

КАНОНИЧЕН РЕПЕР НА КОМПЛЕКСИ ОТ ПРАВИ В ТРИМЕРНО ПРОСТРАНСТВО С АБСОЛЮТ ДВЕ РЕАЛНИ РАВНИНИ И ДВЕ РЕАЛНИ ТОЧКИ ВЪРХУ ТЯХНАТА ПРЕСЕЧНИЦА

Адриан Борисов

В тази работа изграждаме диференциалната геометрия на комплексите от прави в тримерното пространство A_2^2 с абсолюти две реални равнини $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ и две реални точки E_3, E_4 върху тяхната пресечница l . Използван е методът на външните форми на Картан. Някои от разглежданията са направени в духа на [1].

§ 1. ПОЛУКАНОНИЧЕН РЕПЕР НА КОМПЛЕКСА

Ще използваме семейство репери $A_1A_2A_3A_4$, въведено от Станилов [3]: върховете A_3 и A_4 съвпадат с абсолютните точки E_3, E_4 , а върхът A_2 се намира в полярната равнина ε на върха A_1 относно изродената повърхнина от втора степен ($\varepsilon_3, \varepsilon_4$). Инфинитезималните преобразования на координатите на върховете на репера от избраното семейство са

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4, \\ dA_2 &= \omega_1^2 A_1 + \omega_1^1 A_2 + \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4, \\ dA_3 &= \omega_3^3 A_3, \\ dA_4 &= \omega_4^4 A_4. \end{aligned} \quad (1)$$

Структурните уравнения на пространството A_2^2 са дадени в [3].

Да означим с $M_3 = M_3(u, v, w)$ произволен комплекс от прави в A_2^2 . С произволна права $p \in M_3$ свързваме семейство от репери, за които върховете A_1, A_2 са точки от правата p . Тези репери се наричат репери от нулев ред. Параметрите u, v, w , определящи положението на правата p на комплекса, се наричат главни параметри. Като диференцираме аналитичната права $p = (A_1A_2)$, съответна на геометричната права $p = A_1A_2$, и вземем пред вид (1), получаваме

$$(2) \quad d(A_1A_2) = 2\omega_1^1(A_1A_2) + \omega_2^3(A_1A_3) + \omega_2^4(A_1A_4) + \omega_1^3(A_3A_2) + \omega_1^4(A_4A_2).$$

Нека правата p (A_1A_2) е неподвижна. Тогава $du=dv=dw=0$, диференциалът $d(A_1A_2)$ е пропорционален на (A_1A_2) и от (2) следват равенствата

$$(3) \quad \omega_1^3 = \omega_1^1 = \omega_2^4 = \omega_2^3 = 0.$$

Обратно, ако са изпълнени (3), то $d(A_1A_2) = 2\omega_1^1(A_1A_2)$ и следователно правата p е неподвижна, т. е. $du=dv=dw=0$. Получихме, че при подвижна права p формите

$$(4) \quad \omega_1^3, \omega_1^1, \omega_2^3, \omega_2^4$$

зависят само от диференциалите du, dv, dw на главните параметри u, v ,

Външните форми (4) ще наричаме главни диференциални форми от нулев ред. Базисът им се състои от трите независими форми du, dv, dw и следователно между тях съществува едно линейно съотношение, което написваме във вида

$$(5) \quad \omega_1^3 = a\omega_2^3 + b\omega_1^4 + c\omega_2^4,$$

като a, b, c зависят от главните и вторичните параметри. Това означава, че за нов базис избираме диференциалните форми $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$.

