

ТЕОРЕМАТА ЗА СРЕДНИТЕ СТОЙНОСТИ И НЕЙНИТЕ ОБОБЩЕНИЯ, ПРИЛОЖЕНИ ЗА ЧЕБИШЕВИ СИСТЕМИ ФУНКЦИИ

Владимир Л. Чакалов

1. Задачата за прецизиране на теоремите за средните стойности, приложени за реални полиноми до дадена степен, произхожда от румънския математик Д. Помпею [1], [2], който е третирали някои нейни частни случаи. С нея са се занимавали по-късно П. Монтел [3], [4], Ж. Фавар [5], [6] и др. Окончателно решение на тази задача дава Л. Чакалов в работите си [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Пълното изложение на това решение се съдържа в [13]. В приложения от Л. Чакалов метод се използва апаратът на ортогоналните Чебишеви полиноми.

В настоящата работа си поставяме за цел да използваме някои резултати, произхождащи от П. Чебишев и А. Марков, изложени от М. Крейн в [14], за да обобщим резултатите на Л. Чакалов за така наречените Чебишеви системи функции. В частния случай, разгледан от Л. Чакалов, ще прецизираме някои от неговите резултати.

Преди да формулираме задачата, ще изложим дефинициите и резултатите, които ще използваме и които могат да се намерят в [14].

Означаваме с $[a, b]$ краен затворен интервал и разглеждаме $n+1$ реални непрекъснати линейно независими функции

$$(1) \quad x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t), \quad t \in [a, b].$$

Казваме, че системата (1) е Чебишева система (от ред n), ако произволен „полином“ с реални коефициенти от вида

$$(2) \quad x(t) = a_0 x_0(t) + a_1 x_1(t) + \dots + a_n x_n(t), \quad \sum_{i=0}^n a_i^2 > 0,$$

има не повече от n различни нули в интервала $[a, b]$.

Казваме, че $t_1 \in [a, b]$ е „четна“ нула на $x(t)$, ако $x(t_1) = 0$ и ако съществува околност Δ на t_1 така, че $x(t)$ да си запазва знака в Δ . Всяка нула на $x(t)$, която не притежава горното свойство, наричаме „нечетна“.

Ако $t \in [a, b]$, полагаме

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 2 & \text{за } a < t < b, \\ 1 & \text{за } t = a \text{ или } t = b. \end{cases}$$

Числото $\epsilon(t)$ наричаме индекс на t .

По-нататък ще използваме многократно следната

Лема 1 ([14], стр. 44). Ако $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$, а $t_{k+1}, \dots, t_{k+l} \in [a, b]$, то за да съществува полином $x(t)$ от вида (2), за който $t_1, \dots, t_k$ са четни, а $t_{k+1}, \dots, t_{k+l}$ нечетни нули и който няма други нули, необходимо и достатъчно е да имаме

$$2k \mid l \leq n.$$

Разглеждаме сега пространството X_n от всички полиноми $x(t)$ от вида (2), съставени от линейните комбинации на Чебишевата система функции (1). Ако $c(x)$ е линеен позитивен функционал, дефиниран върху X_n (т. е. $c(x) > 0$, ако $x(t) \geq 0$ за всяко $t \in [a, b]$), казваме, че $c(x)$ е строго позитивен, ако от $x(t) \geq 0$ и $x(t) \not\equiv 0$ следва $c(x) > 0$. Казваме, че $c(x)$ е нестрого позитивен, ако не притежава горното свойство, т. е. ако съществува полином $x^*(t) \geq 0$ ($x^*(t) \not\equiv 0$) така, че $c(x^*) = 0$.

Ако $c(x) \geq 0$ е позитивен функционал, дефиниран върху X_n , той има поне едно представяне от вида

$$(3) \quad c(x) = A_1 x(t_1) + A_2 x(t_2) + \dots + A_r x(t_r),$$

където $A_i > 0$, $t_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, r$, и освен това

$$(4) \quad \sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) \leq n+2.$$

При това, ако $c(x)$ е нестрого позитивен, представянето (3) е единствено

и $\sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) \leq n$. Обратно, ако $\sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) \leq n$, $c(x)$ е нестрого позитивен функционал.

Представяния от вида (3) се наричат канонични представяния (вж. [14], § 4, стр. 46 — 53). Положителните числа A_i се наричат маси, съсредоточени в точките t_i .

Ако $c(x)$ е строго позитивен функционал и $t^* \in [a, b]$, съществува точно едно положително число ϱ така, че функционалът

$$c^*(x) = c(x) - \varrho x(t^*)$$

да е нестрого позитивен. Числото ϱ се нарича максимална маса в точката t^* . Ако вземем пред вид, че $c^*(x)$ има единствено канонично представяне, можем да кажем, че $c(x)$ има единствено канонично представяне с максимална маса ϱ в t^* . От неравенството (4) и от лема 1 следва, че всяка маса A_i от представянето (3), която е съсредоточена във вътрешна точка t_i на интервала (a, b) , е максимална.

Ако $c(x)$ е строго позитивен функционал, то съгласно казаното по-горе $\sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) > n$. Когато $\sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) = n+1$, каноничното представяне (3) се нарича главно. Характерно в този случай е, че всичките маси на дадено главно представяне са максимални. Всеки строго позитивен функционал има точно две главни представяния, а именно: долно главно представяне, което не съдържа точката b като възел, и горно главно представяне, за което точката b е възел (възел наричаме всяка точка t_i от дясната страна на представянето (3)).

По-долу ще опишем (без доказателства) всевъзможните канонични представяния на даден строго позитивен функционал така, както това е направено в [14], стр. 58—60.

Разглеждаме произволен строго позитивен функционал $c(x)$, дефиниран върху $n+1$ -мерното пространство X_n . При това отделно ще разгледаме случаите, когато n е нечетно и когато е четно.

а) $n=2m-1$. Ако в точка a е съсредоточена максимална маса $\varrho(a)$, останалите маси се разпределят в останалите възли $\bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_m = b$ на горното главно представяне. Ако масата μ в точка a намалява от $\varrho(a)$ до нула, възлите $t_1(\mu) < t_2(\mu) < \dots < t_m(\mu)$ непрекъснато намаляват заедно с μ (т. е. те са непрекъснати и растящи функции на μ в интервала $0 \leq \mu \leq \varrho(a)$). Когато $\mu=0$, възлите съвпадат с възлите $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ на долното главно представяне. Ако оставим сега масата σ в точка b да расте от нула до $\varrho(b)$ ($\varrho(b)$ е максималната маса в точка b), останалите възли $t_1(\sigma) < t_2(\sigma) < \dots < t_m(\sigma)$ в съответните канонични представяния ще намаляват непрекъснато (т. е. останалите възли са намаляващи непрекъснати функции на σ в интервала $0 \leq \sigma \leq \varrho(b)$). Когато $\sigma = \varrho(b)$, останалите възли съвпадат с възлите $a = \bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_{m-1}$ на горното главно представяне, откъдето тръгнахме.

При това движение на възлите всяка вътрешна точка t на $[a, b]$ е възел на едно и само едно канонично представяне.

б) $n=2m$. Ако в точка b е съсредоточена максимална маса $\varrho(b)$, останалите възли в представянето (3) ще съвпадат с възлите $\bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_{m-1}$ ($\bar{t}_0 > a$, $\bar{t}_{m-1} < b$) на горното главно представяне на $c(x)$. Ако масата σ в точка b намалява от $\varrho(b)$ до нула, останалите възли $t_1(\sigma) < t_2(\sigma) < \dots < t_m(\sigma)$ растат непрекъснато, започвайки от $\bar{t}_0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_{m-1}$ (т. е. $t_1(\sigma) < t_2(\sigma) < \dots < t_m(\sigma)$ са намаляващи непрекъснати функции на σ в интервала $0 \leq \sigma \leq \varrho(b)$). Същевременно в точката a се появява маса μ , която расте от нула до $\varrho(a)$, когато σ намалява от $\varrho(b)$ до нула. Когато $\sigma=0$ (а $\mu=\varrho(a)$), останалите маси в представянето (3) се разпределят в останалите възли $\bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_m$ ($\bar{t}_m < b$) на долното главно представяне. Ако оставим първия възел от представянето, в който е съсредоточена максимална маса, да расте от a до $\bar{t}_0$, останалите възли ще са растящи непрекъснати функции на първия възел в интервала $[a, \bar{t}_0]$. Когато първият възел съвпадне с $\bar{t}_0$, останалите възли ще съвпадат с останалите възли $\bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_m = b$ на горното главно представяне. Представяния от последния вид (за които a и b не са възли) ще наричаме междинни представяния. Те притежават това свойство на главните представяния, че всичките им маси са максимални и всички възли на две междинни представяния се разделят взаимно (т. е. между всеки два възела на едно междинно представяне има точно един възел на всяко друго междинно представяне).

