

СИСТЕМА ОТ ТИПА „ k ОТ n “ С ВЪЗСТАНОВЯВАНЕ И ЕКСПОНЕНЦИАЛНА ПРОДЪЛЖИТЕЛНОСТ НА ЖИВОТ

Апостол Обретенов и Мария Кръстева

Система от типа „ k от n “ се нарича такава система от n елемента, която функционира нормално тогава и само тогава, когато работят поне k елемента, $1 \leq k \leq n$.

Системи от типа „ k от n “ без възстановяване на отказалите елементи и при произволна продължителност на живот са разгледани в [1], [2] и [3]. В настоящата статия се разглежда система от типа „ k от n “ с възстановяване, при която разпределението на продължителността на живот на всички елементи е експоненциална с параметър λ , т. е. $P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}$ а разпределението на продължителността на ремонт за всички елементи, е произволна функция на разпределение $G(t)$.

Продължителността на работа и възстановяване на един елемент ще разгледаме като случаен процес, който за i -тия елемент означаваме с $w_i(t)$, определен както в [4] по следния начин:

$$w_i(t) = \begin{cases} w(t_n) - (t - t_n), & \text{ако } t - t_n < w(t_n); \\ 0, & \text{ако } t - t_n > w(t_n); \\ \eta_n I_{\{w(t_n - 0) = 0\}} + w(t_n - 0), & \text{ако } t = t_n \end{cases}$$

където t_n е моментът на постъпването на n -тия отказ на елемента, а η_n — продължителността на n -тия ремонт.

Известно е [4], че функцията на разпределение на процеса $w_i(t)$ $F(t, x) = P(w_i(t) < x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} - \lambda F(t, 0)[1 - G(t)],$$

което има единствено решение при условие $F(0, x) = 1$.

Стационарното състояние на процеса $w_i(t)$ се характеризира с функцията на разпределение $\tilde{F}(x)$:

$$\tilde{F}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, x) = \frac{1}{1 + \lambda a} \left[1 + \lambda \int_0^x [1 - G(u)] du \right], \quad x \geq 0.$$

Разглеждаме система от n еднотипни елемента. Нека

$$(1) \quad w_1(t), \quad w_2(t), \dots, w_n(t)$$

са случайни процеси, характеризирани отделните елементи на системата. Тъй като елементите са еднотипни, то

$$P(w_i(t) < x) = F(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нека

$$w_1^*(t) \leq w_2^*(t) \leq \dots \leq w_n^*(t)$$

е една наредена реализация на (1). Ако $w_k^*(t) = 0$, то $w_i^*(t) \leq 0$ за $i \leq k$. Следователно в момента t работят поне k на брой елемента. Обратно — ако поне k елемента работят, то $w_k^*(t) = 0$. И така, вероятностният режим на системата „ k от n “ се определя от $w_k^*(t)$.

Да положим $w(t) = w_k^*(t)$ и да определим $P(w(t) < x)$. Предполагаме, че $x \neq 0$. Нека вероятността за това, че някое $w_v^*(t)$ в момента t взема стойност u , е $d_u F(t, u)$. За да е изпълнено събитието $w(t) < x$, трябва $k-1$ на брой $w_i(t)$ да са по-малки от u , а останалите $n-k$ да са не по-малки от u . Вероятността за това е

$$F^{k-1}(t, u) \cdot [1 - F(t, u)]^{n-k}.$$

Следователно

$$(2) \quad P[w(t) < x] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^x F^{k-1}(t, u) [1 - F(t, u)]^{n-k} dF(t, u) + P(w(t) = 0), \quad x \neq 0,$$

или

$$(2') \quad P[w(t) < x] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_{F(t,0)}^{F(t,x)} y^{k-1} [1-y]^{n-k} dy + P(w(t) = 0).$$

Представянето (2') е вярно и при $x = 0$. Да определим $P(w(t) = 0)$. $w(t) = 0$ означава, че системата работи в момента t . Ако точно r на брой от $w_i(t)$ са нули, $r \geq k$, то вероятността е $\binom{n}{r} F^r(t, 0) [1 - F(t, 0)]^{n-r}$, а вероятността поне k да са нули ще е

$$(3_0) \quad P(w(t) = 0) = \sum_{r \geq k} \binom{n}{r} F^r(t, 0) [1 - F(t, 0)]^{n-r},$$

което е еквивалентно на

$$(3) \quad P[w(t) = 0] = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(t,0)} y^{k-1} [1-y]^{n-k} dy.$$

Като заместим (3) в (2'), намираме окончателно

$$(4) \quad P(w(t) < x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F(t,x)} y^{k-1} [1-y]^{n-k} dy.$$

При $t \rightarrow \infty$ получаваме от (4) стационарното разпределение на $w(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(w(t) < x) = B_{k,n-k+1}[\tilde{F}(x)],$$

където

$$B_{s,r}(x) = \frac{\Gamma(s+r)}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(r)} \int_0^x y^{s-1} [1-y]^{r-1} dy.$$

По-нататък ще използваме следното означение:

$$F_{n,k}(t, x) = P(w(t) < x).$$

СРЕДЕН БРОЙ ОТКАЗИ НА СИСТЕМАТА В ДАДЕН ИНТЕРВАЛ

Нека $L_{n,k}$ е сумарната дължина на интервалите от време, в течение на които системата работи, за период от време $(0, T)$.

