partial z(-x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial t_1} - A_2(x^0, t_1^0, t_2^0) \frac{\partial z(-x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial t_2} - B(x^0, t_1^0, t_2^0) z(-x^0, t_1^0, t_2^0),$$

което съгласно четността на коефициентите $A_i, i=1, 2$, и B ни дава равенството

$$(2.11) \quad M^*[z(-x^0, t_1^0, t_2^0)] = \frac{\partial^2 z(-x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial x^2} - A_1(-x^0, t_1^0, t_2^0) \frac{\partial z(-x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial t_1} - A_2(-x^0, t_1^0, t_2^0) \frac{\partial z(-x^0, t_1^0, t_2^0)}{\partial t_2} - B(-x^0, t_1^0, t_2^0) z(-x^0, t_1^0, t_2^0) \\ = M^*[z(x, t_1, t_2)]|_{x=-x^0, t_1=t_1^0, t_2=t_2^0}.$$

От (2.11), като вземем пред вид, че функцията $z(x, t_1, t_2)$ удовлетворява (2.8) и в точката $(-x^0, t_1^0, t_2^0) \in R$, веднага получаваме равенството

$$M^*[z(-x, t_1, t_2)]|_{x=x^0, t_1=t_1^0, t_2=t_2^0} = F(-x^0, t_1^0, t_2^0),$$

което съгласно четността на функцията $F(x, t_1, t_2)$ може да се запише във вида

$$(2.12) \quad M^*[z(x, t_1, t_2)]|_{x=x^0, t_1=t_1^0, t_2=t_2^0} = F(x^0, t_1^0, t_2^0).$$

От (2.10) и (2.12), като помним, че точката (x^0, t_1^0, t_2^0) беше избрана произволно в R , заключаваме, че функцията $v = z(x, t_1, t_2) - z(-x, t_1, t_2)$ е решение на граничната задача

$$(2.13) \quad M^*[v] = 0 \text{ в } R, \quad v|_{\Gamma_6} = 0; \quad \Gamma_6 = \partial G \setminus \Gamma_6^*,$$

където Γ_6^* е горната основа на паралелепипеда R . Обаче едно решение на тази задача очевидно е функцията $z(x, t_1, t_2) \equiv 0$ в R . Тогава съгласно твърдението за единственост, съдържащо се в теорема 1 от [10], имаме равенството

$$(2.14) \quad v(x, t_1, t_2) \equiv z(x, t_1, t_2) - z(-x, t_1, t_2) \equiv 0,$$

или $z(-x, t_1, t_2) \equiv z(x, t_1, t_2)$, откъдето веднага следва равенството $\frac{\partial z}{\partial x}/\Gamma_1 = 0$.

С това теоремата 2.1 е доказана напълно.

Забележка. Задачата, която се получава от задачата $(N-D)_1$, когато Ноймановото условие се зададе не върху Γ_1 , а върху Γ_2 , очевидно се решава по същия начин.

Задача $(N-D)_2$. Да се намери функция $u(x, t_1, t_2)$, която да е непрекъсната, заедно с производните си $\partial^2 u/\partial x^2$, $du/\partial t_1$, $du/\partial t_2$ в затворената област $\bar{D}$, да удовлетворява там уравнението (4) и върху границата $\bar{\Gamma}$ да се подчинява на граничните условия

$$(2.16) \quad u/\bar{\Gamma} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}/\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = 0.$$

Теорема 2.2. Задачата $(N-D)_2$ притежава едно единствено решение, което заедно със своите производни от вида $\partial^2 u/\partial x^2$, $du/\partial t_1$ и $du/\partial t_2$ удовлетворяват в $\bar{D}$ условието на Липшиц спрямо x , t_1 и t_2 .

Доказателство. Твърдението за единственост се доказва също както в теорема 2.1. За да докажем твърдението за съществуване, достатъчно е да разгледаме една съответна постановка на задачата на Коши за помощното уравнение

$$(2.17) \quad M_1[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A_1(x, t_1, t_2) \frac{\partial u}{\partial t_1} - A_2(x, t_1, t_2) \frac{\partial u}{\partial t_2} - B(x, t_1, t_2)u = F(x, t_1, t_2),$$

където сега коефициентите $A_i(x, t_1, t_2)$, $i=1, 2$, $B(x, t_1, t_2)$ и дясната страна $F(x, t_1, t_2)$ са дефинирани в областта

$$\bar{x}: -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t_1 \leq T_1, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2,$$

като четни периодични продължения на съответните им коефициенти от уравнението (4). По-нататък разсъжденията са аналогични на тези от доказателството на теорема 2.1 (вж. още [13] и [14]).

