

СИСТЕМА НА ОБСЛУЖВАНЕ $G|G|1$ С ОТПАДАНЕ НА ЗАЯВКИТЕ
В СЛУЧАЙ НА ЗАЕТ ПРИБОР

Апостол Обретенов

Според класификацията на Кендал система на обслужване $G|G|1$ се определя по следния начин: моментите на постъпване $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ на заявките пораждат интервали от време $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_k = t_k - t_{k-1}$, $t_0 = 0$, които са независими случайни величини, еднакво разпределени с функция на разпределение (ф. р.) $F(x) = P(\xi_k < x)$. Продължителностите на обслужване $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ също са независими случайни величини както помежду си, така и от ξ_k , $k \geq 1$, еднакво разпределени с ф. р. $G(x) = P(\eta_k < x)$. Броят на обслужващите прибори е равен на единица.

Целта на нашите разглеждания е да получим различни характеристики за третираната система, като например разпределението на режима на прибора (зает или свободен) във всеки момент и в стационарно състояние, средния брой обслужени заявки за даден период от време, средния период на заетост на прибора за определен интервал и др.

Моментите на $F(x)$ и $G(x)$ ще означаваме съответно с a_k и b_k :

$$a_k = \int_0^{\infty} x^k dF(x), \quad b_k = \int_0^{\infty} x^k dG(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

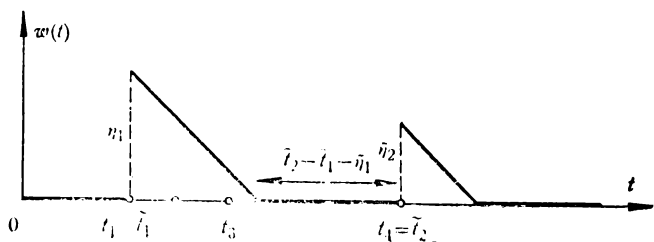
При всички разглеждания ще предполагаме, че $a_1 < +\infty$ и $b_1 < +\infty$. При някои от твърденията ще се налага да поискаме съществуването и на моменти от по-висок ред и това ще споменем изрично на съответното място.

Ще въведем две случайни функции $w(t)$ и $K(t)$, определени от случайните величини, свързани със системата.

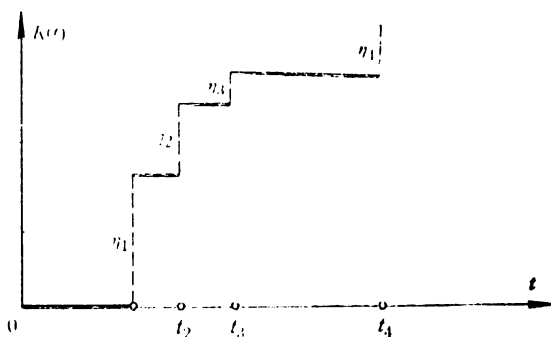
Величината $w(t)$ построяваме посредством една реализация на величините ξ_k и η_k по следния начин: $w(t) = 0$ от началото на координатната система до t_1 , в точката t_1 прави скок, равен на η_1 , и след това намалява линейно с ъглов коефициент -1 до пресичане с оста t ; след това $w(t)$ приема стойност нула до първата срещната точка t_k , където прави скок, равен на η_k , и пак намалява линейно и т. н. (фиг. 1). Аналитично изразена, $w(t)$ е

$$w(t) \begin{cases} w(t_n) - (t - t_n), & \text{ако } w(t_n) > t - t_n; \\ 0, & \text{ако } w(t_n) < t - t_n; \\ \eta_n I(\{w(t_n - 0) = 0\}) + w(t_n - 0), & \text{ако } t = t_n, \end{cases}$$

където $I(A)$ е индикатор на множеството A .



Фиг. 1



Фиг. 2

Функцията $K(t)$ определяме така: $K(t) = 0$ от 0 до t_1 , в $t = t_1$ прави скок на височина η_1 и запазва получената стойност до t_2 , където скача на височина η_2 , след това пак е постоянна до t_3 и т. н. Реализацията на случайната функция $K(t)$ е една стъпаловидна функция (фиг. 2).

