БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

β-НЕПРЕКЪСНАТОСТ НА ОПТИМАЛНОТО УПРАВЛЕНИЕ КАТО ФУНКЦИЯ НА НАЧАЛНОТО СЪСТОЯНИЕ

Тодор Гичев

В тази работа се изучава зависимостта от началното състояние на оптималното управление, привеждащо за най-кратко време управляемия обект от състояние x_0 в началото O на координатната система. Предполага се, че движението на обекта се описва със система линейни диференциални уравнения

$$\dot{x} = Ax + u,$$

където:

фазовата траектория $x(t)$ лежи в n-мерното евклидово пространство $E^n = (Ox_1, x_2, \ldots, x_n)$, а управляващият параметър u принадлежи на изпъкналия многостен $U \subset E^n$, като при това началото на координатната система принадлежи на U, но не е негов връх;

допустимо управление е всяка частично-непрекъсната функция $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, със стойности в U, непрекъсната отдясно в точките на прекъсване и непрекъсната в краищата на интервала.

Освен това се предполага изпълнено условието за общо положение.

А ето и някои резултати от теорията на управлението на такива обекти, които ще бъдат използвани по-нататък, дадени, както и горната постановка, според [1].

Когато е изпълнено условието за общо положение, принципът за максимума е достатъчно условие за оптималност и единственото оптимално управление $u(t)$ удовлетворява равенството

$$\psi(t)u(t) = \max_{u \in U} \psi(t)u, \tag{1}$$

където $\psi(t)$ е нетривиално решение при подходящо начално условие на системата

$$\dot{\psi}(t) = -A^* \psi(t) \tag{2}$$

с матрица A^*, траспонирана на A.

Област на управляемост се нарича множеството от всички точки на фазовото пространство, от които е възможно с помощта на допустимо управление да се достигне в началото. Областта на управляемост означаваме с D.

Според теорема 2.15 [1] D е изпъкнало множество и за всяка точка $x_0 \in D \subset E^n$ съществува оптимално управление, привеждащо x_0 за най-кратко време в началото на координатната система.

Сфера на достигане за време $T > 0$ се нарича множеството от всички точки, принадлежащи на D, от които за време T може да се достигне началото на координатната система. Означаваме я с V_T. Това множество е изпъкнало, затворено и ограничено. Неговият контур означаваме с Σ_T. Той се състои само от онези точки на V_T, от които не може да се достигне началото за време, по-малко от T.

За всяко $x \in \Sigma_T$ съществува опорна хиперравнина H към множеството V_T в точката x. Онова от полупространствата, на които H разделя пространството, което не съдържа вътрешни точки от V_T, да наречем положително, а другото — отрицателно. Множеството от нормалните вектори на H с норма, ненадминаваща единица, и насочени в положителното полупространство да означим с n_H. Ако Q_x е множеството от всички опорни за V_T в точката x хиперравнини, то да означим

$$Z(x) = \bigcup_{H \in Q_x} n_H, \quad N(x) = Z(x) \cap S,$$

където S е множеството от единичните вектори в E^n.

Въобще ако през една точка прекараме хиперравнина H_p, нормална на ненулевия вектор p, то положително спрямо H_p ще наричаме полупространството, в което сочи векторът p, а другото — отрицателно.

Зависимостта на оптималното управление от началното състояние ще бъде формулирана в термините на β-непрекъснатостта.

Най-напред ще дадем дефиниция за β_p-отклонение. Тази дефиниция е получена в резултат на заимстване на различни понятия и дефиниции, използвани при изследването на други въпроси.

Дефиницията за полуотклонение на едно подмножество от друго подмножество на едно и също метрично пространство е въведена в [3], а е използвана и в [4]. Когато се държи сметка както за полуотклонението на едното подмножество от другото, така и за полуотклонението на второто от първото, се достига до дефинираното в [5] разстояние между две множества.

Разстоянието от [5] е послужило за основа на дефинираното в [2] хаусдорфово разстояние между две функции.

Дефиниция 3 от настоящата работа е един частен случай на дефинираното в [3] и [4] полуотклонение. Тя определя отклонението на една векторна функция от друга.

Нека f и g са две векторни функции и β-отклонението на една функция от друга се дефинира като отклонение на допълнената графика на първата от допълнената графика на втората. Тогава ако β-отклонението на f от g според тази дефиниция е l_1, а на g от f е l_2, то $l \quad \max\{l_1, l_2\}$ е хаусдорфовото разстояние според [6] между f и g.

За всяко допустимо управление $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots u_n(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, са изпълнени неравенствата

$$U_i \leq u_i(t) \leq U_i^+, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

където

$$U_i^- = \min_{u_i \in U_i} u_i, \quad U_i^+ = \max_{u_i \in U_i} u_i,$$

а U_i е проекцията на многостена U върху координатната ос Ox_i.

