БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ * ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIII

ВЪРХУ МЕТОДА НА ПОПЪЛВАНЕ ЗА ОБРЪЩАНЕ НА МАТРИЦИ И ЗА РЕШАВАНЕ НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ

Милко Петков

В тази статия се доразвива методът на попълване, прилаган досега само за обръщане на матрици [1], [2]. Разглеждат се съответните клетъчни модификации за обръщане на матрици и се показва, че този метод може да получи реализация и в удобни схеми за решаване на линейни системи. Изследва се въпросът за приложимостта на този метод, привеждат се броят на аритметичните операции и броят на обръщанията към външната памет в случаите, когато се прилагат съответните модифицирани схеми. Накрая са дадени резултати, получени от някои числени експерименти.

1. ОБРЪЩАНЕ НА МАТРИЦИ ПО МЕТОДА НА ПОПЪЛВАНЕТО

1.1. Обикновени схеми

Нека X е неособена матрица от ред n, а U и V са матрици съответно от тип $n\times 1$ и $1\times n$ и такива, че числото $a=1+VX^{-1}U$ е различно от нула. Ако $Y=X+UV$, известно е [2], че

$$Y^{-1}=X^{-1}-\frac{X^{-1}UVX^{-1}}{a}.$$

Чрез прилагане на тази формула се получават следните схеми за обръщане на матрица $A=(a_{ij})$ от ред n.

1.1.1. Първа схема [2]. Последователно се намират обратните матрици на матриците

$$A_0=E,\quad A_k=A_{k-1}+U_kV_k,\ k=1,\ 2,\dots,\ n,$$

по формулата

$$A_k^{-1}=A_{k-1}^{-1}-\frac{A_{k-1}^{-1}U_kV_kA_{k-1}^{-1}}{a_k},$$

където

$$U_k=(0,\ 0,\dots,\ 0,\ \underset{(k)}{1},\ 0,\dots,\ 0)',$$

$$V_k=(a_{k1},\dots,\ a_{kk-1},\ a_{kk}-1,\ a_{kk+1},\dots,\ a_{kn})$$

и $a_k=1+V_kA_{k-1}^{-1}U_k$.

Ако $a_j^{(k)}$ е j-тият стълб на A_k^{-1}, пресмятанията се извършват по формулата

$$a_j^{(k)} = a_j^{(k-1)} - \frac{(V_k', a_j^{(k-1)})}{1+(V_k', a_k^{(k-1)})} a_k^{(k-1)}.$$

Тъй като $A_n = A$, то $A_n^{-1} = A^{-1}$.

Този алгоритъм може да се реализира в програма, която изисква n^3+2n събирания, $\frac{1}{2}(2n^3+3n^3+n)$ умножения и n деления.

1.1.2. Втората схема, дадена от Ершов [1], се състои в следното. Построява се редицата от матрици

$$A_0 = A - E, \quad B_1, A_1, \ldots, B_n, A_n = A^{-1},$$

където

$$B_k = (b_{ij}^{(k)}), \quad b_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)}, & i \neq k; \\ \delta_{ij}, & i = k, \end{cases}$$

$$A_k = (a_{ij}^{(k)}), \quad a_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k)} - \frac{b_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k-1)}}{1+a_{kk}^{(k-1)}}.$$

Както при първата, така и при втората схема може да се пресметне $\det A = |A|$.

Ще се спрем на втората схема, като покажем, че

(1) $$|A| = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_{kk}^{(k-1)}).$$

Полагаме

$$Z = \begin{pmatrix} X & U \\ V & \lambda \end{pmatrix},$$

където X, U и V са матриците, въведени в началото, а λ е число. Имаме

(2) $$|Z| = (\lambda - VX^{-1}U)\,|X|$$

и

(3) $$Z^{-1} = \begin{pmatrix} X^{-1} + \frac{X^{-1}UVX^{-1}}{\mu} & -\frac{X^{-1}U}{\mu} \\ -\frac{VX^{-1}}{\mu} & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

където $\mu = \lambda - VX^{-1}U \neq 0$.