Очевидно, ако $w(t) = 0$, то $w(t)$ ни дава колко време устройството ще бъде заето с обслужване на една заявка след момента t . Ако $w(t) = 0$, то устройството е свободно в момента t . Функцията $K(t)$ ни дава сумарната „заетост“ на устройството, ако би се обслужвала всяка заявка. Тази функция реално не съответствува на отпадането на заявките и играе само помощна роля. Ще използваме следните две лемми:

Лема 1. Ако $F(x)$ и $G(x)$ са диференцируеми ф. р., то

$$(1) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1} [1 - E\{e^{-s[K(t+\delta) - K(t)]} | w(t) < \delta\}] = \tilde{h}(t)[1 - g(s)],$$

където $\tilde{h}(t)$ е плътност на възстановяване, определена от ф. р. $P(\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1} - \eta_i < x)$, $\tilde{t}_{i-1}$ и $\tilde{t}_i$ са две последователни точки t_k , в които $w(t)$ прави скок, η_i — скокът в $\tilde{t}_{i-1}$, а $g(s) = Ee^{-s\eta_k}$.

Доказателство. Случайната величина $\kappa = K(t+\delta) - K(t)$ на множеството $\{\omega(t) < \delta\}$ взема стойностите

$$\kappa = \begin{cases} \eta_i & \text{с вероятност } \tilde{h}(t)\delta + o(\delta), \\ 0 & \text{с вероятност } 1 - \tilde{h}(t)\delta + o(\delta). \end{cases}$$

Следователно ще имаме

$$E[e^{-s\kappa} | \omega(t) < \delta] = 1 - \tilde{h}(t)\delta + o(\delta) + Ee^{-s\eta_i} [\tilde{h}(t)\delta + o(\delta)],$$

от което равенство получаваме (1).

Лема 2. Ако $F(x)$ има непрекъсната плътност на възстановяване, а $G(x)$ е диференцируема, то

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{h}(t) = \left\{ a_1 \left[1 + \int_0^{\infty} G(x) dH(x) \right] - b_1 \right\}^{-1}$$

където $H(x)$ е функцията на възстановяване за $F(x)$, $\bar{G}(x) = 1 - G$.

Доказателство. Да означим с $\gamma(u)$ случайната величина

$$\gamma(u) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{N(u)+1} - u,$$

където $N(u)$ е броят на възстановяванията на $(0, u)$ за величините ξ_k . Очевидно процесът на възстановяване $\{\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1}\}$, $i \geq 2$, $\tilde{t}_1 = t_1$, е рекурентен. Затова да разгледаме разликата $\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1}$ между кои да са две последователни точки на скок на $\omega(t)$. Да означим с $\Phi(x)$ ф. р.

$$\Phi(x) = P(\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1} < x).$$

Лесно се вижда, че

$$P(\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1} < x | \eta_i = u) = P[u + \gamma(u) < x],$$

следователно

$$(3) \quad \Phi(x) = \int_0^{\infty} P[u + \gamma(u) < x] dG(u).$$

Разпределението на величината $\gamma(u)$ е известно (вж. например [1], с. 91):

$$P(\gamma(u) < x) = \int_{0-u}^u [F(u+x-y) - F(u-y)] dH(y) + F(u+x) - F(u);$$

заместено в (3), то дава

$$(4) \quad \Phi(x) = \int_0^x G(u) [1 - F(x-u)] dH(u).$$

От (4) се вижда, че $\Phi'(x)$ съществува. Да намерим първия момент на $\Phi(x)$. За тази цел нека означим с $Q(t)$ функцията

$$Q(t) = \int_0^t \bar{G}(u) dH(u)$$

и нека $f(s)$, $\varphi(s)$ и $q(s)$ са Лаплас-Стилтесовите трансформации съответно на $F(x)$, $\Phi(x)$ и $Q(x)$. Функцията $\Phi(x)$ от (4) посредством $Q(t)$ записваме по следния начин:

$$(5) \quad \Phi(x) = F(x) - Q(x) + \int_0^x F(x-u) dQ(u).$$

От (5) получаваме

$$(5_1) \quad \varphi(s) = f(s) - q(s) + f(s)q(s).$$

С помощта на (5₁) намираме

$$(6) \quad E(\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1}) = \int_0^\infty x d\Phi(x) = -\varphi'(0) = a_1 \left[1 + \int_0^\infty \bar{G}(u) dH(u) \right].$$

Тъй като $\tilde{h}(t)$ е плътност на възстановяване за разпределението на величината $\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1} - \tilde{\eta}_i$, от (6) и елементарната теорема за възстановяване следва (2).