Ако $f(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, е ограничена скаларна функция, според [2] под допълнена графика $\bar{f}$ на $f(t)$ се разбира множеството от точките (t, x), за които

$$t \in [t_0, t_1], \; I_f(t) \leq x \leq S_f(t),$$

където $S_f(t)$ и $I_f(t)$ са съответно долната и горната функция на Бер за $f(t)$:

$$S_f(t) = \lim_{\lambda \to 0} \sup_{|t-t'| \leq \lambda} f(t'),$$

$$I_f(t) = \lim_{\lambda \to 0} \inf_{|t-t'| \leq \lambda} f(t').$$

За произволен вектор p с $\psi(t, p)$, $t \in [0, T]$, да означим решението на системата (2) с начално условие $\psi(0, p) = -p$. Нека $u(t, p)$, $t \in [0, T]$, е едно допустимо управление, което удовлетворява условието за максимума (1), в което функцията $\psi(t)$ е заместена с $\psi(t, p)$. Множеството от точките $\theta_{pi} \in [0, T]$, в които $u(t, p)$ не се определя еднозначно от (1), да означим с $\bar{\theta}_p$. Полагаме

$$\theta_p = \bar{\theta}_p \cup \{0\} \cup \{T\}.$$

Според теорема 2.10 [1] $\bar{\theta}$, а следователно и θ_p, е съставено от краен брой точки.

Множеството θ_p и функцията $u(t, p)$ да наречем съответни на вектора p в интервала $[0, T]$.

Дефиниция 1. Ако $u_i(t, p)$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, са компонентите на определената по-горе векторна функция $u(t, p)$, то под θ_p-допълнена графика $\bar{u}_i^p$ на $u_i(t, p)$ ще разбираме множеството от точките (t, x_i) за които

когато $t \in [0, T]$ и $t \bar{\in} \theta_p$, $x_i = u_i(t, p)$,

а когато $t \in \theta_p$, $x_i \in [U_i^-, U_i^+]$.

Дефиниция 2. Под θ_p-допълнена графика (допълнена графика $\bar{u}$) $\bar{u}^p$ на $u(t, p)$ ще разбираме множеството от точките $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за които $(t, x_i) \in \bar{u}_i^p$ $((t, x_i) \in \bar{u}_i)$, където $\bar{u}_i^p$ е θ_p-допълнената ($\bar{u}_i$ е допълнената) графика на $u_i(t, p)$.

Дефиниция 3. Ако $u^*(t) = (u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, е допустимо управление, то под β_p-отклонение на $u^*(t)$ от $u(t, p)$ ще разбираме числото

$$\beta_p(u^*, u(t, p)) = \max\{\bar{\beta}_p(u_1^*, u_1), \bar{\beta}_p(u_2^*, u_2), \ldots, \bar{\beta}_p(u_n^*, u_n)\},$$

където

$$\bar{\beta}_p(u_i^*, u_i) = \max_{(t_1, x_i) \in \bar{u}_i^*} \min_{(t_2, y_i) \in \bar{u}_i^p} \max\{|t_1 - t_2|, |x_i - y_i|\},$$

а $\bar{u}_i^*$ е допълнената графика на $u_i(t)$ и $\bar{u}_i^p$ е θ_p-допълнената графика на $u_i(t, p)$.

Нека $z=(t_1, x_1, \ldots, x_n) \in u^p$. С $K_\delta(z)$ да означим множеството от точките $(\tau, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, за които

$$\tau \in [t-\delta,\ t+\delta],$$

$$y_i \in [x_i-\delta,\ x_i+\delta] \cap [U_i^-,\ U_i\ ],\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Под хаусдорфова δ_p-околност на $u(t, p)$ ще разбираме множеството

$$W^p(u, \delta)=\bigcup_{z \in u^p} K_\delta(z).$$

Лема 1. Ако $u^*(t)=(u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t))$, $t \in I=[t_0, t_1]$, е допустимо управление и ако за всяко $t \in I$ точката $(t, u^*(t)) \in W^p(u, \delta)$, то

$$\beta_p(u^*, u(t, p)) \leqq \delta.$$

Доказателство. Тъй като за всяко $t \in I$ точката $(t, u^*(t)) \in W^p(u, \delta)$, то ще съществува точка $(\tau^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in u^p$ такава, че

$$t \in [\tau^0-\delta,\ \tau^0+\delta],$$

$$u_i^*(t) \in [x_i^0-\delta,\ x_i^0+\delta].$$

По-нататък, както в лема 5 [2] се доказва, за всяко i, $1 \leqq i \leqq n$, ще имаме

$$\beta_p(u_i^*, u_i) \leqq \delta.$$

Следователно и

$$\beta_p(u^*, u(t, p)) \leqq \delta.$$

С това теоремата е доказана.

Ако p_1 и p_2 са два вектора, принадлежащи на E^n, да означим със $\sigma(p_1, p_2)$ елементарно-геометричния ъгъл между тях, а с $p_1 p_2$ — скаларното им произведение.

Лема 2. За всяко $x \in D$, $x \neq 0$, множеството $Z(x)$ е изпъкнало, а $N(x)$ е компактно и

$$\max_{p, q \in N(x)} \sigma(p, q) < \pi.$$

Доказателство. Нека $x_0 \in \Sigma_T$, а $p_1 \in Z(x_0)$ и $p_2 \in Z(x_0)$. Съответните им опорни хиперравнини означаваме с H_1 и H_2.