Като диференцираме външно (4) и приложим известната лема на Картан, получаваме

$$(6) \quad \begin{aligned} da + (a^2 - 1)\omega_1^2 &= x_1\omega_2^3 + x_2\omega_1^4 + x_3\omega_2^4, \\ db + b(\omega_3^3 - \omega_4^4) + (ab + c)\omega_1^2 &= x_2\omega_2^3 + x_4\omega_1^4 + x_5\omega_2^4, \\ dc + c(\omega_3^3 - \omega_4^4) + (ac + b)\omega_1^2 &= x_3\omega_2^3 + x_5\omega_1^4 + x_6\omega_2^4. \end{aligned}$$

При фиксирана права p , т. е. при изменение само на вторичните параметри, ще използваме символа за диференциране δ , а съответните значения на ω_i^j ще означаваме с π_i^j . От (6) при фиксирана права p получаваме

$$(7) \quad \begin{aligned} \delta a &= (1 - a^2)\pi_1^2, \\ \delta b &= b(\pi_4^4 - \pi_3^3) - (ab + c)\pi_1^2, \\ \delta c &= c(\pi_4^4 - \pi_3^3) - (ac + b)\pi_1^2. \end{aligned}$$

Квадратичните форми $q = \omega_1^3\omega_1^4 - \omega_2^3\omega_2^4$ и $r = \omega_1^3\omega_2^4 - \omega_1^4\omega_2^3$ са инвариантни [3]. Уравнението $q=0$ определя параболичните роеве на комплекса, а $r=0$ — развиваемите роеве на комплекса. Инвариантни са и линейните форми $l_1 = \omega_1^3 + \omega_2^3$, $l_2 = \omega_1^3 - \omega_2^3$, $l_3 = \omega_1^4 + \omega_2^4$, $l_4 = \omega_1^4 - \omega_2^4$. В общия случай през всяка права на комплекса минават четири развиваеми параболични роя. Те се определят с уравненията

$$(8) \quad \begin{aligned} l_1 &= 0, \quad l_2 = 0; \\ l_1 &= 0, \quad l_3 = 0; \\ l_2 &= 0, \quad l_4 = 0; \\ l_3 &= 0, \quad l_4 = 0. \end{aligned}$$

Като заместим (5) в изразите за q и r , получаваме

$$(9) \quad \begin{aligned} q &= a\omega_2^3\omega_1^4 + b(\omega_1^4)^2 + c\omega_1^4\omega_2^4 - \omega_2^4\omega_2^3, \\ r &= a\omega_2^3\omega_2^4 + b\omega_1^4\omega_2^4 + c(\omega_2^4)^2 - \omega_1^4\omega_2^3. \end{aligned}$$

Нека P_2 е равнина, в която всяка точка се определя със своите хомогенни координати $(\omega_2^3:\omega_1^4:\omega_2^4)$. Ясно е, че q и r са квадратни функции на три променливи и уравненията $q=0$, $r=0$ определят криви от втора степен в P_2 . Следователно развиваемите роеве на комплекса се изобразяват в точки от линията $r=0$, а параболичните — в точки от линията $q=0$. Кривата $q=0$ е изродена, когато

$$(10) \quad ac + b = 0.$$

Станилов в [3] нарече комплексите, определени с (10), параболични. Аналогично кривата $r=0$ е изродена, когато

$$(11) \quad ab + c = 0.$$

Както следваме аналогията, тези комплекси ще наричаме развиваеми. Двете криви $q=0$, $r=0$ определят сноп криви

$$(12) \quad q + \lambda r = 0.$$

В общия случай в (12) има три изродени криви. Те се определят за стойности на параметъра λ , определени от уравнението

$$(13) \quad (ab + c)\lambda^3 - (ac + b)\lambda^2 - (ab + c)\lambda + ac + b = 0,$$

от което намираме

$$(14) \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1,$$

$$(13) \quad \lambda_3 = K_3 = \frac{ac + b}{ab + c}.$$

Ако пресметнем δK_3 , ще се убедим, че $\delta K_3 = 0$ и следователно K_3 е абсолютна инварианта.