Задача $(N-D)_3$. Да се намери функция $u(x, t_1, t_2)$, която да е непрекъсната в затворената област $\bar{D}$, заедно със своите производни от вида $\partial^2 u/\partial x^2$, $du/\partial t_1$, $du/\partial t_2$ да удовлетворява там уравнението (4) и върху границата $\bar{\Gamma}$ да се подчинява на граничните условия

$$(2.18) \quad u(x, t_1, t_2)/\bar{\Gamma} \setminus \Gamma_3 = 0$$

и

$$(2.19) \quad \frac{\partial u(x, t_1, t_2)}{\partial t_1}/\Gamma_3 = 0.$$

Изследването на задачата $(N-D)_3$ не може да се направи с методите, използвани в предните задачи, защото за извършване на необходимото гладко нечетно продължение по симетрия на коефициента $a_1(x, t_1, t_2)$ през равнината $t_1=0$ е необходимо той да се анулира в стената Γ_3 , а това противоречи на условието д). От това противоречие бихме могли да се освободим, ако в д) заменим неравенството $a_1(x, 0, t_2) > 0$ с равенството $a_1(x, 0, t_2) = 0$, но тогава стената Γ_3 ще бъде от тип Σ'_0 и според общите изводи на Фикера [1] върху нея въобще не бива да се задават никакви гранични условия (а в задачата $(N-D)_3$ върху Γ_3 е зададена

нормалната производна на неизвестната функция). Въпреки това, както ще видим по-долу, и тази задача допуска проста редукция до задачата на Дирихле, разрешена от Т. Генчев в работата му [10]. Именно ще докажем следната

Теорема 2.3. Ако коефициентите и дясната страна на уравнението (2.1) удовлетворяват условията а) — е) (формулирани в началото на § 2), задачата $(N-D)_3$ притежава едно единствено решение $u(x, t_1, t_2)$. При това функцията $u(x, t_1, t_2)$ и нейните производни, участващи в уравнението (2.1), удовлетворяват в $\bar{D}$ условието на Липшиц с константи, които зависят само от максимумите и от Липшицовите константи на коефициентите на уравнението (4) и на техните производни от вида $\partial/\partial t_i$, $i=1, 2$.

Доказателство. Доказателството на твърдението за единственост сега не може да се получи като просто следствие на строгия принцип на максимума, защото стената Γ_3 е от типа Σ_2 и следователно теорема 1.1 в случая е неприложима. Ние ще получим това доказателство, базирайки се на теорема 1 от [10]. Именно ще установим, че ако функцията $u(x, t_1, t_2)$ е едно произволно решение на задачата $(N-D)_3$, тя съвпада с единственото решение на задачата на Дирихле за уравнението (4) в областта $\bar{D}$ с гранично условие $u(x, t_1, t_2)/\bar{r}=0$. За тази цел е достатъчно да покажем, че $u(x, t_1, t_2)/\bar{r}_3=0$, т. е. че е в сила равенството

$$(2.20) \quad \varphi(x, t_2) - u(x, 0, t_2) = 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2.$$

Като вземем пред вид, че $u(x, t_1, t_2)$ удовлетворява уравнението в точките на стената Γ_3 и се анулира върху ръбовете $\bar{\Gamma}_3 \cap \bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_3 \cap \bar{\Gamma}_2$, $\bar{\Gamma}_3 \cap \bar{\Gamma}_5$, съобразявайки се с условието $\frac{\partial u}{\partial \bar{t}_1}/\bar{r}_3=0$ и финитността на функцията $f(x, t_1, t_2)$, веднага заключаваме, че функцията $\varphi(x, t_2)$ е решение на задачата на Дирихле за параболичното уравнение

$$(2.21) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_2(x, 0, t_2) \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} - b(x, 0, t_2) \varphi = 0$$

в $\bar{I}_3$ с нулеви гранични условия. Обаче такова решение очевидно е и функцията

$$(2.22) \quad \varphi_1(x, t_2) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2.$$

Като вземем пред вид теоремата за единственост на решението на тази задача (вж. например [12]), веднага заключаваме, че $\varphi(x, t_2)$ съвпада с $\varphi_1(x, t_2)$, т. е. че е в сила равенството (2.20). С това твърдението за единственост, съдържащо се в теорема 2.3, е доказано.