За простота при доказателството на тази лема ще предполагаме, че работим с координатна система с начало точката x_0.

Тогава за всички точки z' от отрицателното спрямо H_1 полупространство ще бъде изпълнено $p_1 z' \leqq 0$, а за всички точки z'' от отрицателното спрямо H_2 полупространство — $p_2 z'' \leqq 0$. Но V_T принадлежи както на отрицателното спрямо H_1 полупространство, също така и на отрицателното спрямо H_2. Тогава за всяко $y \in V_T$ ще бъде изпълнено

$$p_1 y \leqq 0,$$

$$p_2 y \leqq 0.$$

За хиперравнината H^*, минаваща през x_0, с нормален вектор

$$p^* = \alpha p_1 + (1-\alpha) p_2,\ \alpha \in [0, 1],$$

въз основа на горните неравенства ще бъде изпълнено за всяко $y \in V_T$

$$p^*y = (ap_1 + (1-a)p_2)y = ap_1 y + (1-a)p_2 y \leq 0.$$

Следователно всички точки на V_T лежат в отрицателното спрямо H^* полупространство. Но тъй като x_0 е обща точка за V_T и H^*, то H^* е опорна за V_T в точката x_0 и p^* е нормален вектор, лежащ в полупространството, несъдържащо вътрешна за V_T точка. Освен това

$$|p^*| = |ap_1 + (1-a)p_2| \leq a|p_1| + (1-a)|p_2| \leq 1.$$

Всичко това е достатъчно да твърдим, че $p^* \in Z(x_0)$. Оттук следва изпъкналостта на $Z(x_0)$.

Да допуснем, че множеството $N(x_0)$ не е затворено. Тогава ще съществува единичен вектор p, който принадлежи на контура на $N(x_0)$, но не принадлежи на $N(x_0)$.

Нека g е произволен единичен вектор от $Z(x_0)$ и G е съответната му опорна към V_T в x_0 хиперравнина.

Тъй като $p \in \bar{N}(x_0)$, то хиперравнината H, минаваща през x_0 и нормална на p, няма да бъде опорна за V_T в x_0.

С V_T^+ да означим частта от V_T, която се намира в положителното спрямо H полупространство.

Произволна вътрешна за V_T^+ точка z ще принадлежи на отрицателното спрямо G и на положителното спрямо H полупространство. Следователно ще бъдат изпълнени неравенствата

$$gz < 0,$$
$$pz > 0.$$

Тогава векторът $q = \alpha g + (1-\alpha)p$, където

$$a = \frac{pz}{pz - gz}, \quad 0 < a < 1,$$

ще принадлежи на $Z(x_0)$, тъй като $Z(x_0)$ е изпъкнало множество.

От друга страна, нормалната на q хиперравнина през x_0 ще съдържа вътрешната за V_T точка z, понеже

$$qz = [ag + (1-a)p]z = agz + (1-a)pz$$
$$= \frac{(pz)gz}{pz - gz} + pz - \frac{(pz)pz}{pz - gz} = \frac{pz}{pz - gz}(gz + pz - gz - pz) = 0.$$

Достигнатото противоречие се дължи на допускането, че множеството $N(x_0)$ не е затворено. С това е доказана затвореността му, а от нея следва и компактност, понеже $N(x_0)$ е ограничено множество.

Накрая за доказателството на последната част от твърдението на лемата да допуснем, че съществува двойка вектори p и q от $N(x_0)$, така че $\sigma(p, q) = \pi$. Тогава ще бъде изпълнено $p = -q$.

Тъй като началото на координатната система е вътрешна точка за V_T, ако с x_0 означим радиус-вектора на точката x_0 спрямо началото, ще бъдат изпълнени неравенствата

$$px_0 > 0,$$
$$qx_0 > 0.$$

Сега горните неравенства добиват вида

$$qx_0>0,$$

$$qx_0>0.$$

Полученото противоречие доказва верността на последната част от лемата.

Да разгледаме съответствието $V[x]$, което на всяка точка $x \in D$ съпоставя единственото оптимално управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, привеждащо x в началото за най-кратко време. Ако за различните вектори $p \in N(x)$ с $V_p[x]$ означим $u(t, p)$, $t \in [0, T]$, то тогава $V[x]=V_p[x]$, тъй като при различните вектори $p \in N(x)$ оптималното управление се определя по единствен начин от (1) като допустима частично-постоянна функция. Различието се състои само в това, че на различните вектори $p \in N(x)$ съответствуват евентуално различни множества θ_p.

Дефиниция 4. Ако $x \in D$ и $u(t)$, $t \in [0, T]$, е оптималното управление, привеждащо x в началото на координатната система, а $u^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ е произволно допустимо управление, то под β-отклонение на $u^*(t)$ от $u(t)$ ще разбираме числото

$$\beta(u^*, u)=\min_{p \in N(x)} \beta_p(u^*, u(t, p)).$$

Дефиниция 5. При предположенията за $u(t)$ от дефиниция 4 за редицата $\{u^l(t)\}_{l=1}^{\infty}$, $t \in [0, T]$, от допустими управления ще казваме, че е β-сходяща към $u(t)$, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува индекс ν такъв, че винаги когато $l>\nu$, да бъде изпълнено

$$\beta(u^l, u)<\varepsilon.$$

Дефиниция 6. Дефинираното по-горе съответствие $V[x]$ ще наричаме β-непрекъснато в точката $x_0 \in D$, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че винаги когато $x \in D$ и $|x-x_0|<\delta$, да бъде изпълнено

$$\beta(u, u^0)=\min_{p \in N(x_0)} \beta_p(u(t), u^0(t, p))<\varepsilon,$$

където $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, е съответното на x оптимално управление, а $u^0(t)$ $t \in [0, T]$, — съответното на x_0.