При горното движение на възлите всяка точка t на (a, b) е възел на едно и само едно канонично представяне.

2. В тази точка ще формулираме задачата и ще укажем нейното решение, като се базираме съществено на резултатите, формулирани в т. 1.

Нека $c(x) \neq 0$ е позитивен функционал, дефиниран върху пространството X_n . Ако $x'(t) \in X_n$ е полином, за който е в сила равенството

$$(5) \quad c(x') = 0,$$

очевидно съществува поне една „средна стойност“ ξ , $a < \xi \leq b$, така че да е в сила равенството

$$(6) \quad x'(\xi) = 0.$$

Това е непосредствено следствие от представянето (3) на $c(x)$. Задачата, която си поставяме тук (и която Л. Чакалов решава в случая, когато X_n е пространството от реални алгебрични полиноми до степен n), е за даден позитивен функционал $c(x)$ да се намерят всички възможно най-малки съвкупности $M \subset [a, b]$, които притежават свойството: от равенство (5) да следва съществуването на $\xi \in M$ така, че да е в сила (6). Следващата дефиниция прецизира понятието минимална съвкупност.

Казваме, че съвкупността $M \subset [a, b]$ е минимална по отношение на даден позитивен функционал $c(x)$, ако

а) за всеки полином $x'(t) \in X_n$, за който е в сила (5), съществува $\xi \in M$ така, че да е в сила (6), и

б) ако $M' \subset M$ е съвкупност, която има свойството а), то $M' = M$.
Свойство б) може да се замени със свойството

б') ако $\xi \in M$, съвкупността $M/\{\xi\}$ не притежава свойство а).

Лесно се вижда, че всяка минимална съвкупност, определена от условията а), б), е минимална и според а), б'). Обратно, всяка минимална съвкупност, определена от а), б'), е минимална и според а), б).

Най-напред ще разгледаме простия случай, когато $c(x) \neq 0$ е нестрого позитивен функционал. В този случай, както знаем от точка 1, $c(x)$ има единствено представяне от вида (3). Ще докажем следната

Теорема 1. Ако $c(x)$ е нестрого позитивен функционал, който не се анулира тъждествено и ако (единственото му) канонично представяне (3) съдържа повече от два члена ($\nu > 2$), единствената минимална съвкупност за $c(x)$ е интервалът (t_1, t_*) . Ако (3) съдържа два члена, единствените две минимални съвкупности за $c(x)$ са интервалите $[t_1, t_2)$ и $(t_1, t_2]$. При $\nu = 1$ единствената минимална съвкупност е точката t_1 .

Доказателство. Нека $\nu > 2$. Ако за някой полином $x'(t) \in X_n$ имаме $c(x') = 0$, от (3) е ясно, че съществува поне едно $\xi \in (t_1, t_*)$ така, че $x'(\xi) = 0$, откъдето следва, че интервалът (t_1, t_*) удовлетворява условието а). За да покажем, че този интервал е минимална съвкупност, ще покажем най-напред, че за всяко $\xi \in (t_1, t_*)$ съществува полином $x^*(t)$, за който $c(x^*) = 0$ и който има единствена нула ξ в интервала $[a, b]$. Означаваме за тази цел с $x'(t)$ полином, който има четни нули всички t_i , за които $t_i < \xi$, и нечетна нула ξ , като при това $x'(t) \geq 0$ за $t < \xi$ (тогава $x'(t) < 0$ за $t > \xi$)*. Че такъв полином съществува, следва от лема 1. Означаваме по-нататък с $x''(t)$ полином, за които взлите $t_i > \xi$ са четни нули, а ξ е нечетна нула, като при това $x''(t) > 0$ за $t < \xi$ (следователно $x''(t) \leq 0$ за $t > \xi$). Съществуването на такъв полином също следва от лема 1. Понеже $c(x') < 0$ и $c(x'') > 0$, съществува положително число λ , така че за полинома

$$x^*(t) = \lambda x'(t) + x''(t)$$

да е в сила равенството

$$c(x^*) = 0.$$

Тук, както и по-нататък ще считаме, че построените полиноми нямат други нули освен указаните.

От друга страна, от начина, по който построихме $x^*(t)$, следва, че той има единствена нула в $[a, b]$, а именно ξ . Сега вече лесно се показва, че (t_1, t_*) е минимална съвкупност. Ще покажем именно, че (t_1, t_*) удовлетворява условието б'). И наистина, ако $\xi \in (t_1, t_*)$, то $(t_1, t_*)/\{\xi\}$ не удовлетворява условието а), тъй като съществува полином $x^*(t)$, за който $c(x^*)=0$ и който се анулира само в ξ , следователно не се анулира в $(t_1, t_*)/\{\xi\}$, откъдето следва минималността на (t_1, t_*) .

Също тъй лесно се вижда, че няма други минимални съвкупности освен намерената по-горе. Наистина, ако M е произволна минимална съвкупност за $c(x)$ и ако $\xi \in (t_1, t_*)$, то $\xi \in M$, защото в противен случай би следвало, че съществува полином $x^*(t)$, за който $c(x^*)=0$ и който има единствена нула ξ , т. е. няма нито една нула в M . Но това не е възможно, защото M удовлетворява условието а). И тъй $M \supset (t_1, t_*)$. Но M е минимална съвкупност и удовлетворява условието б), докато (t_1, t_*) удовлетворява условието а), следователно $M = (t_1, t_*)$.

Ако $\nu=1$, очевидно съществува само една минимална съвкупност и това е единственият възел t_1 на представянето (3).

Ако $\nu=2$, твърдението на теоремата се доказва аналогично на случая $\nu>2$, поради което няма да се спираме на доказателството.

В следващото изложение ще се спрем на въпроса за намиране на минималните съвкупности на строго позитивни функционали, дефинирани върху пространството X_n . Тук се налага отделно третиране на случаите, когато n е четно и нечетно.

А. $n=2m-1$. В този случай ще докажем следната

Теорема 2. Нека $n=2m-1$ е нечетно естествено число и $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху X_n . Ако $n=1$, единствената минимална съвкупност е единственият възел t_1 в долното главно представяне на $c(x)$. Ако $n=3$, единствените минимални съвкупности са полузатворените интервали $[t_1, t_2)$, $(t_1, t_2]$, чиито краища са възлите на долното главно представяне на $c(x)$. Ако $n>3$, единствената минимална съвкупност е интервалът (t_1, t_m) , чиито краища t_1, t_m са съответно най-малкият и най-големият възел на долното главно представяне.

Доказателство. Ако $n=1$, долното главно представяне на $c(x)$ съдържа само един възел. Ясно е тогава, че ако $c(x)=0$, то $x(t_1)=0$, така че $\{t_1\}$ удовлетворява условието а). Но то удовлетворява и условието б), понеже празната съвкупност (която е подсъвкупност на $\{t_1\}$, несъвпадаща с $\{t_1\}$) не удовлетворява а), следователно ако $M \subset \{t_1\}$ и M удовлетворява а), то $M = \{t_1\}$. Че други минимални съвкупности не съществуват, следва лесно от обстоятелството, че всяка минимална съвкупност M трябва да съдържа t_1 , а $\{t_1\}$ удовлетворява условието а). Наистина, ако M не съдържа t_1 , то като построим полином $x(t)$ с единствена нула t_1 , бихме имали $c(x)=0$ и $x(t)$ не притежава нула в M , което е невъзможно.

Ако $n=3$ ($m=2$), лесно се вижда, че при $c(x)=0$ полиномът $x(t)$ има поне една нула във всеки от интервалите $[t_1, t_2)$ и $(t_1, t_2]$. Това следва то долното главно представяне на $c(x)$ от вида (3) и от факта, че ако за някой полином $x(t)$ имаме $c(x)=0$ и $x(t_1) \neq 0$ ($x(t_2) \neq 0$), сигурно е в сила равенството $x(t_2)=0$ ($x(t_1)=0$). И тъй всеки от интервалите $[t_1, t_2)$ и $(t_1, t_2]$ има свойството а). Ще покажем, че всеки от тях има и свойството б'),

откъдето ще следва, че те са минимални съвкупности. Доказателството ще проведем например за $[\underline{t}_1, \underline{t}_2]$. Предварително ще покажем, че ако $\xi \in [\underline{t}_1, \underline{t}_2]$, съществува полином $x(t) \in X_3$, за който $c(x) = 0$ и който има единствена нула ξ в $[\underline{t}_1, \underline{t}_2]$. За тази цел построяваме полинома $x'(t)$, за който $\underline{t}_1$ е четна нула, а ξ — нечетна нула, като при това $x'(t) \geq 0$ за $t < \xi$ (следователно $x'(t) < 0$ при $t > \xi$). Означаваме по-нататък с $x''(t)$ полином, за който ξ е нечетна нула, а $\underline{t}_2$ — четна нула, като при това $x''(t) > 0$ за $t < \xi$ (следователно $x''(t) < 0$ за $t > \xi$). Ако $\xi = \underline{t}_1$, то ясно е, че $c(x'') = 0$ и освен това $x''(t)$ няма друга нула в $[\underline{t}_1, \underline{t}_2]$ освен $\xi = \underline{t}_1$. Ако $\xi \neq \underline{t}_1$, от факта, че $c(x') < 0$ и $c(x'') > 0$, следва, че съществува положителна константа λ такава, че полиномът

$$x(t) = \lambda x'(t) + x''(t),$$

който има единствена нула ξ , да удовлетворява равенството

$$c(x) = \lambda c(x') + c(x'') = 0.$$

С това показахме, че за всяко $\xi \in [\underline{t}_1, \underline{t}_2]$ съществува полином $x(t)$, който не се анулира за други стойности на t в този интервал и за който $c(x) = 0$. Оттук обаче веднага следва, че множеството $[\underline{t}_1, \underline{t}_2] \setminus \{\xi\}$, където $\xi \in [\underline{t}_1, \underline{t}_2]$, не може да притежава свойството а). С това е показано, че интервалът $[\underline{t}_1, \underline{t}_2]$ е минимална съвкупност. По същия начин се вижда, че и $(\underline{t}_1, \underline{t}_2]$ е минимална съвкупност.