Да разгледаме случайната величина $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{ако системата работи в момента;} \\ 0, & \text{ако не работи.} \end{cases}$$

Тъй като $P(\eta=1) = F_{n,k}(t, 0)$, то

$$E\eta(t) = F_{n,k}(t, 0)$$

и следователно

$$(5) \quad E(L_{n,k}) = E \int_0^T \eta(t) dt = \int_0^T E\eta(t) dt = \int_0^T F_{n,k}(t, 0) dt.$$

Сумарният поток от отказите на всички n елемента има интензивност $n\lambda$. Тогава $n\lambda E(L_{n,k})$ ще е средният брой откази в интервал от време $E(L_{n,k})$ за потока на отказите на n -те елемента. Обаче не всички откази са и откази на системата. Ще покажем, че средният брой откази на системата $m(T)$ за интервал от време $(0, T)$ има асимптотика

$$(6) \quad m(T) \sim (n-k+1) \frac{e\lambda T}{1-e} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} e^j (1-e)^{n-j}, \quad e = 1/(1+\lambda\alpha).$$

Наистина да разгледаме потока от отказите на един кой да е елемент от $n-r$ на брой елемента, $r \geq k$. Отказите на този елемент по време на работа на поне k от всички n ще съдържат откази, които не са на системата. Тогава част от отказите на системата ще се дават от разликата

$$A_0(T) = n\lambda E(L_{n,k}) - \sum_{v=k}^n (n-v) \binom{n}{v} \int_0^T F^v(t, 0) [1 - F(t, 0)]^{n-v-1} dt.$$

Като заместим $E(L_{n,k})$ от (5), за $A_0(T)$ намираме

$$A_0(T) = n\lambda \left[\sum_{v=k}^n \binom{n}{v} \int_0^T F^v(1-F)^{n-v} dt - \sum_{v=k}^n \binom{n-1}{v} \int_0^T F^v(1-F)^{n-v-1} dt \right]$$

или при $T \rightarrow \infty$

$$(7) \quad A_0(T) \sim (n-k+1) \frac{\rho\lambda T}{1-\rho} \binom{n}{k-1} \rho^{k-1} (1-\rho)^{n-k+1}.$$

Нека $0 \leq i \leq k-1$ и да разгледаме сега потока от отказите на $n-i$ елемента на сумарен интервал от време $E(L_{n-i,k-i})$, когато поне $k-i$ работят от всичко $n-i$, като i на брой елемента не работят.

Понеже разглеждаме система от n елемента, а не от $n-i$, то вероятностите, изчислени за система от $n-i$ елемента, трябва да се разглеждат като условни.

С аналогични разсъждения както при получаването на $A_0(T)$ ще имаме

$$A_i(T) = (n-i)\lambda \left[E(L_{n-i,k-i}) - \sum_{v=k-i}^{n-i} \binom{n-i-1}{v} \int_0^T F^v(1-F)^{n-i-1-v} dt \right].$$

Можем да считаме, че $k \leq (n+1)/2$. В противен случай бихме разглеждали допълнителните вероятности.

Нека $p_i = \binom{n-i}{k-i-1} / \binom{n}{k-i-1}$. При $T \rightarrow \infty$ за $A_i(T)$ имаме

$$A_i(T) \sim (n-k+1) \frac{\rho\lambda T}{1-\rho} \binom{n-i}{k-i-1} \rho^{k-i-1} (1-\rho)^{n-k+1}$$

и за отказите на системата ще получим

$$(8) \quad T^{-1}m(T) \sim \sum_{i=0}^{k-1} p_i^{-1} (1-\rho)^i [T^{-1}A_i(T)]_{T=\infty}.$$

Дясната страна на (8) след опростяване и смяна на индекса i с j чрез $j = k-i-1$ дава (6).

Разпределение на времето за ремонт на системата и средната му стойност

Функцията на разпределение на времето на възстановяване на системата зависи от момента t , в който системата получава отказ. Тя е

$$(9) \quad G(t, x) = P(w(t) < x \mid t \text{ е момент на отказ}).$$

Това е вероятността, че продължителността на бездействие на системата от момента t не надминава x .