Основният резултат на тази работа се формулира като следната

Теорема 1. Съответствието $V[x]$ е β-непрекъснато във всяка точка $x \in D$.

За доказването на тази теорема ще са необходими няколко твърдения, които ще бъдат доказани най-напред във вид на две леми.

Лема 3. Ако V е изпъкнало, затворено множество, съдържащо се строго във V_T, то съществува $\delta>0$, така че когато $0 \leq T-t<\delta$, ще бъде изпълнено включването $V \subset V_t$.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че когато $0 \leq T-t<\delta$, да бъде изпълнено

$$\max_{z \in \Sigma_T} \min_{y \in \Sigma_t} \varrho(z, y)<\varepsilon.$$

Тук, както и по-нататък в тази работа, с $\varrho(z, y)$ е означено евклидовото разстояние между точките z и y.

При доказателството на това твърдение ще използваме доказателството на лема 2.17 [1].

Нека $\frac{T}{2}<t<T$. Произволна точка $x''\in\Sigma_T$ съединяваме с началото на координатната система O. Отсечката $x''O$ пресича Σ_t в точката x'.

Избираме положителното число R такова, че сферата с център O и радиус R да се съдържа изцяло в $V_{T/2}$.

Разстоянието от началото O до x' означаваме с $\varphi(x')$, а до x'' — с $\varphi(x'')$.

Ако N е една горна граница за $|\dot{x}|$, когато $x\in V_T$ и $u\in U$, както в споменатата по-горе лема се доказва, че

$$\varphi(x'')-\varphi(x')<\frac{N}{R}\varphi(x'')(T-t).$$

При $\lambda = \max\limits_{x''\in\Sigma_T}\varphi(x'')$

$$\varphi(x'')-\varphi(x')<\frac{\lambda N}{R}(T-t). \tag{3}$$

Но

$$\min_{y\in\Sigma_t}\varrho(x'',y)\leqq\varphi(x'')-\varphi(x')$$

и понеже оценката (3) не зависи от избора на $x''\in\Sigma_T$, то

$$\max_{x''\in\Sigma_T}\min_{y\in\Sigma_t}\varrho(x'',y)<\frac{\lambda N}{R}(T-t).$$

Ако изберем $\delta=\min\left\{\frac{R\varepsilon}{\lambda N},\frac{T}{2}\right\}$, то винаги когато $0\leqq T-t<\delta$, ще бъде изпълнено $0\leqq T-t<\frac{T}{2}$ и

$$\max_{x''\in\Sigma_T}\min_{y\in\Sigma_t}\varrho(x'',y)<\frac{\lambda N}{R}\delta\leqq\frac{\lambda N}{R}\frac{R\varepsilon}{\lambda N}=\varepsilon.$$

Това в същност е помощното твърдение.

Да означим с ε_0 положителното число,

$$\varepsilon_0=\min_{z\in\Sigma_T}\min_{y\in\Sigma}\varrho(z,y),$$

където Σ е контурът на V.

Според доказаното по-горе твърдение за ε_0 може да се намери $\delta>0$, така че когато $0\leqq T-t<\delta$, да бъде изпълнено

$$\max_{z\in\Sigma_T}\min_{y\in\Sigma_t}\varrho(z,y)<\varepsilon_0=\min_{z\in\Sigma_T}\min_{y\in\Sigma}\varrho(x,y).$$

С това лемата е доказана.

Ако N_1 и N_2 са две компактни множества от n-мерни вектори, то полагаме

$$\gamma(N_1,N_2)=\min_{p\in N_1}\min_{q\in N_2}\sigma(p,q).$$

Лема 4. За $x_0 \in D$, x_0 различно от началото, и за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че за $x \in D$ и $|x-x_0|<\delta$ е в сила

$$\gamma(N(x), N(x_0))<\varepsilon.$$

Доказателство. Според лема 2 за $t>0$, когато $x_0 \in \Sigma_t$, множеството $Z(x_0)$ е изпъкнало, а $N(x_0)$ е затворено и

$$0 \leqq \sigma_0 = \max_{p,\, q \in N(x_0)} \sigma(p, q) < \pi.$$

Избираме произволно положително число ε.

Нека K^* е множеството от ненулевите вектори p с норма, ненадминаваща единица, за които

$$\gamma(p, N(x_0)) \quad \varepsilon_0,$$

където $\varepsilon_0 = \min \left\{\varepsilon, \frac{\pi - \sigma_0}{4}\right\}$.