Нека $M = A_1 + tA_2$ е точка от правата $p \in M_3$. В нормалната корелация [1] на правата p на точката M съответствува равнина $\pi(t)$, която има тангенциални координати

$$(16) \quad \pi(t) = (bt - c)(A_1A_2A_3) + (a + t)(A_1A_2A_4).$$

Върху правата p има две забележителни точки — точките, за които равнината $\pi(t)$ минава през абсолютните точки A_3 , A_4 . Те се определят с уравнението

$$(17) \quad bt^2 + (ab - c)t - ac = 0$$

и имат представянето

$$(18) \quad \begin{aligned} N_1 &= A_1 - aA_2, \\ N_2 &= bA_1 + cA_2. \end{aligned}$$

Точките N_1 и N_2 се наричат централни точки на правата p на комплекса M_3 .

Сега можем да дадем геометрично тълкуване на (15):

$$(19) \quad K_3 = \frac{A_1 + 1}{I_1 - 1},$$

където

$$(20) \quad I_1 = (A_1 + A_2, A_1 - A_2, N_1, N_2).$$

От (7) се вижда, че можем така да изберем вторичните параметри, че да постигнем

$$(21) \quad a = 0, \quad c = 1.$$

Тогава от (4), (5) и (6) получаваме

$$(23) \quad \begin{aligned} \omega_1^3 &= b\omega_1^4 + \omega_2^4; \\ -\omega_1^2 &= x_1\omega_2^3 + x_2\omega_1^4 + x_3\omega_2^4, \\ db + b(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_1^2 &= x_2\omega_2^3 + x_4\omega_1^4 + x_5\omega_2^4, \end{aligned}$$

$$(24) \quad \begin{aligned} \omega_3^3 - \omega_4^4 + b\omega_1^2 - x_3\omega_2^3 + x_5\omega_1^4 + x_6\omega_2^4; \\ \pi_1^2 = 0, \quad \pi_3^3 - \pi_4^4 = 0, \quad \delta b = 0. \end{aligned}$$

От (18) е ясно, че направените нормировки (21) геометрически означават, че за централни точки на правата $p \in M_3$ са избрани точките A_1 и $bA_1 + A_2$. Веднага трябва да отбележим, че с избора на A_1 фактически закрепяме и A_2 . Сега всички върхове са закрепени. Реперът, който те определят, ще наричаме полуканоничен.

Формите $\omega_1^2, \omega_3^3 - \omega_4^4 + b\omega_1^2$ стават също главни и ще ги наричаме главни диференциални форми от първи ред. Инвариантата b е единствена инварианта от първи ред и ще я наричаме кривина на комплекса, определен от диференциалното уравнение (22). Тя има просто геометрично тълкуване

$$(25) \quad b = I_2,$$

където

$$(26) \quad I_2 = (A_2, N_1, N_2, A_1 + A_2).$$

С нормировката $c=1$ ние фактически изключваме от разглеждане комплексите със съвпадащи централни точки. Ще продължим нашите разглеждания само за комплекси с несъвпадащи централни точки.

§ 2. ГЛАВНИ РОЕВЕ НА КОМПЛЕКСА

Произволен рой на комплекса се задава с

$$(27) \quad \omega_2^3 = f\omega_2^4, \quad \omega_1^4 = g\omega_2^4,$$

където $f = f(u, v, w)$, $g = g(u, v, w)$. Допирателната равнина на роя в точката $M = A_1 + tA_2$ от правата p има тангенциални координати

$$(28) \quad \tau(t) = (1 + bg + ft)(A_1A_2A_3) + (g + t)(A_1A_2A_4).$$

Нека $\tau(t)$ съвпада с $\pi(t)$. Тогава трябва да бъде изпълнено равенството

$$(29) \quad t(1+bg+ft)=(bt-1)(g+t),$$

от което, като преобразуваме, получаваме

$$(30) \quad (f-b)t^2+2t+g=0.$$

Ясно е, че върху всяка права p има две точки, за които равнините $\tau(t)$ и $\pi(t)$ съвпадат. Тези точки ще наричаме специални точки, а линиите, които описват — специални линии.

Роеве, за които специалните линии съвпадат с асимптотичните линии, се наричат главни роеве на комплекса.