Че други минимални съвкупности няма, се вижда, като се докаже, че ако M е минимална съвкупност, несъдържаща $[\underline{t}_1, \underline{t}_2]$, тя съдържа $(\underline{t}_1, \underline{t}_2]$. На доказателството на този факт обаче няма да се спираме.

Нека сега $n > 3$ и $n = 2m - 1$. В този случай очевидно интервалът $(\underline{t}_1, \underline{t}_m)$ притежава свойството а). Това следва от долното главно представяне на $c(x)$ и от факта, че $m > 2$. За да покажем, че $(\underline{t}_1, \underline{t}_m)$ е минимална съвкупност, ще установим, че той има свойството б'). За тази цел при дадено $\xi \in (\underline{t}_1, \underline{t}_m)$ построяваме полинома $x'(t)$, който има нечетна нула ξ и четни нули всички възли $\underline{t}_i$ на долното главно представяне на $c(x)$, за които $\underline{t}_i > \xi$. При това нормираме $x'(t)$ с условието $x'(t) > 0$ за $t < \xi$ (следователно $x'(t) \leq 0$ за $t \geq \xi$). Аналогично построяваме и полинома $x''(t)$, който има четни нули всички възли $\underline{t}_1$ на долното главно представяне на $c(x)$, за които $\underline{t}_i < \xi$, и нечетна нула ξ , като при това $x''(t) \geq 0$ за $t \leq \xi$ (следователно $x''(t) < 0$ за $t > \xi$). Понеже $c(x') > 0$ и $c(x'') < 0$, съществува положително число λ такава, че за полинома

$$x(t) = \lambda x'(t) + x''(t),$$

който има очевидно единствена нула ξ , да имаме

$$c(x) = \lambda c(x') + c(x'') = 0.$$

Оттук следва, че за всяко $\xi \in (\underline{t}_1, \underline{t}_m)$ съвкупността $(\underline{t}_1, \underline{t}_m) \setminus \{\xi\}$ не удовлетворява условието а), следователно $(\underline{t}_1, \underline{t}_m)$ удовлетворява и условието б'), т. е. е минимална съвкупност. Че $(\underline{t}_1, \underline{t}_m)$ е единствената минимална съвкупност, следва от факта, че всяка минимална съвкупност M съдържа

всички точки на $(\underline{t}_1, \underline{t}_m)$. Наистина, ако това не беше вярно, то би имало поне едно $\xi \in (\underline{t}_1, \underline{t}_m)$, което не принадлежи на M . Тогава би съществувал полином $x(t)$, за който ξ е единствена нула и освен това $c(x) = 0$, следователно $x(t)$ не би се анулирал в M , което е невъзможно. Но от $(\underline{t}_1, \underline{t}_m) \subset M$, от минималността на M и от факта, че $(\underline{t}_1, \underline{t}_m)$ удовлетворява а), следва, че $M = (\underline{t}_1, \underline{t}_m)$. С това доказателството на теоремата е завършено.

Б. $n = 2m$. Най-напред ще разгледаме случая $n > 2$ ($m > 1$). Ще покажем в този случай, че има безбройно много минимални съвкупности. Ако $\underline{t}_0 < \underline{t}_1 < \dots < \underline{t}_m$ ($\underline{t}_0 > a$, $\underline{t}_m < b$) и $\underline{t}_0 < \underline{t}_1 < \dots < \underline{t}_m$ ($\underline{t}_0 < a$, $\underline{t}_m < b$) са съответно възлите на горното главно и долното главно представяне на даден строго позитивен функционал $c(x)$, а $\underline{t}_0 < \underline{t}_1 < \dots < \underline{t}_m$ — възлите на кое да е междинно представяне (т. е. представяне, на което крайните възли $\underline{t}_0, \underline{t}_m$ са вътрешни точки за интервала $[a, b]$), то ще покажем, че всяка минимална съвкупност съвпада с някой интервал от вида $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$, $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$ или $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$. Преди това обаче ще докажем следната

Лема 2. Нека $n = 2m > 2$. Ако $\underline{t}_0, \underline{t}_m$ са крайните възли на някое междинно представяне на строго позитивния функционал $c(x)$, а ξ и η са числа, удовлетворяващи неравенствата

$$\underline{t}_0 < \xi \leq \underline{t}_0, \quad \underline{t}_m \leq \eta \leq \underline{t}_m; \quad (\underline{t}_0 \leq \xi \leq \underline{t}_0, \quad \underline{t}_m \leq \eta < \underline{t}_m).$$

то съществува полином $x(t) \in X_n$, за който $c(x) = 0$ и който има единствените нули ξ и η .

Доказателство. Означаваме с $x'(t)$ полином, за който ξ и η са нечетни нули, а всички възли на представянето $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$, които са между ξ и η , са четни нули. При това нормираме $x'(t)$ с условието $x'(t) > 0$ за $t < \xi$ (следователно $x'(t) \leq 0$ за $\xi \leq t \leq \eta$ и $x'(t) > 0$ за $t > \eta$). Че такъв полином съществува, се вижда от лема 1. Ясно е, че $c(x') > 0$ (понеже $\underline{t}_0 < \xi$ или $\underline{t}_m > \eta$). Означаваме с $x''(t)$ полином, за който $\underline{t}_0^*$ е четна нула (за $\underline{t}_0^* < \xi$), а ξ и η са нечетни нули, като при това $x''(t) \geq 0$ за $t \leq \xi$ (следователно $x''(t) < 0$ за $\xi < t < \eta$ и $x''(t) > 0$ за $t > \eta$). Ясно е, че $c(x'') < 0$, понеже между ξ и η има поне един възел на представянето $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$, за който съгласно нормировката $x''(t)$ има отрицателна стойност. Избираме по-нататък положителното число λ така, че за полинома

$$x(t) = \lambda x'(t) + x''(t),$$

който се анулира само в точките ξ и η , да имаме

$$c(x) = \lambda c(x') + c(x'') = 0.$$

С това лемата е доказана.

Следващата теорема дава описание на минималните съвкупности при четни стойности на n ($n > 2$).

Теорема 3. Нека $n = 2m$ е четно естествено число, по-голямо от 2, и $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху X_n . Всичките минимални съвкупности за $c(x)$ се изчерпват от отворените интервали $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$, $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$ и $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$, където $\underline{t}_0, \underline{t}_m$ са първият и последният възел на долното главно представяне на $c(x)$, $\underline{t}_0, \underline{t}_m$ са първият и последният възел на горното главно представяне на $c(x)$, а $\underline{t}_0$ и $\underline{t}_m$ са първият и последният възел на произволно междинно представяне на $c(x)$.