Ако положим $i = j = k$ в равенството

$$a_{ij}^{(k)} = b_{ij}^{(k)} - \frac{b_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k-1)}}{1+a_{kk}^{(k-1)}},$$

ще получим

$$a_{kk}^{(k)}=\frac{1}{1+a_{kk}^{(k-1)}}.$$

От последното равенство и от равенствата (2) и (3) получаваме

$$a_{kk}^{(k)}=\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k},$$

където Δ_i е i-тият главен минор на A, а $\Delta_0=1$. Следователно

$$1+a_{kk}^{(k-1)}=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}.$$

Оттук (1) следва непосредствено. Вижда се също, че горните две схеми са приложими тогава и само тогава, когато всичките главни минори на A са различни от нула.

За да се обърне една матрица от ред n по схемата на Ершов, се изискват n^3+2n събирания, n^3+n^2 умножения и n деления.

1.2. Клетъчни модификации на метода на попълване за обръщане на матрици

В случаите, когато трябва да се обръщат големи матрици или решават големи системи, т. е. такива, числовата информация на които не може да се побере едновременно във вътрешната памет на дадена електронна сметачна машина, прибягва се до съответни клетъчни обобщения. При тези модификации се предполага, че матричните масиви са разделени на по-малки масиви (подматрици или клетки), така че да могат да се поберат в оперативната памет само няколко, малко на брой такива клетки, а останалата информация да се съхранява в една или друга външна памет. Тук, както споменахме в началото, ще разгледаме и съответните клетъчни обобщения.

Нека X е неособена матрица от ред n, а U и V са две матрици от тип съответно $n\times q$ и $q\times n$, $q\leq n$. Тогава, ако

$$Y=X+UV,$$

известно е, че

$$Y^{-1}=X^{-1}-X^{-1}U(E_q+VX^{-1}U)^{-1}VX^{-1}, \tag{4}$$

където с E_q е означена единичната матрица от ред q.

С помощта на (4) ще получим съответни модифицирани схеми за обръщане на клетъчни матрици.

Нека $A=(a_{ij})$ е неособена матрица от ред n, разделена на p^2 на брой квадратни клетки A_{ij} от ред q.

1.2.1. Първа схема. Полагаме $A_0=E$ и $A_k=A_{k-1}+U_kV_k$, където

$$U_k(0_q,\dots,0_q,\underset{(k)}{E_q},0_q,\dots,0_q)',$$

а 0_q е нулевата матрица от ред q и

$$V_k=(A_{k1},\ldots, A_{kk-1}, A_{kk}-E_q, A_{kk+1},\ldots, A_{kp}),\quad k=1, 2,\ldots, p.$$

Като използваме (4), намираме

$$A_k^{-1}=A_{k-1}^{-1}-A_{k-1}^{-1}U_k(E_q+V_kA_{k-1}^{-1}U_k)^{-1}V_kA_{k-1}^{-1},$$

където $A_p^{-1}=A^{-1}$.

Ако $L_j^{(k)}$ е j-тият клетъчен стълб на A_k^{-1}, то пресмятанията се извършват по формулата

$$L_j^{(k)}=L_j^{(k-1)}-L_k^{(k-1)}(E_q+V_kL_k^{(k-1)})^{-1}V_kL_j^{(k-1)}.$$

За обръщането на една матрица от ред n се изискват $nq^2+2n^2q+n^3-2n^2+4n$ събирания, $nq^2+\frac{4n^2+3n}{2}q+\frac{2n^3+n}{2}$ умножения, n деления и $(5p^3+12p^2+5p)/2$ обръщания към външната памет.

При тази, както и при следващата схема предполагаме, че в оперативната памет на машината могат да се съхраняват едновременно по три клетки.