Асимптотичните линии се получават от уравнението

$$(A_1A_2dMd^2M)=0,$$

откъдето след кратко преобразуване намираме

$$(31) \quad (x_2f+x_4g+x_6)t^2-[(x_3+bx_1)f+(x_5+bx_2)g+ \\ +x_6+bx_3]t+x_1f+x_2g+x_3=0.$$

От условието за съвпадане на (30) и (31) получаваме системата

$$(32) \quad \begin{aligned} (x_2-s)f+x_4g+x_6+bs &= 0, \\ x_1f+(x_2-s)g+x_3 &= 0, \\ (x_3-bx_1)f+(x_5+bx_2)g+x_6+bx_3+2s &= 0, \end{aligned}$$

която има нетривиално решение при

$$(33) \quad \begin{vmatrix} x_2-s & x_4 & x_5+bs \\ x_1 & x_2-s & x_3 \\ x_3+bx_1 & x_5+bx_2 & x_6+bx_3+2s \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнението (33) се нарича характеристично уравнение. В общия случай то има три корена s_1, s_2, s_3 , които заедно с (32) и (27) определят трите главни роя на комплекса.

§ 3. ИНФЛЕКСИОННИ ЦЕНТРОВЕ НА ПРАВАТА НА КОМПЛЕКСА

Нека $M = A_1+tA_2$ е произволна точка върху правата $p=(A_1A_2)$. От

$$(34) \quad dM=(\omega_1^1+t\omega_1^2)M+(\omega_1^3+t\omega_1^4)A_3+(\omega_1^1+t\omega_1^4)A_4+[dt+(1-t^2)\omega_1^2]A_2$$

получаваме условията за неподвижност на M :

$$(35) \quad \omega_1^3+t\omega_2^3=0, \quad \omega_1^4+t\omega_2^4=0,$$

$$(36) \quad dt+(1-t^2)\omega_1^2=0.$$

Аналогично от (16), като вземем пред вид направените нормировки (21), лесно извеждаме условията за неподвижност на равнината $\pi(t)$:

$$(37) \quad (bt-1)\omega_1^4-t\omega_1^3=0, \quad (bt-1)\omega_2^4-t\omega_2^3=0,$$

$$(38) \quad dt+[db-b(\omega_4^4-\omega_3^3)]t^2+(\omega_4^4-\omega_3^3)t=0.$$

В същност уравненията (35) и (37) са едни и същи, т. е. уравненията (35) можем да получим от (37), като използваме диференциалното уравнение на комплекса (22).

Поставиме си за цел да намерим онези точки M от правата p , за които едновременно са изпълнени условията за неподвижност на M и $\pi(t)$. Изваждаме (38) от (36) и като преработим, получаваме

$$(39) \quad Q_4 t^4 + Q_3 t^3 + Q_2 t^2 + Q_1 t + Q_0 = 0,$$

където

$$(40) \quad \begin{aligned} Q_0 &= x_1, & Q_1 &= -2(x_3 + b x_1), \\ Q_2 &= b^2 x_1 + 2x_2 + 2b x_3 + x_6, \\ Q_3 &= -2(b x_2 + x_5), & Q_4 &= x_4. \end{aligned}$$

Намерихме, че в общия случай върху правата $p = (A_1 A_2)$ съществуват четири точки с исканото свойство. Те се наричат инфлексиионни центрове на правата p на комплекса M_3 [1]. Това са точки M , за които конусът от прави на комплекса се изразжда в сноп прави с център съответната точка M и носител съответната ѝ в нормалната корелация равнина $\pi(t)$.

Комплекси, за които всички точки от правата p са инфлексиионни центрове, се наричат линейни.

Очевидно за тях трябва да бъде изпълнено

$$(41) \quad Q_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

От (40) и (41) намираме условията един комплекс да бъде линейн:

$$(42) \quad x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad b x_2 + x_5 = 0, \quad 2x_2 + x_6 = 0.$$

§ 4. КЛАСОВЕ КОМПЛЕКСИ

Като използваме получените досега резултати, ще отбележим някои по-важни класове комплекси в A_2^2 .