Тогава за всеки два ненулеви вектора, принадлежащи на K^*, ще бъде изпълнено

$$\sigma(p_1, p_2) \leqq \sigma(p_1, \bar{p}_1) + \sigma(\bar{p}_1, \bar{p}_2) + \sigma(\bar{p}_2, p_2)$$
$$\leqq 2\frac{\pi - \sigma_0}{4} + \sigma_0 = \frac{1}{2}(\pi + \sigma_0) < \pi,$$

където $\bar{p}_1 \in N(x_0)$ и $\bar{p}_2 \in N(x_0)$ са такива вектори, че

$$\sigma(p_1, \bar{p}_1) = \gamma(p_1, N(x_0)), \quad \sigma(\bar{p}_2, p_2) = \gamma(p_2, N(x_0)).$$

Предполагаме, че $x_0 \in \Sigma_T$. Ако K е множеството от векторите, принадлежащи на K^*, за които $\gamma(p, N(x_0)) = \varepsilon_0$, то през x_0 построяваме хипер равнината H_p с нормален вектор p. Тъй като $\bar{p} \in Z(x_0)$, то H_p ще пресича V_T.

Ако μ_p е максималното разстояние от H_p до частта от Σ_T, намираща се в положителното спрямо H_p полупространство, то означаваме

$$\mu = \min_{p \in K} \mu_p.$$

От компактността на K следва, че $\mu>0$, понеже $\mu_p>0$.

В положителното спрямо H_p полупространство за всяко $p \in K$ прекарваме хиперравнината H_p^*, успоредна на H_p, най-отдалечената точка на Σ_T^+ от която е на разстояние $\mu/2$, където Σ_T^+ е частта от Σ_T, намираща се в положителното спрямо H_p^* полупространство.

В V_T вписваме изпъкналото множество V, така че всички точки от контура Σ на V да се намират на разстояние $\frac{\mu}{2}$ от Σ_T.

Според лема 3 съществува $\zeta>0$, така че когато $0<T-t<\zeta$, ще бъде в сила включването $V \subset V_t$. Фиксираме едно такова t_0.

С δ означаваме положителното число

$$\min_{z \in \Sigma_T} \min_{y \in \Sigma_{t_0}} \varrho(z, y).$$

Около точката x_0 описваме сфера Q с радиус r, $0<r<\delta$. Тя лежи в отрицателното спрямо H_p^* полупространство за всяко $p \in K$ и няма общи точки с V_{t_0}.

Ще докажем, че ако $y \in Q$, т. е. $|y-x_0|<\delta$, е изпълнено неравенството

$$\gamma(N(y),\ N(x_0)) \leq \varepsilon_0.$$

Да допуснем, че съществува $y \in Q$, $y \in \Sigma_{T'}$, така че за всеки вектор $q \in N(y)$ имаме

$$\gamma(q,\ N(x_0)) > \varepsilon_0. \tag{4}$$

При по-нататъшното доказателство на лемата ще предполагаме, че радиус-векторите на различните точки са взети спрямо координатна система с начало точката y.

Избираме един вектор $q \in N(y)$ със свойството (4). От горното неравенство следва, че той няма да принадлежи на K^*.

С H_q да означим опорната към $V_{T'}$ в точката y хиперравнина с нормален вектор q. Всички вътрешни точки на $V_{T'}$ лежат в отрицателното спрямо H_q полупространство. Понеже $V \subset V_{t_0} \subset V_{T'}$, за точката $t_p \in V \cap H_p^*$, $p \in K$, ще бъде в сила

$$qt_p < 0. \tag{5}$$

Нека s е произволен вектор от $N(x_0)$ и съответната му нормална хиперравнина в точката x_0 е H_s. Но ако в y построим хиперравнината H_s^*, успоредна на H_s, понеже паралелният пренос е на разстояние, помалко от $\frac{\mu}{2}$, то хиперравнината H_s^* няма да пресича множеството V_{t_0} и точката t_p ще бъде в отрицателното спрямо H_s^* полупространство. Следователно за всяко $p \in K$

$$st_p < 0. \tag{6}$$

От (5) и (6) заключаваме, че

$$\varphi(s,\ q) < \pi.$$

Тъй като s принадлежи на K^*, а q не принадлежи, то ще съществува число γ_0, $0<\gamma_0<1$, така че векторът

$$m = \gamma_0 s + (1-\gamma_0)\, q \tag{7}$$

ще принадлежи на K.

За вектора m построяваме нормалната хиперравнина H_m в X_0 и успоредната на нея H_m^* през y. Тъй като транслацията е на разстояние, помалко от $\mu/2$, то точката $t_m \in V \cap H_m^*$ ще продължава да лежи в положителното спрямо H_m^* полупространство и ще бъде изпълнено неравенството

$$mt_m > 0.$$

Хиперравнината, прекарана през y и нормална на вектора

$$n^* = aq + (1-a)m \tag{8}$$

с $a = \frac{mt_m}{mt_m - qt_m}$, $0<a<1$, минава през t_m, защото

$$n^* t_m = \frac{mt_m}{mt_m - qt_m} \cdot qt_m + \left(1 - \frac{mt_m}{mt_m - qt_m}\right) mt_m = 0. \tag{9}$$

Полученото от (7) представяне на q

$$q=\frac{m-\gamma_0 s}{1-\gamma_0}$$

заместваме в (8) и получаваме

$$n^*=a\frac{m-\gamma_0 s}{1-\gamma_0}+(1-a)m=\left(1-\frac{a\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)m-\frac{a\gamma_0}{1-\gamma_0}s=\delta_m+(1-\delta)s,$$

където $\delta=1+\frac{a\gamma_0}{1-\gamma_0}>1.$

Но точката t_m принадлежи и на хиперравнината през y с нормален вектор

$$l=\beta m+(1-\beta)s$$

с $\beta=\frac{st_m}{st_m-mt_m}$, $0<\beta<1$, понеже $lt_m=0$.