За да докажем твърдението за съществуване, ще означим със $z(x, t_1, t_2)$ решението на задачата на Дирихле за уравнението (4) в областта D с гранично условие $z/\bar{r}=0$. То съществува и притежава свойствената, предявявани към решението, за което става дума в нашата теорема ([10]). Някои от тези свойства са описани в теорема 1 от [10], поради което специално обсъждане заслужава само граничното условие $\frac{\partial z}{\partial \bar{t}_1}/\bar{r}_1=0$. Но и неговата валидност се вижда просто като се вземе пред вид, че $z(x, t_1, t_2)$ удовлетворява уравнението (4) и върху $\bar{I}_3$, където $z(x, t_1, t_2)$, а следователно и $\partial^2 z/\partial x^2$ и $\partial z/\partial t_2$ се анулират, а коефициентът $a_1(x, t_1, t_2)$

е строго положителен. И наистина, вземайки всичко това пред вид, от уравнението (4) веднага заключаваме, че върху Γ_3 е в сила равенството

$$(2.23) \quad -a_1(x, 0, t_2) \frac{\partial z(x, 0, t_2)}{\partial t_1} = f(x, 0, t_2),$$

откъдето, съобразявайки се с финитността на $f(x, t_1, t_2)$ и с условието д), получаваме равенството $\frac{\partial z}{\partial t_1}/\Gamma_3 = 0$. По такъв начин теорема 2.3 е доказана напълно.

Задача (N—D)₄. Да се намери функция $u(x, t_1, t_2)$, която да е непрекъсната в затворената област $\bar{D}$, заедно със своите производни от вида $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial u/\partial t_i$, $i=1, 2$, да удовлетворява там уравнението (4) и да се подчинява на граничните условия

$$(2.24) \quad \frac{\partial u}{\partial t_1}/\Gamma_3 \cup \Gamma_4 = 0, \quad u/\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = 0.$$

Теорема 2.4. Ако коефициентите и дясната страна на уравнението (4) удовлетворяват условията а) — е), задачата (N—D)₄ притежава едно единствено решение, което има качествата на решението на задачата (N—D)₂.

Доказателството на тази теорема може да се извърши, като се разсъждава както при доказването на теорема 2.3, но с тази разлика, че разглежданията, които извършихме върху Γ_3 , сега ще се извършат и върху стената Γ_4 .

Задача (N—D)₅. Да се намери функция $u(x, t_1, t_2)$, която да е непрекъсната в $\bar{D}$, заедно със своите производни $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial u/\partial t_i$, $i=1, 2$, да удовлетворява там уравнението (4) и да се подчинява на граничните условия

$$(2.25) \quad \frac{\partial u}{\partial t_1}/\Gamma_3 \cup \Gamma_4 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}/\Gamma_1 = 0, \quad u/\Gamma_2 \cup \Gamma_5 = 0.$$

Теорема 2.5. Ако коефициентите и дясната страна на уравнението (4) удовлетворяват условията а) — е), задачата (N—D)₅ притежава едно единствено решение, което има и качествата на решението на задачата (N—D)₂.

Доказателство. Твърдението за единственост ще бъде доказано, като установим, че всяко решение $u(x, t_1, t_2)$ на задачата (N—D)₅ се явява решение и на задачата (N—D)₂. За целта трябва да се покаже, че функцията $u(x, t_1, t_2)$ се анулира върху стените Γ_3 и Γ_4 . Но това следва от съображения, напълно аналогични на тези, които извършихме при доказване на твърдението за единственост на решението на задачата (N—D)₃. Само че тук се използва теоремата за единственост не на задачата на Дирихле, а на задачата на Нойман за параболичните уравнения.

За да докажем твърдението за съществуване на решението на задачата (N—D)₅, достатъчно е да спрем вниманието си върху решението $z(x, t_1, t_2)$ на задачата (N—D)₂, съществуващо съгласно теорема 2.2, и да проверим (както това направихме в доказателството на твърдението за съществуване на решение на задачата (N—D)₃), че $\frac{\partial z}{\partial t_1}/\Gamma_3 = 0$, $\frac{\partial z}{\partial t_1}/\Gamma_4 = 0$. В такъв случай можем да считаме, че и теорема 2.5 е доказана изцяло.