Доказателство. Най-напред ще покажем, че тези интервали са минимални съвкупности. Очевидно всеки един от тях удовлетворява условието а). Ще покажем, че удовлетворява и условието б'). За определеност разсъжденията ще проведем за интервали от вида (t_0, t_m) . Нека $\xi \in (t_0, t_m)$. Означаваме с $x'(t)$ полином, който има нечетна нула ξ , четни нули всички възли t_i от съответното междинно представяне (ако има такива), за които $\xi < t_i < t_m$, и нечетна нула t_m . При това нормираме $x'(t)$ с условието $x'(t) > 0$ за $t_0 \leq t < \xi$ (следователно $x'(t) \leq 0$ за $\xi \leq t \leq t_m$). Ясно е от лема 1, че такъв полином има. За него ще имаме $c(x') > 0$. Избираме по-нататък полинома $x''(t)$ по следния начин. $x''(t)$ има нечетни нули точките t_0 и ξ и четни нули възлите t_i , за които $t_0 < t_i < \xi$ (ако има такива). При това нормираме $x''(t)$ с условието $x''(t) < 0$ за $\xi < t \leq t_m$ (следователно $x''(t) \geq 0$ за $t_0 < t \leq \xi$). Ясно е, че $c(x'') < 0$. Избираме положителното число λ така, че за полинома

$$x(t) = \lambda x'(t) + x''(t),$$

който има в интервала (t_0, t_m) само една нула ξ , да е в сила равенството

$$c(x) = \lambda c(x') + c(x'') = 0.$$

Ясно е, че за всяко $\xi \in (t_0, t_m)$ съвкупността $(t_0, t_m)/\{\xi\}$ не удовлетворява свойство а), защото с помощта на горната конструкция бихме могли да построим полином $x(t)$, за който $c(x) = 0$ и който не се анулира за никоя стойност на $t \in (t_0, t_m)/\{\xi\}$. Оттук се вижда, че (t_0, t_m) удовлетворява и условието б') и следователно е минимална съвкупност. По същия начин се вижда, че $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$ и $(\bar{t}_0, \bar{t}_m)$ са минимални съвкупности. За да завършим доказателството на теоремата, остава да покажем, че няма други минимални съвкупности освен намерените по-горе.

Първоначално ще установим, че всяка минимална съвкупност M съдържа интервала $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$. За тази цел достатъчно е да покажем, че ако $\xi \in (\underline{t}_0, \underline{t}_m)$, съществува полином $x(t)$, който има единствена нула ξ и за който $c(x) = 0$. И тъй нека $\xi \in (\underline{t}_0, \underline{t}_m)$. Понеже $m > 1$, а възлите $a = \underline{t}_0 < \underline{t}_1 < \dots < \underline{t}_m$ и $\underline{t}_0 < \underline{t}_1 < \dots < \underline{t}_m - b$ на долното и горното главни представяния на $c(x)$ се разделят взаимно (т. е. между всеки два възела от едното представяне има точно един от другото), ще имаме или $\xi \geq \underline{t}_1$, или $\xi < \underline{t}_{m-1}$ (понеже при $n > 2$ имаме $\underline{t}_1 < \underline{t}_{m-1}$). Нека за определеност $\xi \geq \underline{t}_1$. В този случай означаваме с $x'(t)$ полином, за който ξ е нечетна нула, а всички възли $t_i > \xi$ са четни нули, и който е положителен при $t < \xi$ (такъв полином има според лема 1). Очевидно $x'(t) = 0$ за $t \geq \xi$ и $c(x') > 0$. Означаваме с $x''(t)$ полином, който има $\underline{t}_0 - a$ и ξ за прости нули, а всички t_i , за които $a = \underline{t}_0 < \underline{t}_1 < \xi$ (ако има такива), за двойни нули, като при това нормираме $x''(t)$ с условието $x''(t) \geq 0$ при $t \leq \xi$ (следователно $x''(t) < 0$ за $t > \xi$). Имаме $c(x'') < 0$. Избираме положителното число λ така, че за полинома

$$x(t) = \lambda x'(t) + x''(t),$$

който има единствената нула ξ , да имаме

$$c(x) = \lambda c(x') + c(x'') = 0.$$

Аналогично се установява съществуването на полинома $x(t)$ с горните свойства и в случая, когато $\xi < \bar{t}_{m-1}$.

Нека сега M е произволна минимална съвкупност за $c(x)$. Ако допуснем, че M не съдържа поне една точка ξ от интервала $(\bar{t}_0, \bar{t}_m)$, от горната конструкция би следвало, че M не удовлетворява условието а), което е невъзможно. И тъй, всяка минимална съвкупност M съдържа интервала $(\bar{t}_0, \bar{t}_m)$. Ако M съдържа някой от интервалите $(\bar{t}_0, \bar{t}_0)$ и $[\bar{t}_m, \bar{t}_m)$, то заедно с него тя съдържа някоя от минималните съвкупности $(\bar{t}_0, \bar{t}_m)$ или $(\bar{t}_0, \bar{t}_m)$ и следователно ще съвпадне с нея. Ето защо ще разгледаме случая, когато M не съдържа нито един от двата интервала $(\bar{t}_0, \bar{t}_0)$ и $[\bar{t}_m, \bar{t}_m)$. Означаваме с η точната долна граница на всички t , за които $t \in [\bar{t}_m, \bar{t}_m)$, $t \in M$. Понеже $\eta \geq \bar{t}_m$, η е най-голям възел на някое междинно представяне или на долното главно представяне. Означаваме с η' най-малкия възел на това представяне, а с (η) — самото представяне. Ще покажем, че $M = (\eta', \eta)$. За тази цел ще покажем, че за всяка точка $t \in (\eta', \eta)$ имаме $t \in M$. Ясно е най-напред, че имаме $[\bar{t}_m, \eta) \in M$ (при $\bar{t}_m \neq \eta$). Ще покажем, че $(\eta', \bar{t}_0) \in M$. Избираме за тази цел произволна точка $\xi \in (\eta', \bar{t}_0)$. Понеже $\eta' < \xi$, съществува междинно представяне $t_0, t_1, \dots, t_m$, за което $\eta' < t_0 < \xi < \eta < t_m$. Да означим с η'' число, за което имаме $\eta' \in M$ $\eta \leq \eta'' < t_m$. Такова число сигурно има, защото η е точна долна граница на числата, принадлежащи на M . Съгласно лема 2 обаче има полином $x(t)$, за който $c(x) = 0$ и който има само нулите ξ и η'' . Но $\eta'' \in M$. Тогава сигурно $\xi \in M$, тъй като в противен случай би излязло, че M не удовлетворява условието а). Но ξ е произволно число от $(\eta', \bar{t}_0)$, следователно $(\eta', \bar{t}_0) \in M$. И тъй M съдържа интервала (η', η) , следователно съвпада с него.

Остава да разгледаме специалния случай $n=2$.

Ще направим някои предварителни бележки, които ще улеснят формулирането на следващата теорема.

Ако $n=2$, главните и междинните представяния на произволен строго позитивен функционал $c(x)$ съдържат по два възела. Двата възела на всяко такова представяне наричаме спрегнати. Ако A е подсъвкупност на интервала $[a, \bar{t}_0]$, под спрегнатата съвкупност на A разбираме съвкупността B от спрегнатите точки на точките от A . При тези уговорки ще докажем следната

Теорема 4. Нека $n=2$ и $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху X_2 . Ако A е произволна подсъвкупност на интервала $[a, \bar{t}_0]$, съвкупността

$$A \cup (\bar{t}_0, t_1) \cup [t_1, b] / B$$

е минимална. Всички минимални съвкупности имат горния вид.

Доказателство. Ще покажем най-напред, че интервалът $(\bar{t}_0, t_1)$ се съдържа във всяка минимална съвкупност M . Наистина, нека $\xi \in (\bar{t}_0, t_1)$. Означаваме с $x'(t)$ полинома с нули $a = \bar{t}_0$ и t_1 , като при това го норми-

раме с условието $x'(t) > 0$ за $a \leq t \leq \bar{t}_1$ (тогава $x'(t) < 0$ за $t > \bar{t}_1$). Означаваме с $x''(t)$ полином, който се анулира в $\bar{t}_0$ и $\bar{t}_1 = b$ и който е нормиран с условието $x''(t) = 0$ за $t_0 \leq t \leq b$ (тогава $x''(t) > 0$ за $t < \bar{t}_0$). Очевидно в сила са равенствата $c(x') = c(x'') = 0$. Ясно е тогава, че за всяко $\lambda \neq 0$ имаме

$$c(\lambda x' + x'') = 0.$$

При всеки такъв избор на λ полиномът $\lambda x'(t) + x''(t)$ има една единствена нула, която лежи в интервала (t_0, t_1) . Наистина

$$\begin{aligned}\lambda x'(\bar{t}_0) + x''(\bar{t}_0) &= \lambda x'(\bar{t}_0) > 0, \\ \lambda x'(t_1) + x''(t_1) &= x''(t_1) < 0,\end{aligned}$$

следователно $x(t) = \lambda x'(t) + x''(t)$ има поне една нула в (t_0, t_1) . Че няма други нули в този интервал, се вижда лесно с допускане на противното. Очевидно $x(t)$ няма нули в $[a, \bar{t}_0]$ и $[t_1, b]$. Ако $\xi \in (t_0, t_1)$, то избираме λ така, че

$$x(\xi) = \lambda x'(\xi) + x''(\xi) = 0.$$

Понеже $c(x) = 0$, а $x(t)$ не се анулира за $t = \xi$ ясно е, че $\xi \in M$, където M е произволна минимална съвкупност.