1. Ако $x_1 = 0$, централната точка A_1 е инфлексиионен център.
2. Ако $x_4 = 0$, върхът A_2 е инфлексиионен център.
3. Ако $b = 0$, върхът A_2 е централна точка.
4. Ако $x_3 = 0$, $2x_5 - b x_6 = 0$ и $b[(b x_2 + x_5)^2 - b^2 x_1 x_4] \neq 0$, параболичният рой $f = 0$, $g = 0$ е главен рой на комплекса.
5. Ако $b^3 x_3 - b^2 x_2 - b x_5 + x_4 = 0$, $b^2 x_3 - b x_2 - b x_6 + x_5 = 0$ и $b x_3[(b x_3)^2 - x_1 x_4] \neq 0$, развиваемият параболичен рой $f = 0$, $g = -1/b$ е главен рой на комплекса.
6. Ако $(b+2)(b+1)x_1 + (b+2)x_2 + (2b+3)x_3 + x_5 + x_6 = 0$, $(b+1)x_1 - b x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0$ и $x_1\{[(b+1)x_1 + x_3]^2 - x_1 x_4\} \neq 0$, развиваемият параболичен рой $f = b+1$, $g = 1$ е главен рой на комплекса.
7. Ако $(b-1)x_1 - b x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0$, $(b-2)(b-1)x_1 - (b-2)x_2 + (2b-3)x_3 - x_5 + x_6 = 0$ и $x_1\{[(b-1)x_1 + x_3]^2 - x_1 x_4\} \neq 0$, развиваемият параболичен рой $f = b-1$, а $g = -1$ е главен рой на комплекса.
8. Ако $b x_1 + x_3 = 0$, $b x_2 + x_5 = 0$ и $b x_1[(2x_2 + x_6 - b x_3)^2 - 4x_1 x_4] \neq 0$, роят $f = b$, $g = 0$ е главен рой на комплекса.

§ 5. КАНОНИЧЕН РЕПЕР НА КОМПЛЕКСА

Ще продължим канонизацията на репера на комплекса. Диференцираме външно равенствата (23) и като използваме лемата на Картан, получаваме

$$\begin{aligned}
 dx_1 + x_1(\omega_1^1 - \omega_3^3) &= y_1\omega_2^3 + y_2\omega_1^4 + y_3\omega_2^4, \\
 dx_2 + x_2(\omega_1^1 - \omega_4^4) + (bx_1 + x_3)\omega_1^2 &= y_2\omega_2^3 + y_4\omega_1^4 - y_5\omega_2^4, \\
 dx_3 + x_3(\omega_1^1 - \omega_4^4) + (x_1 + x_2)\omega_1^2 &= y_3\omega_2^3 + y_5\omega_1^4 + y_6\omega_2^4, \\
 dx_2 + x_2(\omega_1^1 - \omega_4^4) + x_1(\omega_3^3 - \omega_4^4) &= z_1\omega_2^3 + z_2\omega_1^4 + z_3\omega_2^4, \\
 dx_4 + x_4(\omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) + x_2(\omega_2^3 - \omega_4^4) + (bx_2 + x_5)\omega_1^2 \\
 &= z_2\omega_2^3 + z_4\omega_1^4 + z_5\omega_2^4, \\
 (43) \quad dx_6 + x_6(\omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_4^4) + x_3(\omega_3^3 - \omega_4^4) + (x_2 + x_4)\omega_1^2 \\
 &= z_3\omega_2^3 + z_5\omega_1^4 + z_6\omega_2^4, \\
 dx_3 + x_3(\omega_1^1 - \omega_3^3) + (x_2 - bx_3)\omega_1^2 &= u_1\omega_2^3 + u_2\omega_1^4 + u_3\omega_2^4, \\
 dx_5 + x_5(\omega_1^1 - \omega_4^4) + (bx_3 + x_4 - bx_5 + x_6)\omega_1^2 &= u_2\omega_2^3 + u_4\omega_1^4 + u_5\omega_2^4, \\
 dx_6 + x_6(\omega_1^1 - \omega_4^4) + (x_3 + 2x_5 - bx_6)\omega_1^2 &= u_3\omega_2^3 + u_5\omega_1^4 + u_6\omega_2^4.
 \end{aligned}$$

