

ФИЛЬТРАЦИЯ ОБЩИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ
МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Йордан Стоянов

Пусть (θ_t, ξ_t) , $0 \leq t \leq T$, двумерный марковский процесс, где θ_t — общий скачкообразный марковский процесс, заданный своими переходными вероятностями, а ξ_t — процесс диффузионного типа. Рассматривается в байесовской постановке задача фильтрации ненаблюдаемого процесса θ по результатам наблюдений за процессом ξ . В § 1 дается точная постановка задачи. Теорема 1 утверждает, что апостериорные условные вероятности $\pi_t(U) = P\{\theta_t \in U \mid \xi_s, s \leq t\}$ удовлетворяют некоторому стохастическому дифференциальному уравнению. Доказательству посвящен § 2.

Из § 3 видно, что $\pi_t(U)$ являются достаточными статистиками в задаче оптимальной нелинейной фильтрации (теорема 2).

Оказывается, эти результаты можно обобщить на случай, когда θ и ξ сами являются многомерными процессами. Предположения и соответствующий результат (теорема 3) изложены в § 4.

§ 1. ТОЧНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ элементарных событий ω задан двумерный марковский процесс (θ_t, ξ_t) , $0 \leq t \leq T$.

Предположим, что $\theta = \{\theta_t(\omega), 0 \leq t \leq T\}$ — действительный общий скачкообразный марковский процесс с непрерывным временем t , $0 \leq t \leq T$, и со значениями в фазовом пространстве $(X, \mathcal{X})$. Заданы начальное распределение $p_0(U) = P\{\omega: \theta_0(\omega) \in U\}$, $U \in \mathcal{X}$, и переходные функции

$$p(s, x; t, U) = P\{\omega: \theta_t(\omega) \in U \mid \theta_s(\omega) = x\}, \quad s \leq t, \quad x \in X,$$

которые удовлетворяют условиям:

I. При $t \downarrow s$

$$(1) \quad \frac{p(s, x, t, U) - I_U(x)}{t - s} \longrightarrow q(s, x, U)$$

равномерно по (s, x, u) , $I_U(x)$ — индикатор множества U .

II. Функция $q(s, x, U)$ при фиксированных (x, U) непрерывна по s равномерно по (x, U) , а при фиксированных (s, x) является мерой по U на σ -алгебре $\mathcal{X}$.

Тогда ([1], стр. 403), существует положительная константа $Q < \infty$ такая, что $q(s, x, U) \leq Q$ для всех $s \in [0, T]$, $x \in X$, $U \in \mathcal{X}$. Кроме того, процесс

θ стохастически непрерывен, и, следовательно, существует [9] эквивалентный ему сепарабельный процесс, так что с самого начала θ будет считаться сепарабельным.

В предположениях I и II вероятности $p_t(U) = P\{\omega: \theta_t(\omega) \in U\}$, как хорошо известно [1], удовлетворяют прямому уравнению Колмогорова

$$(2) \quad p_t(U) = p_0(U) + \int_0^t L^* p_s(U) ds,$$

где

$$L^* p_s(U) = \int_X q(s, x, U) p_s(dx).$$

Процесс θ будем считать „ненаблюдаемым“, а вся информация о нем предполагается содержащейся в „наблюдаемом“ процессе $\xi = \{\xi_t(\omega), 0 \leq t \leq T\}$, допускающем стохастический дифференциал Ито ([1], стр. 501)

$$(3) \quad d\xi_t = A(\theta_t, \xi_t, t)dt + B(\xi_t, t)d\omega_t, \quad \xi_0 = 0,$$

где ω_t , $0 \leq t \leq T$ — стандартный винеровский процесс ($\omega_0 = 0$, $M\omega_t = 0$, $M\omega_t^2 = t$), не зависящий от θ_t при каждом $t \in [0, T]$.

Пусть (C, F) измеримое пространство* непрерывных на $[0, T]$ действительных функций $y = \{y_t, 0 \leq t \leq T\}$. Тогда коэффициенты переноса и диффузии $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ определены соответственно на $X \times C \times [0, T]$ и $C \times [0, T]$. Предположим, что они являются измеримыми функциями своих аргументов и удовлетворяют условиям:

III. $A(x, y, t)$ при каждом x и $B(y, t)$ непрерывны по (y, t) .

IV. $|A(x, y, t)| \leq K'(1 + |x| + |y|)$, $0 < c \leq B(y, t) \leq K'(1 + |y|)$

$$(4) \quad |A(x, y, t) - A(x, z, t)| + |B(y, t) - B(z, t)| \leq K'|y - z|, \quad K' = \text{const},$$

$$\int_0^T M\theta_t^2 dt < \infty, \quad M\left\{\sup_t |\theta_t|\right\} < \infty.$$