1.2.2. Модифицирана схема на Ершов. Образуваме редицата от матрици

$$A_0=A-E,\ B_1,\ A_1,\ldots,\ B_p,\ A_p=A^{-1},$$

където

$$B_k=(B_{ij}^{(k)}),\quad B_{ij}^{(k)}=\begin{cases}A_{ij}^{(k-1)}, & i\neq k\\ \delta_{ij}^{(q)}, & i=k,\end{cases}$$

($\delta_{ij}^{(q)}$ означават матрицата E_q при $i=j$ и 0_q при $i\neq j$ и се наричат обобщени символи на Кронекер) и

$$A_k=(A_{ij}^{(k)}),\quad A_{ij}^{(k)}=B_{ij}^{(k)}-B_{ik}^{(k)}(E_q+A_{kk}^{(k-1)})^{-1}A_{kj}^{(k-1)}.$$

Изпълнени са и равенствата

$$|E_q+A_{kk}^{(k-1)}|=\frac{\Delta_{(kq)}}{\Delta_{((k-1)q)}}\quad \text{за}\quad k=1, 2,\ldots, p,$$

където $\Delta_0=1$, а с Δ_i е означен i-тият главен минор на A. Следователно

$$|A|=\prod_{k=1}^{p}|E_q+A_{kk}^{(k-1)}|.$$

Разгледаната клетъчна модификация е приложима, когато всички $\Delta_{(kq)}$ са различни от нула. Ако матриците $E_q+A_{kk}^{(k-1)}$ се обръщат по обикновената схема на Ершов, и техните главни минори е необходимо да са различни от нула.

За да се обърне една матрица от ред n, се изискват $nq^2+n^2q+n^3-n^2+4n$ събирания, $nq^2+(n^2+n)q+n^3$ умножения, n деления и $3p^3+4p^2$ обръщания към външната памет.

2. РЕШАВАНЕ НА ЛИНЕЙНИ СИСТЕМИ ПО МЕТОДА НА ПОПЪЛВАНЕТО

2.1. Обикновени схеми

2.1.1. Първа схема. Ще покажем, че методът на попълване може да се реализира и в удобни схеми за решаване на линейни системи.

Нека $Ax=b$ е линейна система с неособена матрица $A=(a_{ij})$ от ред n, $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)'$, а $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)'$.

Ако A_k и V_k са въведените в (1.1) матрици, а $x^{(k)}$ е решението на системата $A_k x^{(k)}=b$, решението на дадената система $Ax=b$ може да се получи чрез последователни пресмятания по формулите

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-\frac{(V'_k, x^{(k-1)})}{1+(V'_k, a_k^{(k-1)})}\, a_k^{(k-1)}$$

и

$$a_j^{(l)}=a_j^{(l-1)}-\frac{(V'_l, a_j^{(l-1)})}{1+(V'_l, a_l^{(l-1)})}\, a_l^{(l-1)},$$

където $k=1, 2, \ldots, n$, а $l=1, 2, \ldots, n-1$ и $j>l$, като с $a_j^{(l)}$ е означен j-тият стълб на A_l^{-1}.

Имаме

$$x^{(n)}=x=A^{-1}b.$$

Очевидно за пресмятането на $x^{(k)}$ са необходими само векторите $x^{(k-1)}$, V'_k и $a_k^{(k-1)}$. Като вземем пред вид също, че всички елементи на A_k^{-1}, които са под k-тия ред, са от вида δ_{ij}, заключаваме, че при пресмятането на $x^{(k)}$ са необходими $N=2n+(n-k+1)(k-1)$ клетки от оперативната памет за съхраняване на векторите $x^{(k-1)}$ и V'_k, както и на всичките стълбове на A_{k-1}^{-1}, за които $j>k-1$. Тъй като $N_{\max}\sim n^2/4$, тази схема позволява да се съкрати почти четири пъти използваната памет, както това се постига при методите на ограждане и оптимално изключване.