Сега ще покажем, че всяка съвкупност от вида

$$M = A \cup (\bar{t}_0, \bar{t}_1) \cup [t_1, b]/B$$

е минимална. За да докажем това, достатъчно е да отбележим, че ако за някой полином $x(t) \in X_2$ имаме $c(x) = 0$ и ако $x(t)$ има нула t_0 в интервала $[a, t_0]$, сигурно $x(t)$ ще има нула $t_1 \in [t_1, b]$, където t_0 и t_1 са взели на някое междинно или главно представяне на $c(x)$, т. е. са спрегнати точки. Ясно е най-напред, че съвкупността M удовлетворява условието а). Ще покажем, че удовлетворява и условието б'). Нека за тази цел $\xi \in M_1$. Ако $\xi \in (\bar{t}_0, \bar{t}_1)$, то $M \setminus \{\xi\}$ очевидно не удовлетворява условието а). Ако $\xi \in A$, то като построим полином $x(t)$, който се анулира в ξ и в спрегнатата на ξ точка $\eta \in B$, се вижда, че $c(x) = 0$, докато $x(t)$ няма нито една нула в $M \setminus \{\xi\}$, т. е. $M \setminus \{\xi\}$ не удовлетворява условието а). По същия начин се разсъждава, когато $\xi \in [t_1, b]/B$. И тъй M удовлетворява условието б') и следователно е минимална.

Оказва се, че всяка минимална съвкупност M има горния вид. Достатъчно е за тази цел да означим с A съвкупността от точките от интервала $[a, t_1]$, които са нули на всевъзможните полиноми $x(t)$, анулиращи функционала $c(x)$ ($c(x) = 0$). Ясно е тогава, че $M \supset A \cup [t_1, b]/B$ (в противен случай би се оказало, че M не удовлетворява условието а)). Но $M \supset (\bar{t}_0, \bar{t}_1)$, както доказахме по-горе. Оттук следва, че

$$M \supset A \cup (\bar{t}_0, \bar{t}_1) \cup [t_1, b]/B,$$

но съвкупността $A \cup (\bar{t}_0, \bar{t}_1) \cup [t_1, b]/B$ удовлетворява условието а), а M е минимална съвкупност, откъдето следва, че

$$M = A \cup (\underline{t_0}, \underline{t_1}) \cup [\underline{t_1}, b] / B.$$

С това теоремата е доказана.

В заключение ще отбележим, че на теоремите 2 и 3 може да се даде следната обща формулировка при $n > 3$.

Теорема 5. Ако $c(x)$ е строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството $X_n, n > 3$, всяка минимална съвкупност за $c(x)$ е отворен интервал, чиито краища са първият и последният възел на канонично представяне, което има минимален брой членове и на което всички маси са максимални.

3. Тук ще приложим общите теореми от точка 2, за да получим резултатите на Л. Чакалов, отнасящи се за краен и затворен интервал, като на някои от тях ще дадем по-прецизна форма.

Разглеждаме специалната Чебишева система функции

$$1, t, \dots, t^n$$

в крайния затворен интервал $[a, b]$. Нека $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството X_n от реалните полиноми $x(t)$ от вида

$$(7) \quad x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n.$$

Разглеждаме отделно случаите, когато n е нечетно и четно.

Нека първо $n = 2m - 1$. В този случай долното главно представяне на $c(x)$ има вида

$$(8) \quad c(x) = A_1 x(\underline{t_1}) + A_2 x(\underline{t_2}) + \dots + A_m x(\underline{t_m}),$$

където $\underline{t_1} < \underline{t_2} < \dots < \underline{t_m}$ са вътрешни точки на $[a, b]$. Ако означим с $p_n(t)$ полинома

$$p_n(t) = (t - \underline{t_1}) \dots (t - \underline{t_m}),$$

от (8) е ясно, че ще имаме

$$c(p(t)t^i) = 0$$

за $i = 0, 1, \dots, m - 1$. От друга страна, всеки полином $p'(t)$ от степен m , за който

$$c(p'(t)t^i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1,$$

има точно m реални нули в $[a, b]$. Наистина в противен случай, ако $t_1, \dots, t_s$ са нулите от нечетна кратност в $[a, b]$ (такава има поне една) и $s < m$, то, от една страна, бихме имали неравенството

$$q(t) = p'(t)(t - t_1) \dots (t - t_s) \geq 0, \quad q(t) \neq 0,$$

докато, от друга страна, от ортогоналното свойство на $p'(t)$ бихме имали

$$c(q(t)) = 0,$$

което противоречи на строгата позитивност на $c(x)$. И тъй всеки полином от степен m , ортогонален относно $c(x)$ на всички полиноми от степен не по-голяма от $m - 1$, има m различни реални нули в $[a, b]$. Че тези нули съвпадат с възлите на долното главно представяне (8) на $c(x)$, следва лесно, като вземем пред вид, че за полинома

$$q_i(t) = p'(t) \frac{(t-t_1) \dots (t-t_m)}{t-t_i}$$

имаме

$$0 = c(q_i) - A_1 q_i(t_1) - A_2 q_i(t_2) - \dots - A_m q_i(t_m) = A_i q(t_i).$$

Оттук следва, че $q_i(t_i) = 0$, т. е. $p'(t_i) = 0$ за $i = 1, 2, \dots, m$. И тъй, всеки полином от степен m , ортогонален на всички полиноми от степен, не по-голяма от $m-1$ относно $c(x)$, се анулира във възлите $t_1, t_2, \dots, t_m$ на долното главно представяне на $c(x)$. Тъй като полиномът

$$(9) \quad \begin{vmatrix} 1 & t & \dots & t^m \\ c_0 & c_1 & \dots & c_m \\ & & & c_i = c(t_i), \\ c_{m-1} & c_m & \dots & c_{2m-1} \end{vmatrix}$$

очевидно има горното ортогонално свойство, той съвпада с $p(t)$ до една умножителна константа.

В този частен случай теорема 2 от предната точка добива следния вид:

Теорема 2'. Нека $n = 2m - 1$ и нека $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството от реалните полиноми до степен n . Ако $n = 1$, единствената минимална съвкупност е единствената нула на полинома

$$\begin{vmatrix} 1, t \\ c_0, c_1 \end{vmatrix}$$

Ако $n = 3$, единствените минимални съвкупности са полужатворените интервали $[t_1, t_2]$, $(t_1, t_2]$, чиито краища са нулите на полинома

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ако $n > 3$, единствената минимална съвкупност е интервалът (t_1, t_m) , където t_1 и t_m са крайните нули на полинома (9).

Нека сега $n = 2m$. Ако означим с $p_a(t)$ полинома от степен $m+1$

$$(10) \quad p_a(t) = (t-a) \begin{vmatrix} 1 & t & t^m \\ c_1 - ac_0 & c_2 - ac_1 & c_{m+1} - ac_m \\ c_m - ac_{m-1} & c_{m+1} - ac_m & \dots & c_{2m} - ac_{2m-1} \end{vmatrix}$$

ясно е, че при всяко a $p_a(t)$ е ортогонален относно $c(x)$ на всеки полином от степен, не по-голяма от $m-1$. В сила е следната

Лема 3. Ако a съвпада с възел на някое главно или междинно представяне на $c(x)$, останалите нули на $p_a(t)$ съвпадат с останалите възли на това представяне.

Доказателство. Нека за определеност $\alpha = t_0$, където t_0 е например първият възел на междинното представяне $t_0, t_1, \dots, t_m$ на $c(x)$, т. е.

$$c(x) = A_0 X(t_0) + A_1 X(t_1) + \dots + A_m X(t_m).$$

Ще покажем, че $p_\alpha(t_i) = 0$ за $i = 1, \dots, m$. Означаваме за тази цел с $y_i(t)$ полинома

$$y_i(t) = \frac{(t - t_1) \dots (t - t_m)}{t - t_i}$$

и образуваме полинома $p_\alpha(t) y_i(t)$. От една страна, имаме $c(p_\alpha(t) y_i(t)) = 0$ за $i = 1, \dots, m$ поради ортогоналното свойство на $p_\alpha(t)$. От друга страна, от горното представяне на $c(x)$ имаме

$$0 = (c p_\alpha(t) y_i(t)) = A_0 p_\alpha(t_0) y_i(t_0) + \dots + A_m p_\alpha(t_m) y_i(t_m) = A_i p_\alpha(t_i) y_i(t_i).$$

Последната верига от равенства ни учи, че $p_\alpha(t_i) = 0$. С това лемата е доказана.

С помощта на теоремите от точка 2 и горната лема резултатите на Л. Чакалов могат да се прецизират в случая, когато интервалът $[a, b]$ е краен и затворен, а n — четно. Преди това ще отбележим, че ако α пробягва всички точки на интервала $[a, \bar{t}_0]$, нулите на $p_\alpha(t)$ ще опишат всички междинни и главни представяния на $c(x)$. Това следва от обстоятелството, че първият възел на всяко такова представяне на $c(x)$ е в интервала $[a, \bar{t}_0]$. Ще отбележим още, че $\bar{t}_0$ е най-малката нула на полинома $p_b(t)$.