В предположениях (4) уравнение (3) имеет, и притом единственное (с точностью до стохастической эквивалентности), непрерывное с вероятностью 1 решение ξ_t , $0 \leq t \leq T$ такое, что $M\left\{\sup_t \xi_t^2\right\} < \infty$ и $\xi_t(\omega)$ измеримо относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{\theta \times \omega}^t = \sigma\{\omega: \theta_s(\omega), \omega_s(\omega), 0 \leq s \leq t\}$.

Доказательство этого утверждения проводится методами общей теории стохастических уравнений (см. [11], [2], [1]). Заметим, что в общем случае процесс ξ не является марковским.

Пусть $\mathcal{F}_s^t = \sigma\{\omega: \xi_s(\omega), s \leq t \leq t\}$, $\mathcal{F}_0^t = \mathcal{F}^t$.

Для измеримого множества $U \in \mathcal{X}$ положим

$$(5) \quad \pi_t(U) = P\{\omega: \theta_t(\omega) \in U | \mathcal{F}^t\}, \quad \pi_0(U) = p_0(U).$$

* F — наименьшая σ -алгебра y -множеств, содержащая все цилиндрические подмножества C $[0, T]$; M означает усреднение по мере P .

Из результатов работы [10] следует, что если X является хаусдорфовым пространством со счетным базисом, а $\mathfrak{X}$ состоит из всех борелевских множеств пространства X , условная вероятность $\pi_t(U)$ при фиксированном элементарном исходе ω является вероятностью на σ -алгебре $\mathfrak{X}$. Следуя Лоэву [8], такие условные вероятности будем называть регулярными; там же, на стр. 389, есть пример нерегулярной условной вероятности. В нашем случае будем считать, что для $(X, \mathfrak{X})$ выполнено верхнее условие.

Задача фильтрации ставится следующим образом. По наблюдениям $\xi'_0 = \{\xi_s, 0 \leq s \leq t\}$ (или, что эквивалентно, по $\tilde{\mathfrak{F}}^t$) нужно оценить процесс θ в момент t , $0 \leq t \leq T$. Байесовский характер задачи определяется тем, что заданы априорные вероятности $p_0(U)$ и $p(s, x; t, U)$.

Оценкой (фильтром) θ в момент t называется любая $\tilde{\mathfrak{F}}^t$ — измеримая функция $\tilde{\theta}_t = \tilde{\theta}_t(\xi'_0)$. Поскольку $\tilde{\theta}_t$ является в некотором смысле приближением θ_t , то естественно требовать, чтобы $\tilde{\theta}_t$ была несмещенной оценкой в следующем смысле: $M\tilde{\theta}_t = M\theta_t$, и чтобы она была наилучшей, согласно некоторому критерию, оценкой. В качестве такого критерия мы будем рассматривать средне-квадратический, т. е. требуем, чтобы $M\{(\theta_t - \tilde{\theta}_t)^2\} = \min$ (минимум по всем оценкам).

Определение 1. Если оценка $\tilde{\theta}_t$ такая, что $M\{(\theta_t - \tilde{\theta}_t)^2\} = \min M\{(\theta_t - \theta_t)^2\}$, $0 \leq t \leq T$, то она называется оптимальной оценкой.

Отметим, что в задачах оценивания всегда отыскивается оптимальная оценка в некотором, заранее заданном классе оценок. Мы будем рассматривать класс $N_2 = \{\theta_t = \theta_t(\xi'_0), M\theta_t = M\theta_t, M\{\theta_t^2\} < \infty, 0 \leq t \leq T\}$.

Лемма 1. В классе N_2 оптимальная оценка $\tilde{\theta}_t$ существует и $\tilde{\theta}_t = M\{\theta_t | \tilde{\mathfrak{F}}^t\}$.