Схемата изисква $(2n^3+9n^2+7n)/6$ събирания, $(n^3+6n^2+2n)/3$ умножения и n деления.

2.1.2. Втора схема. Построяваме редицата от матрици

$$A_0, B_1, A_1, \ldots, B_n, A_n,$$

където

$$A_0=(A-E\,|\,Ab-b)=(a_{ij}^0), \quad B_k=(b_{ij}^{(k)}), \quad A_k=(a_{ij}^{(k)}),$$

като $i=1, 2, \ldots, n$, а $j=k+1, k+2, \ldots, n+1$. Елементите на матриците B_k и A_k се пресмятат съответно по формулите

$$b_{ij}^{(k)}=\begin{cases}\delta_{ij}, & i=k, \quad j\neq n+1;\\ b_i, & i=k, \quad j=n+1;\\ a_{ij}^{(k-1)}, & i\neq k,\end{cases}$$

и

$$a_{ij}^{(k)}=b_{ij}^{(k)}-\frac{b_{ik}^{(k)}a_{kj}^{(k-1)}}{1+a_{kk}^{(k-1)}},\quad j>k.$$

За $k=n$ като $(n+1)$-ви стълб на A_n се получава векторът $x=A^{-1}b$, което представлява решението на системата $Ax=b$.

При последните две схеми успоредно с решението на системата може да се намери и обратната матрица A^{-1}.

Разгледаната схема изисква $(n^3+3n^2+4n)/2$ събирания, $(n^3+4n^2+n)/2$ умножения и n деления.

2.2. Клетъчни модификации

2.2.1. Първа схема. Предполагаме, че матрицата A е разделена на p^2 на брой q-мерни квадратни клетки, а b — на p клетки B_l от вида $q\times 1$.

Нека A_k е матрицата, въведена в (2.1), а $L_j^{(k)}$ е j-тият клетъчен стълб на A_k^{-1}. Нека освен това $x^{(0)}=b$ и $A_k x^{(k)}=b$. Тогава векторът $x=A^{-1}b$, както при обикновената схема, може да се получи с помощта на формулите

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-L_k^{(k-1)}(E_q+V_kL_k^{(k-1)})^{-1}V_kx^{(k-1)}$$

и

$$L_j^{(l)}=L_j^{(l-1)}-L_l^{(l-1)}(E_q+V_lL_l^{(l-1)})^{-1}V_lL_j^{(l-1)}$$

за $k=1,\ 2,\dots,\ p;\ l=1,2,\dots,\ p-1;\ j>l.$

Ако е необходимо, може да се пресметне и A^{-1}.

Тази схема изисква $\frac{2n}{3}q^2+\frac{3n+2n^2}{2}q+\frac{2n^3+3n^2+12n}{6}$ събирания, $\frac{2n}{3}q^2+(n^2+3n)q+\frac{2n^3+9n^2+3n}{6}$ умножения, n деления и $(5p^3+18p^2+7p-12)/6$ обръщания към външната памет.

2.2.2. Втора схема. Както при съответната обикновена схема, така и тук построяваме редицата от матрици

$$A_0,\ B_1,\ A_1,\dots,\ B_p,\ A_p,$$

където

$$A_0=(A-E|Ab-b)=(A_{ij}^{(0)}),\quad B_k=(B_{ij}^{(k)}),\quad A_k=(A_{ij}^{(k)}),$$

като $i=1,\ 2,\dots,\ p;\ j=k+1,\dots,\ p+1;\ k=1,\ 2,\dots,\ p$ и

$$B_{ij}^{(k)}=\begin{cases}\delta_{ij}^{(q)}, & i=k,\quad j\neq p+1;\\ B_k, & i=k,\quad j=p+1;\\ A_{ij}^{(k-1)}, & i\neq k,\end{cases}$$

и

$$A_{ij}^{(k)}=B_{ij}^{(k)}-B_{ik}^{(k)}(E_q+A_{kk}^{(k-1)})^{-1}A_{kj}^{(k-1)},\quad j>k.$$

Решението се получава като последен стълб на A_p.