Като имаме пред вид казаното по-горе, можем да формулираме следните теореми, които прецизират споменатите резултати на Л. Чакалов и са непосредствено следствие на теоремите 3 и 4.

Теорема 3'. Нека $n = 2m$ е четно число, по-голямо от 2, и $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството от реалните алгебрични полиноми от степен, не по-голяма от n . Всичките минимални съвкупности за $c(x)$ се изчерпват от отворените интервали с краища крайните нули на произволен полином $p_\alpha(t)$ от вида (10), където $\alpha \in [a, \bar{t}_0]$, а $\bar{t}_0$ е най-малката нула на полинома $p_b(t)$.

Теорема 4'. Нека $n = 2$ и $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството от реалните алгебрични полиноми от степен, не по-голяма от 2. Ако $\underline{t}_0 = a$ и t_1 са нулите на $p_\alpha(t)$, а t_0 и $t_1 = b$ — нулите на $p_b(t)$, и ако A е произволна подсвкупност на интервала $[\underline{t}_0, t_0]$, а B — спрегнатата на A съвкупност, съвкупността

$$A \cup (\underline{t}_0, t_1) \cup [t_1, b] / B$$

е минимална. Всички минимални съвкупности имат горния вид.

4. В следващото изложение ще пренесем със съответните модификации резултатите от точка 2 за случая на Чебишеви системи функции в отворен интервал. Това дава възможност да разгледаме и безкрайни интервали, което ще позволи да обхванем като частен случай резултатите на Л. Чакалов.

Казваме, че функциите

$$(11) \quad x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t),$$

дефинирани и непрекъснати в отворения интервал (a, b) (краен или безкраен), образуват Чебишева система функции в интервала (a, b) (или само Чебишева система функции), когато образуват Чебишева система функции във всеки краен и затворен подинтервал $[\alpha, \beta]$ на (a, b) .

Разглеждаме пространството X_n от всевъзможните линейни комбинации с реални коефициенти от вида

$$(12) \quad x(t) = a_0 x_0(t) + a_1 x_1(t) + \dots + a_n x_n(t).$$

По-долу ще изучим минималните съвкупности $M \subset (a, b)$ за даден строго позитивен функционал $c(x)$ върху дадена Чебишева система функции в (a, b) . И тук се налага да разгледаме отделно случая, когато n е нечетно и когато е четно.

А. $n = 2m - 1$. Нека $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството X_n от Чебишеви функции в (a, b) . Лесно се вижда, че $c(x)$ притежава точно едно долно главно представяне в (a, b) (т. е. канонично представяне с индекс $n+1$, на което всички възли са вътрешни точки). Наистина, ако изберем α и β достатъчно близки съответно до a и b , $c(x)$ ще бъде строго позитивен в $[\alpha, \beta]$ (ако допуснем противното, с граничен преход $\alpha \rightarrow a$, $\beta \rightarrow b$ бихме получили, че $c(x)$ не е строго позитивен в (a, b)). Разглеждаме долното главно представяне на $c(x)$ в $[\alpha, \beta]$

$$c(x) = A_1 x(t_1) + A_2 x(t_2) + \dots + A_m x(t_m).$$

Това е долно главно представяне и в (a, b) . Че друго долно главно представяне в (a, b) няма, се вижда лесно. Наистина, ако допуснем противното и изберем интервала $[\alpha, \beta]$ така, че да включва във вътрешността си възлите на двете главни представяния, би излязло, че в $[\alpha, \beta]$ има две долни главни представяния, което не е вярно. В същност $c(x)$ няма други канонични представяния в (a, b) освен споменатото долно главно представяне. На този факт обаче не ще се спираме.

Ще отбележим съществуването на полиноми $x'(t)$ и $x''(t)$ от вида (12), които удовлетворяват следните условия.

$x'(t)$ има нечетна нула ξ ($\xi \in (a, b)$), четни нули всички възли t_i на долното главно представяне на $c(x)$, за които $t_i > \xi$, и евентуално още толкова четни нули, по-големи от ξ , че сумата от четностите на всички нули да е точно $n = 2m - 1$ (това ще рече, че събираме броя на нулите, като всяка четна нула броим два пъти, а всяка нечетна броим веднъж). При това нормираме $x'(t)$ с условието $x'(t) > 0$ за $t < \xi$ (следователно $x'(t) \leq 0$ за $t \geq \xi$).

$x''(t)$ има четни нули всички възли t_i на долното главно представяне на $c(x)$, за които $t_i < \xi$, нечетна нула ξ и евентуално толкова четни нули, по-малки от ξ , че сумата от четностите на всички нули да е точно $n = 2m - 1$. При това нормираме $x''(t)$ с условието $x''(t) \geq 0$ за $t \leq \xi$ (следователно $x''(t) < 0$ за $t > \xi$). Ясно е, че при този избор на $x'(t)$ и $x''(t)$ те нямат други нули в (a, b) освен предписаните (допускането на противното би ни довело до невярното заключение, че $x'(t)$ или $x''(t)$ имат повече от n нули в някой краен затворен подинтервал на интервала (a, b)).

Ако в доказателството на теорема 2 от точка 2 под $x'(t)$ и $x''(t)$ разбираме построените по-горе полиноми, разсъжденията стават прило-

жими за случая, когато системата (11) е Чебишева в (a, b) , така че в сила е следната

Теорема 2. Нека $n=2m-1$ е нечетно естествено число, а $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството X_n от Чебишеви функции в интервала (a, b) . Ако $n=1$, единствената минимална съвкупност е единственият възел t_1 в долното главно представяне на $c(x)$ в (a, b) . Ако $n=3$, единствените минимални съвкупности са полузатворените интервали $[t_1, t_2]$, $(t_1, t_2]$, чиито краища са възлите на долното главно представяне на $c(x)$ в (a, b) . Ако $n>3$, единствената минимална съвкупност е интервалът (t_1, t_m) , чиито краища са крайните възли на долното главно представяне на $c(x)$ в (a, b) .

Б. $n=2m$. Ако $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството X_n от Чебишеви функции в (a, b) , то както в случая на нечетно n можем да изберем числата α и β достатъчно близко съответно до a и b така, че $c(x)$ да е строго позитивен в затворения интервал $[\alpha, \beta]$. Разглеждаме всевъзможните главни и междинни представяния на $c(x)$ в кой да е от интервалите $[\alpha, \beta]$. Тези представяния ще наричаме междинни за интервала (a, b) . Ще отбележим някои техни свойства.

Очевидно всяко междинно представяне в (a, b) на $c(x)$ има индекс $n+2$, следователно е канонично. При това $c(x)$ няма други канонични представяния в (a, b) освен междинните.

Лесно се вижда, че възлите на две различни междинни представяния в (a, b) се разделят взаимно. Това следва веднага, като изберем интервал $[\alpha, \beta]$ така, че да съдържа във вътрешността си възлите на двете представяния.

Означаваме с t_0 точната горна граница на най-малките възли и с t_m точната долна граница на най-големите възли на всевъзможните междинни в (a, b) представяния на $c(x)$. Очевидно $a < t_0 \leq t_m < b$, като $t_0 = t_m$ можем да имаме само при $m=1$.

Лесно се вижда, че всички възли на междинните в (a, b) представяния от втория нататък са монотонно растящи и непрекъснати функции на първия възел в интервала (a, t_0) (в същност всеки m възела на междинните представяния са такива функции на $m+1$ -вия).

Доказателствата на лема 2 и теореми 3 и 4 от точка 2 се пренасят почти без изменения и за случая на Чебишева система функции в отворен интервал. Само че под t_0 и t_m ще трябва да разбираме дефинираните по-горе числа, а фигуриращите там полиноми $x'(t)$ и $x''(t)$ да подчиним на допълнителното изискване да имат точно n нули в (a, b) (както направихме по-горе). И така в сила са следните теореми.

Теорема 3. Нека $n=2m$ е четно число, по-голямо от 2, и $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството X_n от Чебишеви в (a, b) функции. Всичките минимални съвкупности за $c(x)$ се изчерпват от отворените интервали (a, t_m) , (t_0, b) и (t_0, t_m) , където t_m и t_0 са точната долна и точната горна граница съответно на най-големите и най-малките възли на междинните за (a, b) представяния на $c(x)$.

Забележка. Че (a, t_m) и (t_0, b) удовлетворяват условието а), се доказва например чрез допускане на противното. Противоречието се по-

лучава, като изберем междинно представяне, чиито крайни възли са достатъчно близко до a и $\underline{t}_m$, респективно $\underline{t}_0$, b . Аналогично чрез „апроксимиране“ на тези интервали с междинни представяния се вижда, че те удовлетворяват и условието б').

Теорема 4. Нека $n \geq 2$ и $c(x)$ е произволен строго позитивен функционал, дефиниран върху пространството X_2 от Чебишеви за (a, b) функции. Ако A е произволна подсъвкупност на интервала $(a, \underline{t}_0)$, а B е спрегнатата на A съвкупност, съвкупността

$$A \cup [\underline{t}_0, \underline{t}_1] \cup (\underline{t}_1, b) \cup B$$

е минимална. Всички минимални съвкупности имат горния вид.