Нека $F(t, x)$ е ф. р. на $w(t)$, т. е.

$$F(t, x) = P[w(t) < x],$$

а $f(t, s)$ е Лаплас-Стилтесовата трансформация на $F(t, x)$

$$f(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(t, x).$$

Ще докажем следната

Теорема 1. Функцията $f(t, s)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = sf(t, s) - F(t, +0)\{s + \tilde{h}(t)[1 - g(s)]\},$$

където $\tilde{h}(t)$ е плътността на възстановяване за ф. р. на случайната величина $\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1} - \tilde{\eta}_i$.

Доказателство. От определението на $w(t)$ се вижда, че

$$w(t+\delta) = \begin{cases} w(t) - \delta & \text{при } w(t) \geq \delta; \\ K(t+\delta) - K(t) - \theta\delta, & \theta = 0, 1, \text{ при } w(t) < \delta. \end{cases}$$

Имаме

$$(8) \quad \begin{aligned} f(t+\delta, s) &= Ee^{-sw(t+\delta)} = E(e^{-sw(t+\delta)} | w(t) < \delta)P(w(t) < \delta) \\ &\quad + E(e^{-sw(t+\delta)} | w(t) \geq \delta)P(w(t) \geq \delta). \end{aligned}$$

Да прибавим и извадим от лявата страна на равенството (8) $E(e^{-s(w(t)-\delta)} | w(t) < \delta)P(w(t) < \delta)$; получаваме, след като използваме и (1),

$$(9) \quad f(t+\delta, s) = \{1 - \delta \tilde{h}(t)[1 - g(s)]\} P(w(t) < \delta) + E e^{-s[w(t) - \delta]} - E\{e^{-s[w(t) - \delta]} | w(t) < \delta\} N(w(t) < \delta),$$

или

$$(9_1) \quad \frac{f(t+\delta, s) - f(t, s)}{\delta} = s f(t, s) - \tilde{h}(t)[1 - g(s)] P(w(t) < \delta) + \frac{1 - E\{e^{-s[w(t) - \delta]} | w(t) < \delta\}}{\delta} P(w(t) < \delta).$$

Последното събираемо от горното равенство има граница при $\delta \rightarrow 0$ и тя е

$$(10) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - E\{e^{-s[w(t) - \delta]} | w(t) < \delta\}}{\delta} P(w < \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1} \int_0^\delta [1 - e^{-s(x - \delta)}] dF(t, x) = -sF(t, +0).$$

Като оставим $\delta \rightarrow 0$ в (9₁) и използваме (10), намираме (7).

Да предположим, че функцията $F(t, +0)$ ни е известна. Тогава уравнението (7) е линейно по t относно неизвестната функция $f(t, s)$ и можем да го решим. Намираме

$$(11) \quad f(t, s) = e^{st} \left[1 - \int_0^t e^{-su} F(u, +0) \{[s + \tilde{h}(u)][1 - g(s)]\} du \right].$$

Тъй като $f(t, s)$ не надминава единица, то при $t \rightarrow \infty$ от (11) получаваме

$$(12) \quad s \int_0^\infty e^{-su} F(u, +0) du + (1 - g) \int_0^\infty e^{-su} F(u, +0) d\tilde{H}(u) = 1,$$

където $\tilde{H}(u)$ е функцията на възстановяване за ф. р. $R(x) = \int_0^\infty P[\gamma(u) < x] dG(u)$.

Разпределението $P[\gamma(u) < x]$ знаем, следователно $\tilde{H}(u)$ е известна и (10) ни определя $F(t, +0)$. В такъв случай и $f(t, s)$ ще е определена посредством (11). По-конкретен резултат за $f(t, s)$ се получава за стационарния случай, затова ще го разгледаме. Имаме следната

Теорема 2. Ако функциите $F(x)$ и $G(x)$ са диференцируеми и притежават втори моменти, то

$$(13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, +0) = 1 - \frac{b_1}{a_1 \left[1 + \int_0^\infty \bar{G} dH(x) \right]}.$$

Доказателство. Равенството (12) записваме така:

$$(14) \left[s + \frac{1}{\mu} (1-g) \right] \int_0^{\infty} e^{-su} F(u, +0) du = 1 - (1-g) \int_0^{\infty} e^{-su} F(u, +0) d\left[\bar{H}(u) - \frac{1}{\mu} \right],$$

където μ е първият момент на $R(x)$.