От (43) и (24) при фиксирана права p , т. е. при изменение само на вторичните параметри, получаваме

$$\begin{aligned}
 \delta x_1 &= x_1(\pi_3^3 - \pi_1^1), \\
 \delta x_2 &= x_2(\pi_3^3 - \pi_1^1), \\
 \delta x_3 &= x_3(\pi_3^3 - \pi_1^1), \\
 (44) \quad \delta x_4 &= x_4(\pi_3^3 - \pi_1^1), \\
 \delta x_5 &= x_5(\pi_3^3 - \pi_1^1), \\
 \delta x_6 &= x_6(\pi_3^3 - \pi_1^1).
 \end{aligned}$$

Като използваме (44), проверяваме, че отношенията

$$(45) \quad I_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad I_2 = \frac{x_4}{x_3}, \quad I_3 = \frac{x_5}{x_6}$$

са абсолютни инварианти. Ще ги наричаме абсолютни инварианти от втори ред. $I_1=0$, $I_2=0$ означават, че съответно A_1 и A_2 са инфлексии центрове на правата p на комплекса.

За да постигнем каноничен репер, трябва да направим още две нормировки. От (44) е ясно, че те могат да бъдат направени по различен начин. Ние избираме

$$(46) \quad x_1 = 1$$

и

$$(47) \quad (A_1 A_2 A_3 A_4) = 1,$$

от което веднага следва

$$(48) \quad 2\omega_1^1 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,$$

$$(49) \quad 2\pi_1^1 + \pi_3^3 + \pi_4^4 = 0.$$

От (46) и първите равенства на (43) и (44) получаваме

$$(50) \quad \omega_1^1 - \omega_3^3 = y_1 \omega_2^3 + y_2 \omega_1^4 + y_3 \omega_2^4,$$

$$(51) \quad \pi_1^1 - \pi_3^3 = 0.$$

Формата $\omega_1^1 - \omega_3^3$ става главна и ще я наричаме главна диференциална форма от втори ред.

Нормиранката $x_1 = 1$ фактически означава, че се изключват от разглеждане комплексите, за които централната точка A_1 е инфлексionen център на правата p на комплекса.

От (24), (49) и (51) следва

$$\pi_1^1 - \pi_3^3 = \pi_4^4 = 0.$$

Сега вземем всички външни диференциални форми π_i^j станаха нули, откъдето $\delta A_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, и следователно каноничният репер е построен. От (43) извеждаме връзките

$$(52) \quad \begin{aligned} 2(b + x_3) + y_2 - z_1 &= 0, \\ 2bx_2 + x_2x_3 + x_5 + y_4 - z_2 &= 0, \\ 2bx_3 + x_3^2 + x_6 + y_5 - z_3 &= 0, \\ -x_3^2 + 1 + y_3 - u_1 &= 0, \\ -x_3x_5 + x_2 + y_5 - u_2 &= 0, \\ -x_3x_6 + x_3 + y_6 - u_3 &= 0, \\ -2bx_3 - x_3^2 - x_3x_5 + x_2 - x_6 + z_3 - u_2 &= 0, \\ -2bx_2x_3 - x_3x_5 + x_2^2 - x_5^2 - x_2x_6 + z_5 - u_4 &= 0, \\ -2bx_3^2 - 2x_3x_6 + x_2x_3 - x_5x_6 + z_6 - u_5 &= 0. \end{aligned}$$