За да определим $G(t, x)$, ще разгледаме възможните състояния на системата в интервала от време $I = (t, t+h)$. Нека $A(t, h)$ е събитие то сн-

сѣматa да откаже в интервала I . Това събитие се сѣстои от следните несъвместими събития:

$A_1(t, h)$ — $n-k$ елемента се възстановяват и един от останалите k елемента получава отказ в I ;

$A_2(t, h)$ — $n-k$ елемента се възстановяват и поне 2 елемента получават отказ;

$A_{\nu}(t, h)$ — $n-k-\nu$ елемента се възстановяват и $\nu+1$ от останалите $k-\nu$ елемента получават отказ, $\nu \geq 1$.

Вероятностите на тези събития са

$$P[A_1(t, h)] = \binom{n}{n-k} [1 - F(t, h)]^{n-k} \binom{k}{1} \lambda h F^k(t, 0) + o(h),$$

$$P[A_2(t, h)] = o(h),$$

$$P[A_{\nu}(t, h)] = o(h).$$

Следователно

$$P[A(t, h)] = P[A_1(t, h)] + o(h).$$

За допълнителната вероятност на (9) имаме

$$(10) \quad 1 - G_h(t, x) = \frac{P\{(w(t+h) > x) \cap A(t, h)\}}{P[A(t, h)]}.$$

За да определим вероятността на сечението от събития в (10), разглеждаме събитията:

1. В момента t за $w_{\nu}(t)$ на $n-k$ на брой елемента имаме $w_{\nu}(t) > x+h$ и един от останалите k елемента получава отказ, като се възстановява за време, повече от $x+h$. Вероятността за това е

$$P_1(t, h) = \binom{n}{n-k} [1 - F(t, t+h)]^{n-k} \binom{k}{1} \lambda h [1 - G(x+h)] F^k(t, 0).$$

2. Събитията на останалите възможни случаи имат вероятности от реда на $o(h)$. Така че

$$P\{(w(t+h) > x) \cap A(t, h)\} = P_1(t, h) + o(h).$$

Като заместим в (10) намерените вероятности, получаваме при $h \rightarrow 0$

$$(11) \quad 1 - G(t, x) = [1 - G(x)] \left\{ \frac{1 - F(t, x)}{1 - F(t, 0)} \right\}^{n-k}$$

Стационарното разпределение $\tilde{G}(x)$ на времето за ремонт на системата получаваме от (11) при $t \rightarrow \infty$:

$$1 - \tilde{G}(x) = [1 - \tilde{F}(x)]^{n-k} [1 - G(x)] \left(\frac{\lambda \alpha}{1 + \lambda \alpha} \right)^{-(n-k)}$$

Средното време на бездействие на системата в стационарно състояние е

$$m_1 = \int_0^{\infty} [1 - \tilde{G}(x)] dx = \frac{1}{n-k} \int_0^{\infty} \left[\alpha - \int_0^x \tilde{G}(u) du \right]^{n-k} \tilde{G}(x) dx,$$

където $G_1 = G$. Като пресметнем интеграла, получаваме

$$m_1 = n - k + 1$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Birnbaum, Z. W., J. D. Esary, S. C. Saunders. Multi-Component Systems and Structures and Their Reliability. *Technometrics*, 3 (1961), No. 1.
2. Esary, J. D., F. Proschan. Coherent Structures of Non-Identical Components. *Technometrics*, 5 (1963), No. 2.
3. Барлоу, Р., Ф. Прошан. Математическая теория надежности. М., 1969.
4. Обретенов, А., Б. Димитров, М. Узунов. Исследование надежности системы посредством стохастических процессов. Изв. на Мат. инст., 11 (1970). БАН, 159—180.

Постъпила на 13. XII. 1969 г.

СИСТЕМА ТИПА „ k ИЗ n “ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТЮ

Апостол Обретенов и Мария Крыстева

(Резюме)

Рассматривается система из n однотипных элементов, действующей когда хоть k , $1 \leq k \leq n$, элементов работают. Долговечность любого элемента предполагается экспоненциально распределенной, а время ремонта — произвольным.

Находится распределение вероятностного режима системы (4) и его стационарное распределение. Дается среднее число отказов системы в данном интервале (8). Находится распределение времени ремонта системы (11) и среднее время ремонта системы m_1 в стационарном состоянии.

A SYSTEM OF THE TYPE “ k FROM n ” WITH RENEWAL AND EXPONENTIAL LIFE-DURATION

Apostol Obretenov and Maria Krâsteva

(Summary)

A system of n identical elements, working when at least k , $1 \leq k \leq n$, of the elements work is considered. The life-duration of each element is supposed to be exponentially distributed while the repair time is arbitrary.

The distribution of the stochastic regime of the system (4) and its stationary distribution are found. The average number of failures of the system for a certain interval (8) is given. The distribution of the repair time of the system (11) and the average repair time of the system m_1 when in a stable state are found.