Означаваме $\lambda=\delta-\beta>0$.

Тогава използвайки полученото по-горе представяне за n^*, получаваме

$$n^*t_m=(\delta m+(1-\delta)s)t_m=(\lambda+\beta)t_m$$

$$+(1-\beta-\lambda)\,st_m=\beta mt_m+(1-\beta)st_m+\lambda(mt_m-st_m).$$

Но тъй като $lt_m=0$, а $\lambda(mt_m-st_m)>0$, достигаме до $n^*t_m>0$, което противоречи на (9).

Достигнатото противоречие се дължи на допускането, че съществува точка $y\in Q$ такава, че за всеки вектор $q\in N(y)$ е изпълнено (4).

Следователно за всяко $x\in Q$

$$\gamma(N(x),\ N(x_0)\leqq\varepsilon_0<\varepsilon.$$

С това лемата е доказана.

А сега да преминем към доказателството на теорема 1.

Нека $x_0\in D$, $x_0\neq 0$, и $u^0(t)$, $t\in[0,T]$, е оптималното управление, привеждащо x_0 в началото. За $p\in N(x_0)$ и за всяко $t\in[0,T]$ е изпълнено равенството

$$u^0(t)=u^0(t,p).$$

За произволна точка $x\in D$ нека $u(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, е оптималното управление, привеждащо x в началото.

Избираме произволно положително число ε.

За доказването непрекъснатостта в точката x_0 според дефиниция 6 е необходимо да се покаже, че съществува $\delta>0$, така че винаги когато $x\in D$ и $|x-x_0|<\delta$, е изпълнено

$$\beta(u,u^0)=\min_{p\in N(x_0)}\beta_p(u,u^0(t,p))<\varepsilon.$$

Ако $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon, T/2\}$, то с δ_1 означаваме следното положително число:

$$\delta_1=\min\left\{\min_{x_0\in\Sigma_T}\ \min_{z\in\Sigma_{T+\varepsilon_1}}\varrho(x_0,z),\ \min_{x_0\in\Sigma_T}\ \min_{z\in\Sigma_{T-\varepsilon_1}}\varrho(x_0,z)\right\}.$$

Нека за $p \in N(x_0)$ и $t \in [0, T]$, $\theta_p = \{\theta_{p_1}, \theta_{p_2}, \ldots, \theta_{p_l}\}$, $\theta_{p_k} < \theta_{p_{k+1}}$, а ε^p, $0 < \varepsilon^p < \varepsilon_1$, е толкова малко, че интервалите $[\theta_{p_k} - \varepsilon^p, \theta_{p_k} + \varepsilon^p]$ нямат общи точки. Полагаме $\tau_k^p = [\theta_{p_k} + \varepsilon^p, \theta_{p_{k+1}} - \varepsilon^p]$ за $k = 1, 2, \ldots, (l-1)$.

Във всеки от интервалите τ_k^p функцията $u^0(t, p)$ е постоянна. Ако $t \in \tau_k^p$, то $u(t, p) = e_k$, където e_k е един от върховете на многостена U. За всички останали върхове e^ν на U и за всяко t от същия интервал ще бъде в сила неравенството

$$\psi(t, p)\, u(t, p) = \psi(t, p)\, e_k > \psi(t, p)\, e^\nu$$

Функциите

$$F_{\nu k}(t, p) = \psi(t, p)\, e_k - \psi(t, p)\, e^\nu$$

са непрекъснати и положителни при фиксирано $p \in N(x_0)$ за всички $t \in \tau_k^p$.

Следователно съществува положителна константа η_p, така че за всяко ν и всяко $t \in \tau_k^p$

$$F_{\nu k}(t, p) = \psi(t, p)\, e_k - \psi(t, p)\, e^\nu \geqq \eta_p,$$

като за всички интервали τ_k^p константата е една и съща.

Ако $\eta = \min\limits_{p \in N(x_0)} \eta_p$, $\eta > 0$ и за всяко $p \in N(x_0)$ конструираме съответните функции $F_{\nu k}(t, p)$ в зависимост от точките, принадлежащи на θ_p, то в интервалите τ_k^p при съответния връх e_k, в който се достига максимумът в (1) и всички останали върхове на многостена U, ще бъде изпълнено

$$F_{\nu k}(t, p) > \eta.$$

От друга страна, функциите $F_{\nu k}(t, p)$ са равномерно непрекъснати в компактното декартово произведение $[0, T] \times S$, където S е единичната сфера в E^n, защото $\psi(t, p)$ е решение на система линейни диференциални уравнения с постоянни коефициенти, което зависи непрекъснато от началното условие. Следователно съществува $\xi > 0$, така че винаги когато $p' \in S$ и $p'' \in S$

$$\sigma(p', p') < \xi,$$

за всяко $t \in [0, T]$ ще бъде в сила

$$|F_{\nu k}(t, p') - F_{\nu k}(t, p'')| = |(\psi(t, p') - \psi(t, p''))(e_k - e^\nu)| < \frac{\eta}{2}$$

за всички двойки върхове на U.