Забележка. За разлика от теорема 4 тук интервалът $[\underline{t}_0, \underline{t}_1]$, който принадлежи на всяка минимална съвкупност, е затворен. Ще скицираме пътя за доказването на този факт. Най-напред ще покажем, че съществуват полиноми $x'(t)$ и $x''(t)$, които са от X_2 , анулират се съответно в $\underline{t}_0$ и $\underline{t}_1$, нямат други нули в (a, b) и освен това $c(x') = c(x'') = 0$. Ще конструираме най-напред $x'(t)$. Избираме редица от междинни представяния с възли съответно $\underline{t}_0^n, \underline{t}_1^n$, за които $\underline{t}_1^n \rightarrow b$. Тогава $\underline{t}_0^n \rightarrow \underline{t}_0$ (съгласно дефиницията на $\underline{t}_0$). Избираме съответна редица $x^n(t)$ от полиноми от вида (12),

за която $\sum_{i=0}^n a_i^n = 1$ за всяко n и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^n = a_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, като при това искаме още $x^n(\underline{t}_0^n) = x^n(\underline{t}_1^n) = 0$. Лесно се вижда, че такава редица $\{x^n(t)\}$ съществува. Ако означим с $x'(t)$ нейната граница, $x'(t)$ има всички изброени свойства. Аналогично се построява и $x''(t)$. Ако $\xi \in (\underline{t}_0, \underline{t}_1)$, то при подходящо $\lambda > 0$ полиномът $\lambda x'(t) + x''(t)$ има единствена нула ξ (доказателството е аналогично на доказателството на същия факт в теорема 4). Ако $\xi = \underline{t}_0$, $x'(t)$ е полином с единствена нула ξ , а при $\xi = \underline{t}_1$ $x''(t)$ има единствена нула ξ . Оттук следва, че всяка минимална съвкупност M съдържа затворения интервал $[\underline{t}_0, \underline{t}_1]$.

Ще илюстрираме резултатите от тази точка в случая, когато X_n е пространството от реалните алгебрични полиноми от степен, не по-голяма от n .

Нека $c(x)$ е произволен строго позитивен в (a, b) функционал, дефиниран върху X_n . От лема 3 следва, че интервалът, заключен между крайните нули на полинома $p_a(t)$, зададен с (10), пробягва интервалите $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$, определени от крайните възли на различните междинни представяния, когато a пробягва точките на интервала $(a, \underline{t}_0)$. Ако a и b са крайни, очевидно интервалите $(a, \underline{t}_m)$ и $(\underline{t}_0, b)$ съвпадат съответно с интервалите, заключени между най-малката и най-голямата нула на полинома $p_a(t)$, респективно $p_b(t)$.

От очевидните съотношения

$$(13) \quad p_\infty(t) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{p_\alpha(t)}{\alpha^{m+1}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{p_\alpha(t)}{\alpha^{m+1}}$$

следва, че при $a = -\infty$ $\underline{t}_m$ е най-голямата нула на $p_\infty(t)$, а при $b = \infty$ $\underline{t}_0$ е най-малката нула на $p_\infty(t)$.

При тези уточнявания получаваме от теорема $\tilde{3}$ в разглеждания тук частен случай следния резултат на Л. Чакалов, на който ще дадем еквивалентна форма като

Теорема 3'. Нека $n=2m$ е четно число, по-голямо от 2, и нека $c(x)$ е произволен строго позитивен в интервала $(-\infty, \infty)$ функционал, дефиниран върху пространството X_n от реалните алгебрични полиноми от степен, не по-голяма от n . Всички минимални съвкупности за $c(x)$ се изчерпват от отворените интервали $(-\infty, \underline{t}_m)$, $(\underline{t}_0, \infty)$ и $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$, където $(\underline{t}_0, \underline{t}_m)$ е интервал, заключен между крайните нули на полинома $p_a(t)$, даден с (10) при кое да е $a \in (-\infty, \underline{t}_0)$, а $\underline{t}_0$ и $\underline{t}_m$ са крайните нули на $p_m(t)$, зададен с (13).

От теорема 4 получаваме в нашия частен случай и последния резултат на Л. Чакалов, отнасящ се за случая $n=2$.

Теорема 4'. Нека $n=2$ и $c(x)$ е произволен строго позитивен в интервала $(-\infty, \infty)$ функционал, дефиниран върху пространството X_2 от реалните алгебрични полиноми от степен, не по-голяма от 2. Ако A е произволна подсъвкупност на интервала $(-\infty, \underline{t}_0)$, а B е спрегнатата на A подсъвкупност на интервала $(\underline{t}_1, \infty)$, съвкупността

$$A \cup [\underline{t}_0, \underline{t}_1] \cup (\underline{t}_1, \infty) / B$$

е минимална. Всички минимални съвкупности имат горния вид.

Забележка. Тук $\underline{t}_0$ и $\underline{t}_1$, както знаем, са крайните нули на полинома

$$\begin{vmatrix} 1 & t \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix},$$

който има само една нула. Следователно $\underline{t}_0 = \underline{t}_1$ и $[\underline{t}_0, \underline{t}_1] = \{\underline{t}_0\} = \{\underline{t}_1\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pompeiu, D. Sur le théorème des accroissements finis. Ann. sci. de l'Université de Jassy, **15**, fasc. 3—4, 1928, 335.
2. Pompeiu, D. Sur le théorème des accroissements finis. Bull. de la Société des sciences de Cluj, **4**, 1928, 245.
3. Montel, P. Sur quelques conséquences du théorème de Rolle. Compt. rend. de l'Acad. des Sci. de Paris, **191**, 1930, 511.
4. Montel, P. Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques. Bull. de la Soc. math. de France, **58**, 1930, 105.
5. Favard, J. Sur les zéros des polynômes. Compt. rend. de l'Acad. des Sci. de Paris, **191**, 1931, 716.
6. Favard, J. Sur les zéros réels des polynômes. Bull. de la Soc. math. de France, **59**, 1931, 229.
7. Tchakaloff, L. Sur le théorème des accroissements finis. Compt. rend. de l'Acad. des Sci. de Paris, **192**, 1931, 32.

8. Tchakaloff, L. Sur l'intervalle de variabilité de ξ dans la formule $\int_a^b p(x)q(x)dx$

$$= q(\xi) \int_a^b p(x)dx. \text{ Compt. rend. de l'Acad. des Sci. de Paris, } \mathbf{192}, 1931, 330.$$

9. Tchakaloff, L. Sur une propriété des polynômes trigonométriques. Compt. rend. de l'Acad. des Sci. de Paris, **195**, 411.
10. Tchakaloff, L. Formules de quadrature à nombre minimum de termes. Bull. de l'Ecole polytechnique „Roi Carol“ de Bucarest, 11-ème année, 1932, 160.
11. Tchakaloff, L. Sur un problème de minimum concernant une certaine classe de polynômes. Compt. rend. de l'Acad. des Sci. de Paris, **197**, 1933, 572.
12. Tchakaloff, L. Sur la structure des ensembles linéaires définis par une certaine propriété minimale. Acta Mathematica, **63**, 1934, 77
13. Чакалов, Л. Теоремата за средните стойности и нейните обобщения, приложени върху реални полиноми. Списание на БАН, кн. XLVII, 1932, 105.
14. Крейн, М. Иден П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, т. VI, вып. 4 (44), 1951, 3.

Постъпила на 21. VI. 1969 г.

ТЕОРЕМА О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ, ПРИЛОЖЕННЫЕ К ЧЕБЫШЕВСКИМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

Владимир Л. Чакалов

(Резюме)

Обобщаются результаты Л. Чакалова из [12]. Для этой цели используются некоторые результаты Л. Чебышева и Маркова, развитые в дальнейшем Крейном в [14].

Ниже приводим те понятия и определения из [14], которые необходимы для формулировки главных результатов.

Обозначим через $[a, b]$ конечный замкнутый интервал и рассмотрим действительные непрерывные линейно независимые функции (1). Систему (1) назовем Чебышевской системой функций, если произвольный многочлен типа (2) с действительными коэффициентами имеет не более чем n различных нулей в $[a, b]$.

Если $s(x)$ — линейный строго положительный функционал, определенный на пространстве X_n многочленов (2), то он имеет бесконечно много „канонических“ представлений вида (3), где $A_i > 0$, „узлы“ t_i из $[a, b]$ и

„индекс представления“ $\sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) = n+2$. Здесь $\varepsilon(t)$ определяется равенством

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 2, & \text{если } t \in (a, b), \\ 1, & \text{если } t = a \text{ или } t = b. \end{cases}$$

При этом среди представлений (3) имеются точно два, для которых

$\sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) = n+1$, а именно, „нижнее главное представление“, для которого

точка b не является узлом, и „верхнее главное представление“, для которого точка b — узел. При четном n для нас представляют интерес и канонические представления $s(x)$ вида (3), у которых все узлы — внутрен-

ние точки $[a, b]$ с индексами $n+2$ (тогда ясно, что число узлов $\frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1$)

Такие канонические представления назовем промежуточными.