Таблица 1

$n=pq$	q	T_0	T		$\tilde{a}_{ij}$		a_{ij}		$\varrho(U)$
					$i=j$	$i\neq j$	$i=j$	$i\neq j$	
70	5	8	25	0,5	1,014285	0,01428571	1,014285	0,01428571	2
70	5	8	25	0,9999	143,8465	142,8465	143,842	142,842	10^4
70	5	8	25	0,99999	1429,680	1428,680	1429,4	1428,4	10^5
100	4	18	32	0,5	1,009999	0,01000000	1,01000000	0,01000000	2
100	4	18	32	0,999	10,98990	9,989900	10,99000	9,990000	10^3
100	4	18	35	0,99999	1000,456	999,4563	1000,99	999,99	10^5
100	5	18	37	0,5	1,009999	0,009999999	1,010000	0,01000000	2
150	5	56	85	0,5	1,006666	0,006666666	1,006666	0,006666666	2
150	6	56	95	0,5	1,006666	0,006666666	1,006666	0,006666666	2
200	8	134	226	0,5	1,004999	0,005000000	1,005000	0,005000000	2
272	8	338	420	0,5	1,003676	0,003676470	1,003676	0,00367647	2
340	10	580	785	0,5	1,002941	0,002941176	1,00291	0,00291	2

Тази модифицирана схема изисква $\left(nq^2+nq+n^3+5n^2+8n-\frac{2n^2}{q}\right)/2$ събирания, $(nq^2+2nq+n^3+6n^2)/2$ умножения, n деления и $(3p^3+2p^2+p)/2$ обръщания към външната памет.

При последните две схеми се предполага, че в оперативната памет има поне $3q^2+n$ свободни клетки.

В Математическия институт с Изчислителен център при БАН бе изработена експериментална стандартна програма, реализираща обобщената схема на Ершов за обръщане на матрици. Чрез тази програма в частност се обръщат матрици от вида $A=E-\alpha ww'$ и от ред n, където $w=(1/\sqrt{n}, 1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})'$, а α е произволен числов параметър. Тези матрици са интересни с това, че

$$A^{-1}=E-\frac{\alpha}{\alpha-1}ww'.$$

В приложената табл. 1 с n е означен редът на матрицата, с q — редът на една клетка, с T_0 — времето в минути, необходимо за обръщане на матрицата по обикновената схема на Ершов, с T — времето за пресмятане по обобщената схема. Пресметнатите стойности на елементите на A^{-1} са означени с $\tilde{a}_{ij}$, а с a_{ij} са означени приближените им стойности, всичките цифри на които са верни. В последния стълб са числата на Тод за обусловеност на матрицата. От таблицата се вижда, че с обобщената схема на Ершов е възможно ефективно по отношение на време и точност да се обръщат големи матрици, стига те да са добре обусловени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов, А. П. Об одном методе обращения матриц. Доклады АН СССР, 100 (1955), 209—211.
2. Фаддеев, Д. К. и В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1963.

Постъпила на 5. I. 1970 г.

О МЕТОДЕ ПОПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ И РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Милко Петков

(*Резюме*)

Приводится более полный анализ метода пополнения как для обращения матриц, так и для решения систем линейных уравнений. Исследуется применимость этого метода, дается число арифметических операций, а при соответствующих клеточных модификациях — и число обращений к внешней памяти данной электронной машины.

ON ONE METHOD FOR MATRIX INVERSION AND FOR THE SOLUTION OF LINEAR SYSTEMS

Milko Petkov

(Summary)

A method for matrix inversion and for the solution of systems of linear equations is considered more thoroughly. The applicability of this method is examined, the number of arithmetic operations as well as the number of access to external storage of a peculiar computer after making the corresponding cell modifications are given.