Според лема 4 за $\xi > 0$ съществува $\delta > 0$, $\delta \leqq \delta_1$, така че когато $x \in D$ и $|x - x_0| < \delta$, да бъде изпълнено неравенството

$$\gamma(N(x), N(x_0)) < \xi.$$

Това неравенство означава, че съществуват вектори $p \in N(x)$ и $q \in N(x_0)$ за които

$$\sigma(p, q) = \gamma(N(x), N(x_0)) < \xi.$$

Тогава

$$|F_{\nu k}(t, p) - F_{\nu k}(t, q)| = |(\psi(t, p) - \psi(t, q))(e_k - e^\nu)| < \frac{\eta}{2}.$$

Но тъй като $q \in N(x_0)$, ако с $\{\tau_k^q\}$ означим интервалите, които се получават като съответни на θ_q чрез описаната по-горе конструкция, то за $t \in \tau_k^q$ ще бъде изпълнено

$$\psi(t, q)(e_k - e^{\nu}) > \eta.$$

От горните две неравенства получаваме за $t \in \tau_k^q$

$$\psi(t, p)(e_k - e^{\nu}) > \psi(t, q)(e_k - e^{\nu}) - \frac{\eta}{2} > \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}$$

Но това означава, че за $t \in \tau_k^q$ оптималното управление, привеждащо x в началото на координатната система, съвпада с $u^0(t)$.

От друга страна, каквото и да бъде оптималното управление $u(t)$ за $t \in [\theta_k - \varepsilon^q, \theta_k + \varepsilon^q]$, то ще лежи в паралелепипеда

$$\tau \in [\theta_k - \varepsilon^q, \theta_k + \varepsilon^q],$$

$$x_i \in [U_i^-, U_i^+].$$

Освен това от избора на δ_1 имаме, че когато $\|x - x_0\| < \delta \leq \delta_1$, оптималното време за привеждане на x в началото ще се различава от T с по-малко от ε.

Следователно оптималното управление $u(t)$, привеждащо точка $x \in D$, за която $\|x - x_0\| < \delta$, ще се съдържа в хаусдорфова ε_q-околност $W^q(\varepsilon, u^0)$ на $u^0(t, q)$.

Тогава според лема 1 ще бъде в сила

$$\beta_q(u, u^0(t, q)) < \varepsilon.$$

Оттук получаваме

$$\beta(u, u^0) = \min_{p \in N(x_0)} \beta_p(u, u^0(t, p)) \leq \beta_q(u, u^0(t, q)) < \varepsilon.$$

Директно може да се провери верността на теоремата и в случая $x_0 = 0$.

С това теоремата е доказана.

Теорема 2. За всяко $\varepsilon > 0$ и всяко $x_0 \in D$ съществува $\delta > 0$, така че когато $x \in D$ и $\|x - x_0\| < \delta$, да бъде изпълнено

$$R(x(t), x_0(t)) < \varepsilon,$$

където $x_0(t)$ е съответната на x_0 оптимална траектория, $x(t)$ съответната на x, а метричният функционал R е хаусдорфовото разстояние от (6).

Доказателство. Най-напред както в теорема 2.3 (6) може да се покаже, че за $\varepsilon > 0$ съществува $\xi > 0$, така че когато $u(t)$ е допустимо управление и

$$\beta(u, u^0) < \xi,$$

ще бъде изпълнено

$$R(x(t), x_0(t)) < \varepsilon.$$

От теорема 1 следва, че за $\xi > 0$ съществува $\delta > 0$, така че когато $x \in D$ и $\|x - x_0\| < \delta$, е изпълнено

$$\beta(u, u^0) < \xi.$$

Сега, ако $x \in D$ и $|x-x_0|<\delta$, според казаното по-горе ще бъде в сила

$$\beta(u, u^0)<\xi,$$

а следователно и

$$R(x(t), x_0(t))<\varepsilon.$$

С това теоремата е доказана.

Ако времето за привеждането на управляемия обект от $x_0 \in D$ в началото на координатната система под действието на оптималното управление $u^0(t)$ е $T>0$, то за произволен единичен вектор $p \in E^n$ да наречем съответна функцията $u(t)$, $t \in [0, T]$, получаваща се като допустимо управление по формулата

$$\psi(t, p)\,u(t) = \max_{u \in U} \psi(t, p)\,u,$$

където $\psi(t, p)$ е решение на спрегнатата система (2) с начално условие векторът $\psi(0, p) = p$.