Задача, которую ставим, следующая. Если $x'(t) \in X_n$ — многочлен, для которого в силе равенство (5), то, очевидно, существует хотя бы одно „среднее значение“ $\xi \in (a, b)$ такое, что выполняется и равенство (6). Задача, которую рассматриваем (и которую Л. Чакалов решал для случая, когда X_n — пространство действительных алгебраических многочленов степени n), состоит в том, чтобы для данного строго положительного функционала $c(x)$ найти все „минимальные“ множества $M \subset [a, b]$, которые обладают тем свойством, что из равенства (5) вытекает существование $\xi \in M$ такого, что выполнено (6). При этом $M \subset [a, b]$ называем минимальной, если

а) для любого многочлена $x'(t) \in X_n$, для которого в силе (5), существует $\xi \in M$ такое, что выполнено (6);

б) если $M' \subset M$ множество, которое обладает свойством а), то $M' = M$.

Главные результаты настоящей работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 2. Пусть $n = 2m - 1$ — нечетное натуральное число и $c(x)$ — произвольный строго положительный функционал, определенный на X_n . Если $n = 1$, то единственным минимальным множеством является единственный узел t_1 нижнего главного представления $c(x)$. Если $n = 3$, то единственными минимальными множествами являются полузамкнутые интервалы $[t_1, t_2]$, $(t_1, t_2]$, концы которых являются узлами нижнего главного представления $c(x)$. Если $n > 3$, то единственным минимальным множеством будет интервал (t_1, t_m) , концы которого t_1, t_m — соответственно наименьший и наибольший узлы нижнего главного представления.

Теорема 3. Пусть $n = 2m$ — четное число > 2 и $c(x)$ — строго положительный функционал, определенный на X_n . Все минимальные множества $c(x)$ исчерпываются открытыми интервалами (t_0, t_m) , $(\bar{t}_0, \bar{t}_m)$ и (t_0, t_m) , где t_0, t_m — первый и последний узлы нижнего главного представления $c(x)$, $\bar{t}_0, \bar{t}_m$ — первый и последний узлы верхнего главного представления, а t_0 и t_m — первый и последний узлы произвольного промежуточного представления $c(x)$.

Теорема 4. Пусть $n = 2$ и $c(x)$ — строго положительный функционал, определенный на X_2 . Если A — произвольное множество интервала $[a, \bar{t}_0]$, то множество

$$A \cup (\bar{t}_0, t_1) \cup [t_1, b] / B$$

минимально. Все минимальные множества имеют указанный вид.

Замечание. Множество B составлено из правых узлов промежуточных или главных представлений $c(x)$, у которых узлы принадлежат A .

Вышеизложенные результаты переносятся на Чебышевские системы функций в открытом (конечном или бесконечном) интервале.

В частном случае, рассмотренном Л. Чакаловым, уточняются некоторые его результаты, относящиеся к четному n .

DER MITTELWERTSATZ UND SEINE VERALLGEMEINERUNGEN AUF TSCHEBISCHEWSCHES FUNKTIONENSYSTEME

Vladimir L. Čakalov

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit werden die Ergebnisse von L. Tschakalow aus [12] verallgemeinert. Dazu werden gewisse Ergebnisse von Tschebischew und Markow benutzt, später von Krein [14] entwickelt.

Wir geben im weiteren diejenigen Begriffe und Definitionen aus [14] an, die notwendig sind zur Formulierung der Hauptergebnisse.

Wir bezeichnen mit $[a, b]$ ein endliches abgeschlossenes Intervall und betrachten die reellen stetigen linear unabhängigen Funktionen (1). Das System (1) nennen wir ein Tschebischewsches Funktionensystem, wenn ein beliebiges „Polynom“ mit reellen Koeffizienten vom Typ (2) nicht mehr als n verschiedene Nullstellen in $[a, b]$ hat.

Wenn $c(x)$ ein lineares streng positives Funktional ist, definiert im Raum X_n der Polynome (2), so hat es unendlich viele kanonische Darstellungen von der Art (3), worin $A_i > 0$ ist, die „Knoten“ t_i aus $[a, b]$ sind und der „Index der Darstellung“ $\sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) \leq n+2$ ist. Hierin wird $\varepsilon(t)$ durch die Gleichung definiert

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } t \in (a, b), \\ 1, & \text{wenn } t = a \text{ oder } t = b. \end{cases}$$

Dabei gibt es unter den Darstellungen (3) genau zwei, für die $\sum_{i=1}^r \varepsilon(t_i) = n+1$ ist, und zwar „die untere Hauptdarstellung“, für die der Punkt b kein Knoten ist, und „die obere Hauptdarstellung“, für die b ein Knoten ist. Bei geradem n sind von Interesse auch diejenigen kanonischen Darstellungen von $c(x)$ von der Art (3), deren alle Knoten innere Punkte von $[a, b]$ sind und deren Indexe gleich $n+2$ sind (dann ist es klar, daß die Anzahl der Knoten $\frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1$ ist). Solche kanonischen Darstellungen werden wir Zwischendarstellungen nennen.

Die Aufgabe, die wir uns stellen, ist die folgende. Wenn $x'(x) \in X_n$ ein Polynom ist, für das die Gleichung (5) gilt, dann existiert offenbar wenigstens ein „Mittelwert“ $\xi \in (a, b)$, so daß die Gleichung (6) gültig ist. Die Aufgabe, die wir behandeln (und die L. Tschakalow in dem Falle löst, wenn X_n der Raum der reellen algebraischen Polynome vom Grade n ist) besteht darin für ein gegebenes streng positives Funktional alle „minimalen“ Mengen $M \subset [a, b]$ zu finden, die die Eigenschaft besitzen: aus der Gleichung (5) soll die Existenz von ein $\xi \in M$ folgen, so daß die Gleichung (6) gültig ist. Dabei nennen wir $M \subset [a, b]$ minimal, wenn

a) für jedes Polynom $x'(t) \in X_n$, für das (5) gilt, existiert ein $\xi \in M$, so daß (6) besteht;

b) wenn $M' \subset M$ eine Menge ist, die die Eigenschaft a) besitzt, so ist $M' \subset M$.

Die Hauptergebnisse in der Arbeit sind in den folgenden Sätzen enthalten.

Satz 2. Es sei $n=2m-1$ eine ungerade natürliche Zahl und $c(x)$ ein beliebiges positives Funktional, definiert über X_n . Wenn $n=1$ ist, so ist die einzige minimale Menge der einzige Knoten t_1 der unteren Hauptdarstellung von $c(x)$. Wenn $n=3$ ist, so sind die einzigen minimalen Mengen die halboffenen Intervalle $[t_1, t_2)$, $(t_1, t_2]$, deren Endpunkte die Knoten der unteren Hauptdarstellung von $c(x)$ sind. Wenn $n>3$ ist, so ist die einzige minimale Menge das Intervall (t_1, t_m) , dessen Endpunkte t_1, t_m der kleinste und der größte Knoten der unteren Hauptdarstellung von $c(x)$ sind.

Satz 3. Es sei $n=2m$ eine gerade Zahl >2 und $c(x)$ ein streng positives Funktional, definiert über X_n . Alle minimalen Mengen von $c(x)$ werden durch die offenen Intervalle (t_0, t_m) , $(\bar{t}_0, \bar{t}_m)$ und (t_0, t_m) erschöpft, wobei t_0, t_m der erste und der letzte Knoten der unteren Hauptdarstellung von $c(x)$ sind, $\bar{t}_0, \bar{t}_m$ der erste und der letzte Knoten der oberen Hauptdarstellung sind, und t_0, t_m der erste und der letzte Knoten einer beliebigen Zwischendarstellung von $c(x)$ sind.

Satz 4. Es sei $n=2$ und $c(x)$ ein streng positives Funktional, definiert über X_2 . Wenn A eine beliebige Untermenge des Intervalls $[a, t_0]$ ist, so ist die Menge

$$A \cup (t_0, t_1) \cup [t_1, b] / B$$

minimal. Alle minimale Mengen sind von dieser Art.

Bemerkung. Die Menge B setzt sich aus den rechten Knoten der Zwischendarstellungen von $c(x)$ zusammen, deren linke Knoten A angehören.

Die obigen Ergebnisse übertragen sich auf Tschebischewsche Funktionensysteme in einem offenen (endlichen oder unendlichen) Intervall.

Im Falle, der von L. Tschakalow betrachtet ist, werden einige von seinen Ergebnissen, die sich auf gerades n beziehen, präzisiert.