Очевидно по същия начин се решава и граничната задача, която се получава от задачата $(N-D)_0$, като граничните условия $\frac{\partial u}{\partial x}/r_1=0$ и $u/r_2=0$ се заменят съответно с условията $u/r_1=0$ и $\frac{\partial u}{\partial x}/r_2=0$.

С оглед разглеждането на чистата задача на Нойман за ултрапараболичното уравнение (4) предварително ще разглеждаме задачата на Коши за същото уравнение, разглеждано в областта κ , при гранични условия

$$(2.26) \quad \frac{\partial u}{\partial t_1}/\kappa \cap \{(x, t_1, t_2) \in E_3/t_1=T_1\}=0, \quad u(x, t_1, t_2)/t_2=0$$

и ще докажем следната

Теорема 2.6. Ако коефициентите и дясната страна на уравнението (4) удовлетворяват условията на теорема 2 от [10], горната задача на Коши притежава едно единствено ограничено решение $u(x, t_1, t_2)$, което заедно с производните $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial u/\partial t_i$, $i=1, 2$, удовлетворява в κ условията на Липшиц спрямо x , t_1 и t_2 .

Доказателство. Нека $u(x, t_1, t_2)$ е произволно решение на разглежданата задача на Коши. Като вземем пред вид, че функцията $u(x, t_1, t_2)$ удовлетворява уравнението (4) в стената I'_3 и се съобразим с граничните условия върху тази стена, веднага ще заключим, че функцията $u(x, 0, t_2)$ е ограничено решение на задачата на Коши за параболичното уравнение

$$(2.27) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - a_2(x, 0, t_2) \frac{\partial \eta}{\partial t_2} - b(x, 0, t_2) \eta = 0, \quad \eta = \eta(x, t_2),$$

в ивицата $\kappa \cap \{(x, t_1, t_2) \in E_3/t_1=0\}$, при нулево начално условие. От теоремата за единственост на решението на тази задача [12], като вземем пред вид, че и функцията, която е тъждествено равна на нула в κ , е нейно решение, веднага заключаваме, че е в сила равенството

$$(2.28) \quad u(x, t_1, t_2)/\kappa \cap \{(x, t_1, t_2) \in E_3/t_1=0\} = 0.$$

По същия начин се получава и равенството

$$(2.29) \quad u(x, t_1, t_2)/\kappa \cap \{(x, t_1, t_2) \in E_3/t_1=T_1\} = 0.$$

По такъв начин става ясно, че произволно взетото решение на разглежданата задача на Коши съвпада с единственото решение на задачата на Коши за уравнението (4) в ивицата κ при нулеви гранични условия (вж. коментара след теорема 2 от [10]). С това твърдението за единственост, формулирано в теорема 2.6, е доказано.

За да докажем твърдението за съществуване, достатъчно е да разгледаме задачата на Коши, която се получава от задачата (4) — (2.26), като данните за нормалната производна (върху I'_3 и I'_4) се зададат на функцията $u(x, t_1, t_2)$. Тази задача на Коши, както стана дума и по-горе, има единствено решение, притежаващо качествата, предявявани към решението, за което става дума в теорема 2.6. Лесно се проверява, че това именно решение е решение и на разглежданата от нас задача на Коши (вж. доказателството на теорема 2.3).

Задача $(N-D)_0$ (Задача на Нойман). Да се намери функция $u(x, t_1, t_2)$, която да е непрекъсната в $\bar{D}$, заедно със своите производни $\partial u / \partial t_i, i=1, 2$, $\partial^2 u / \partial x^2$ да удовлетворява там уравнението (4) и върху границата $\bar{\Gamma}$ да се подчинява на граничните условия

$$(2.30) \quad u(x, t_1, t_2)|_{\Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial u(x, t_1, t_2)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0.$$

Теорема 2.7. Ако коефициентите и дясната страна на уравнението (4) удовлетворяват условията а) — е), задачата $(N-D)_0$ притежава едно единствено решение, което със своите производни $\partial u / \partial t_i, i=1, 2$, $\partial^2 u / \partial x^2$ удовлетворява в $\bar{D}$ условието на Липшиц спрямо x, t_1 и t_2 .