Тогава е в сила следната

Теорема 3. Ако $\{p_l\}_{l=1}^{\infty}$ е редица от единични n-мерни вектори, клоняща към $p_0 \in N(x_0)$ и $u_l(t)$, $t \in [0, T]$, и $u^0(t)$, $t \in [0, T]$, са съответните на p_l и p_0 функции, то редицата $\{u_l(t)\}$ е β-сходяща към $u^0(t)$.

Доказателство. Избираме произволно положително число ε. Да означим с $\xi_T(p_l)$ точката, от която за време T под действието на оптималното управление $u_l(t)$ обектът преминава в началото на координатната система.

Според теорема 1 за $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че когато x принадлежи на областта на управляемост и $|x-x_0|<\delta$, ще имаме

$$\beta(u, u^0)<\varepsilon.$$

За $\delta>0$ от непрекъснатостта на съответствието $\xi_T(p)$ според лема 2.16 [1] следва, че съществува индекс ν, така че когато $l>\nu$, ще бъде изпълнено

$$|\xi_T(p)-x_0|<\delta,$$

тъй като по предположение редицата $\{p_l\}$ е сходяща към $p_0 \in N(x_0)$.

И така получаваме, че за $l>\nu$

$$\beta(u_l, u^0)<\varepsilon.$$

С това теоремата е доказана.

Една част от итерационните методи за решаване на линейната задача за най-бързо привеждане на обекта от начално състояние x_0, в началото на координатната система се свеждат до конструиране на редица $\{p_l\}_{l=1}^{\infty}$ от начални стойности за спомагателните функции $\psi(t)$, решения на системата (2), за които е изпълнено

$$\gamma(p_l, N(x_0)) \to 0,$$

когато l расте неограничено.

В частност по този начин е построен итерационният метод, даден в [1].

Смисълът на теорема 3 е, че по този начин получаваме редица от допустими управления $\{u_l(t)\}$, β-отклонението на които от $u^0(t)$ клони към нула с растенето на l.

В заключение бих искал да благодаря на проф. д-р Бл. Сендов, който при прочитането на ръкописа на настоящата работа ми обърна внимание върху необходимостта от доуточняване формулировката на теорема 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский, В. Г. Математические методы оптимального управления. Москва, 1969.
2. Сендов, Б. Некоторые вопросы теории приближения функции и множеств в хаусдорфовой метрике. — Успехи матем. наук, 24, 1969, 141—178.
3. Барбашин, Е. А. К теории обобщенных динамических систем. Ученые записки Моск. гос. унив., матем., 2, 1949, № 135.
4. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задач. Матем. сб. 61, 1963, 211—223.
5. Хаусдорфф, Ф. Теория множеств. Москва, 1936.
Гичев, Т. Върху реализацията на оптималното линейно бързодействие. Известия на Мат. инст. на БАН, 13, 1971.

Постъпила на 8. VII. 1970

β-НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КАК ФУНКЦИЯ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Тодор Гичев

(Резюме)

Рассматривается оптимальное управление, приводящее объект, движущийся по закону

$$\dot{x} = Ax+u$$

из точки x_0 фазового пространства в начало системы координат, как функция начального состояния $V[x_0]$.

Сначала дефинируется β-отклонение, а после этого дается дефиниция β-непрерывности.

В предположениях, которые уточняются в работе, доказывается основной результат в следующем виде:

Теорема 1. Соответствие $V[x]$ является β-непрерывным в любой точке области управляемости D.

Далее теорема 2 утверждает, что двум близким в евклидовом смысле точкам из D соответствуют хаусдорфово близкие оптимальные траектории.

И наконец, в теореме 3 доказывается, что при одном классе итерационных методов построения оптимального управления, приводящего фиксированную точку $x \in D$ в начало системы координат, последовательность, составленная из управляющих функций любой итерации, является β-сходящейся к оптимальному управлению, приводящему точку x в начало.

β-STETIGKEIT DER OPTIMALEN STEUERUNG ALS FUNKTION DES ANFANGSZUSTANDES

Todor Gičev

(Zusammenfassung)

Es wird die optimale Steuerung, die ein Objekt nach dem Gesetz

$$\dot{x} = Ax + u,$$

vom Punkt x_0 des Phasenraumes zum Anfang des Koordinatensystems bewegt, als Funktion des Anfangszustandes $V[x_0]$ betrachtet.

Zuerst wird die β-Abweichung definiert und danach wird die Definition der β-Stetigkeit gegeben.

Unter Voraussetzungen, die im Arbeitsprozeß präzisiert werden, wird das Grundergebnis in folgender Form bewiesen:

Theorem 1. Die Zuordnung $V[x]$ ist in jedem Punkt des Steuerungsprozesses D β-stetig.

Weiterhin behauptet Theorem 2, daß zweien im Euklidischen Sinn nahegelegenen Punkten D Hausdorff-nahe optimale Trajektorien entsprechen.

Und zum Schluß wird in Theorem 3 behauptet, daß bei einer Klasse von Iterationsmethoden für die optimale Steuerung, die den fixierten Punkt $x \in D$ zum Anfang des Koordinatensystems führt, die von den Funktionen der Iterationen zusammengesetzte Folge zu der den Punkt x zum Anfang überführenden optimalen Steuerung β-konvergent ist.