Равенството (14) след интегриране по части на интеграла отляво и като вземем пред вид $F(0, +0) = 1$, се превръща в

$$(15) \left[1 + \mu^{-1} s(1-g) \right] \left[1 + \int_0^{\infty} e^{-su} dF(u, +0) \right] \\ = 1 - (1-g) \int_0^{\infty} e^{-su} F(u, +0) \left[\tilde{h}(u) - \frac{1}{\mu} \right] du.$$

От съществуването на вторите моменти на F и G следва, че

$$c = \int_0^{\infty} \left| \tilde{h}(u) - \frac{1}{\mu} \right| du < +\infty.$$

Следователно

$$\left| [1-g(s)] \int_0^{\infty} e^{-su} F(u, +0) \left[\tilde{h}(u) - \frac{1}{\mu} \right] du \right| \leq c[1-g(s)] \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0.$$

Като оставим $s \rightarrow 0$, от равенството (15) намираме (13).

Да разгледаме стационарния случай и да си поставим за задача да намерим стационарното разпределение на $w(t)$.

Теорема 3. Ако $F(x)$ и $G(x)$ имат производни и втори моменти, то

$$(16) \lim_{t \rightarrow \infty} P[w(t) < x] = \left(1 - \frac{b_1}{\mu + b_1} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{G}(u) du \right\},$$

където $\mu = a_1 \left[1 + \int_0^{\infty} \bar{G}(u) dH(u) \right] - b_1$.

Доказателство. От (11), като вземем пред вид (2) и (13), имаме

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, s) = \lim_{t \rightarrow \infty} s^{-1} F(t, +0) \{ s + \tilde{h}(t) [1-g(s)] \} = \left(1 - \frac{b_1}{\mu + b_1} \right) \left\{ 1 + \frac{s^{-1}}{\mu} [1-g(s)] \right\}.$$

Не е трудно да се провери, че получената граница е характеристична функция за границата (16). В такъв случай теоремата следва, като приложим теоремата за непрекъснатост на Леви—Хинчин.

Да намерим някои средни стойности за разглежданата система.

1. Средно време на заетост на прибора. Нека $z(t)$ е случайната величина

$$z(t) = \begin{cases} 1, & \text{ако приборът е зает в момента } t, \\ 0, & \text{ако е свободен,} \end{cases}$$

Очевидно $P(z=0)=F(t, +0)$. Тогава средното време $\tau(T)$ на заетост на прибора за период от време T ще е

$$\tau(T) = E \int_0^T z(t) dt = T - \int_0^T F(t, +0) dt.$$

Като вземем пред вид (13), ще имаме асимптотично за $T \rightarrow \infty$

$$\tau(T) \sim b_1 T \left[a_1 + a_1 \int_0^\infty \bar{G}(x) dH(x) \right]^{-1}$$

2. Среден брой заявки, обслужени за време T . Означаваме този брой с $S(T)$. Ако $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_n, \dots$ са точките, в които $w(t)$ прави скок, средният брой точки $\tilde{t}_n$, попаднали на интервала $(0, T)$, е $EN(T)$, където $N(T)$ е броят на възстановяванията за редицата $\{\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1}\}$. Следователно по елементарната теорема за възстановяване, като знаем вече $E(\tilde{t}_i - \tilde{t}_{i-1})$ от (6), ще имаме

$$S(T) = E(N(T)) \sim T \left[a_1 + a_1 \int_0^\infty \bar{G}(x) dH(x) \right]^{-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Барлоу, Р., Ф. Прошан. Математическая теория надежности. М., 1969.

Постъпила на 11. XII. 1969 г.

СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI|G|1$ С ПОТЕРЯМИ ЗАЯВОК В СЛУЧАЕ ЗАНЯТОГО ПРИБОРА

Апостол Обретенов

(Резюме)

Рассматривается система обслуживания типа $GI|G|1$. Находится распределение режима прибора (занятого или свободного) в любой момент времени (показывается, что трансформация Лапласа—Стилтеса этого распределения удовлетворяет уравнению (7)) и в стационарном состоянии (распределение дается (16)). Определяются среднее время занятости прибора (17) и среднее число обслуженных заявок за данный период времени (18).

A QUEUEING SYSTEM OF THE TYPE $GI|G|1$ WHERE ORDERS
ARE LOST WHEN REACHING A BUSY DEVICE

Apostol Obretenov

(Summary)

A queueing system of the type $GI|G|1$ is considered. The distribution of the busy time is found for every moment (it is shown that the Laplace-Stieltjes transformation of this distribution satisfies equation (7)) and for the stable state the distribution is given in (16). The average period of the occupation time (17) and the average number of orders accomplished for a certain period of time (18) are found.