Доказателството на тази теорема се извършва също както на теорема 2.2, като този път задачата се редуцира до разгледаната при теорема 2.6 задача на Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer, G. On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. In: Boundary problems in differential equations, Madison, 1960, 97—120.
2. Hopf, E. A remark on linear elliptic differential equations of the second order. Proc. Amer. Math. Soc., 3, 1952, 791—793.
3. Олейник, О. А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа, Матем. сб., 30, 1952, 695—702.
4. Giraud, G. Généralisations des problèmes sur les opérations du type elliptique. Bull. Math. soc. France, 56, 1932, 248—352.
5. Выборны, Р. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа. ДАН СССР, 117, № 4, 1957, 563—566.
6. Agmon, S., L. Nirenberg, M. H. Protter. A Maximum Principle for a Class of Hyperbolic Equations and Applications to Equations of Mixed Elliptic-Hyperbolic Type. Comm. Pure Appl. Math., 6, 1953, 455—470.
7. Радкевич, Е. В., Вторая краевая задача для уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Вестн. Моск. Ун-та, матем., механ., № 4, 1967, 3—11.
8. Фатеева, Г. М. О краевых задачах для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Матем. Сб., 76 (118:4), 1968, 537—565.
9. Генчев, Т. Върху граничните задачи за една класа линейни диференциални уравнения от втори ред с неотрицателна характеристична форма. Дисертация, Соф. унив., 1969.
10. Генчев, Т. Върху задачата на Коши за един клас улtrapараболично уравнение. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 58, 1965, 141—169.
11. Генчев, Т. Върху задачите на Дирихле и Коши за улtrapараболичните уравнения. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 57, 1964, 9—39.
12. Ильин, А. М., А. С. Калашников, О. А. Олейник. Линейные уравнения второго порядка параболического типа, Успехи матем. наук, XVII, 3(105), 3—141.
13. Райчинов, Ив. Върху задачата на Дирихле за една класа елиптични уравнения, израждащи се във вътрешността на областта в параболични и в уравнения от първи ред. Известия на Мат. инст., БАН, 9, 1966, 85—107.
14. Райчинов, Ив. Върху една класа израждащи се елиптични уравнения. Год. ВТНЗ, Матем., кн. 1, 1965, 117—153.
15. Генчев, Т. Върху задачата на Коши за един клас квазилинейни уравнения с неотрицателна характеристична форма. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 60, 1967, 113—137.

Постъпила на 26. III. 1969 г.

О ЗНАКЕ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ТОЧКАХ АБСОЛЮТНОГО ЭКСТРЕМУМА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА—ДИРИХЛЕ

Иван Райчинов

(Резюме)

В § 1 доказывается теорема о знаке нормальной производной в точках абсолютного экстремума решений общего эллиптического-параболического уравнения

$$(1) \quad a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \quad a^{ij}\xi_i \xi_j \geq 0 \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

В § 2 доказываются несколько теорем существования и единственности решения ультрапараболического уравнения

$$(4) \quad u_{xx} = a_1(x, t_1, t_2)u_{t_1} + a_2(x, t_1, t_2)u_{t_2} + b(x, t_1, t_2)u + f(x, t_1, t_2),$$

удовлетворяющего граничным условиям типа Неймана—Дирихле. В частности, доказана теорема существования и единственности решения задачи Неймана для уравнения (4), когда область — параллелепипед.

ON THE SIGN OF THE NORMAL DERIVATIVE IN THE POINTS OF AN ABSOLUTE EXTREMUM OF THE SOLUTIONS OF ELLIPTICO-PARABOLIC EQUATIONS AND SOME BOUNDARY PROBLEMS OF NEUMANN-DIRICHLET'S TYPE

Ivan Raičinov

(Summary)

In § 1 a theorem is presented about the sign of the normal derivative in the points of an absolute extremum of the solutions of the general elliptico-parabolic equation

$$(1) \quad a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), \quad a^{ij}\xi_i \xi_j \geq 0 \quad (x \equiv (x_1, \dots, x_n)).$$

In § 2 some theorems are proved for the existence and uniqueness of the solution of the ultra-parabolic equation

$$(4) \quad u_{xx} = a_1(x, t_1, t_2)u_{t_1} + a_2(x, t_1, t_2)u_{t_2} + b(x, t_1, t_2)u + f(x, t_1, t_2),$$

satisfying boundary conditions of the Neumann-Dirichlet's type. In particular a theorem is proved for the existence and uniqueness of the solution of the Neumann's problem of equation (4), when the region is a parallelepiped.