За получените инварианти въвеждаме означенията

$$(53) \quad \begin{aligned} x_2 &= \alpha, \quad x_3 = \beta, \quad x_4 = \gamma, \quad x_6 = \psi, \\ y_1 &= P, \quad y_2 = Q, \quad y_3 = R. \end{aligned}$$

От (22), (23), (48), (50) и (53) получаваме основните уравнения за движението на репера $A_1 A_2 A_3 A_4$ на комплекса M_3 :

$$\omega_1^1 = \frac{1}{4}(b + \beta + 2P)\omega_2^3 + \frac{1}{4}(b\alpha + \gamma + 2Q)\omega_1^4 + \frac{1}{4}(b\beta + \psi + 2R)\omega_2^4.$$

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 &= -\omega_2^3 - a\omega_1^4 - \beta\omega_2^4, & \omega_1^3 &= b\omega_1^4 + \omega_2^4, \\
 (54) \quad \omega_3^3 &= \frac{1}{4}(b + \beta - 2P)\omega_2^3 + \frac{1}{4}(b\alpha + \gamma - 2Q)\omega_1^4 + \frac{1}{4}(b\beta + \psi - 2R)\omega_2^4, \\
 \omega_4^4 &= -\frac{1}{4}(3b + 3\beta + 2P)\omega_2^3 - \frac{1}{4}(3b\alpha + 3\gamma + 2Q)\omega_1^4 - \frac{1}{4}(3b\beta + 3\psi + 2R)\omega_2^4.
 \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кованцов, Н. И. Теория комплексов. Киев, 1963.
2. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана. М., 1948.
3. Станислав, Г. Геометрия линейчатых многообразий бинакциального пространства. Диссертация. Киев, 1965.

Поступила на 29. VII. 1969 г.

КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С АБСОЛЮТОМ ИЗ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ И ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК НА ЛИНИИ ИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Адриан Борисов

(Резюме)

Используются реперы, введенные Станиславом [3]. Прямая $p = (A_1 A_2)$ комплекса M_3 определяется своими двумя центрами (17). Нормировками $a=0$, $c=1$ добываются полуканонического репера.

Величина b является единственной инвариантой первого ряда, которую называем кривизной комплекса. Ее геометрическое толкование дается (25).

Центры перегиба прямой $p \in M_3$ определяются (39), а главные однопараметрические системы прямых комплекса — (27), (32), (33).

В § 4 приводятся некоторые более важные классы комплексов в A_2^2 .

Нормировками (46) и (47) добываются канонического репера комплекса M_3 . Основные уравнения, определяющие движение репера $A_1 A_2 A_3 A_4$, (54).

KANONISCHER REPER DER GERADENKOMPLEXEN IM DREIDIMENSIONALEN RAUM, DESSEN ABSOLUTES GEBILDE AUS ZWEI REELLEN EBENEN UND ZWEI REELLEN PUNKTEN AUF DEREN SCHNITTLINIE BESTEHT

Adrian Borissow

(Zusammenfassung)

Es werden die von Stanilow [3] eingeführten Reper benutzt. Die Gerade $p=(A_1A_2)$ des Komplexes M_3 ist durch ihre zwei Mittelpunkte (17) bestimmt. Durch die Normierungen $a=0$, $c=1$ gelangt man zu einem halbkanonischen Reper.

Die Größe b ist die einzige Invariante erster Ordnung, die wir Krümmung des Komplexes nennen. Ihre geometrische Deutung ist mit (25) angegeben.

Die Inflexionsmittelpunkte der Gerade $p \in M_3$ sind durch (39) definiert und die Hauptregelscharen des Komplexes sind durch (27), (32) und (33) definiert.

Im Paragraphen 4 sind einige der wichtigsten Klassen von Komplexen in A_2^2 angegeben.

Durch die Normierungen (46) and (47) gelangt man zu einem kanonischen Reper des Komplexes M_3 . Die Grundgleichungen (54) bestimmen die Bewegung des Repers $A_1A_2A_3A_4$.