Доказательство. Обозначим $m_t = M\{\theta_t | \tilde{\mathfrak{F}}^t\}$. Очевидно $m_t = m_t(\xi'_0)$, $M\{m_t\} = M\{M(\theta_t | \tilde{\mathfrak{F}}^t)\} = M\theta_t$, $M\{m_t^2\} < \infty$. Следовательно, $m_t \in N_2$. Тогда для любой оценки $\theta_t \in N_2$

$$\begin{aligned} M\{(\theta_t - \tilde{\theta}_t)^2\} &= M\{[(\theta_t - m_t) + (m_t - \tilde{\theta}_t)]^2\} \\ &= M\{(\theta_t - m_t)^2\} + M\{(m_t - \tilde{\theta}_t)^2\} \geq M\{(\theta_t - m_t)^2\}, \end{aligned}$$

причем равенство достигается только при $\tilde{\theta}_t = m_t$, а отсюда следует, что $\tilde{\theta}_t$ существует и $\tilde{\theta}_t = m_t$.

Итак, $m_t = M\{\theta_t | \tilde{\mathfrak{F}}^t\}$ и будет искомым оптимальным фильтр. В общем случае он является нелинейным, т. е. m_t не является линейной функцией результатов наблюдений ξ'_0 .

Теперь легко видеть, что нахождение m_t сводится к нахождению апостериорных вероятностей $\pi_t(U)$, определенных выше (5), поскольку

$$m_t = \int_X x \pi_t(dx).$$

Очевидно, $\pi_t(U) = \pi_t(U)(\omega)$, $0 \leq t \leq T$ является случайным процессом на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \tilde{\mathfrak{F}}, P)$ и принимает значения на

отрезке $[0, 1]$. Мы выведем стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито [1], которому удовлетворяют $\pi_t(U)$. При других предположениях и другим способом ранее выводились подобные уравнения [3], [4]. В этой работе мы расширим некоторые идеи, содержащиеся в [6].

Чтобы было ясно дальнейшее изложение, мы приведем одну вспомогательную лемму.

Лемма 2. Существует стандартный винеровский процесс w_t , $0 \leq t \leq T$, измеримый относительно $\mathcal{F}^t = \sigma\{\omega : \xi_s(\omega), s \leq t\}$ при каждом t такой, что процесс ξ_t , $0 \leq t \leq T$, с дифференциалом (3) допускает представление

$$(6) \quad d\xi_t = \bar{A}(t, \omega)dt + B(\xi_t, t)d\bar{w}_t, \quad \xi_0 = 0,$$

где $A(t, \omega) = M\{A(\theta_t, \xi_t, t) | \mathcal{F}^t\}$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. При сделанных выше предположениях для любого измеримого множества $U \in \mathcal{X}$, $\pi_t(U)$ допускает [P-п.н.] стохастический дифференциал

$$(7) \quad d\pi_t(U) = L^* \pi_t(U) + \int_U \frac{A(x, \xi_t, t) - A(t)}{B(\xi_t, t)} \pi_t(dx) \frac{d\xi_t - A(t)dt}{B(\xi_t, t)}$$

где $L^* \pi_t(U) = \int_{\mathcal{X}} q(t, x, U) \pi_t(dx)$, $A(t) = M\{A(\theta_t, \xi_t, t) | \mathcal{F}^t\}$ с начальным условием $\pi_0(U) = p_0(U)$.

Уравнение (7) будем называть уравнением фильтрации. Легко понять его смысл, если учесть, что $(d\xi_t - \bar{A}(t)dt)/B(\xi_t, t)$, как это следует из леммы 2, является дифференциалом стандартного винеровского процесса, так что (7) есть стохастический интеграл Ито. В нем первый член характеризует априорные, а второй — вновь поступающие (апостериорные) данные.

Замечание 1. В частном случае, когда θ_t — скачкообразный марковский процесс с конечным числом состояний, занумерованных, например, числами $0, 1, 2, \dots, N$ для $\pi_t = \{\pi_t(1), \dots, \pi_t(N)\}$, где $\pi_t(i) = P\{\theta_t = i | \mathcal{F}^t\}$, из (7), получаем замкнутую систему стохастических уравнений, причем пара (π_t, ξ_t) , где для ξ_t взято представление (6), образует $(N+1)$ -мерный диффузионный процесс.

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для доказательства леммы 2 рассмотрим процесс

$$\eta_t = \xi_t - \int_0^t \bar{A}(s, \omega)ds.$$

Легко проверить, что $\{\eta_t, \mathcal{F}^t, 0 \leq t \leq T\}$ — мартингал [9] и, следовательно,

$$(8) \quad M\{\eta_t - \eta_s | \mathcal{F}^s\} = 0, \quad s \leq t.$$

По формуле Ито [1], [2]

$$d(\eta_t^2) = [2\eta_t(A(\theta_t, \xi_t, t) - \bar{A}(t, \omega)) + B^2(\xi_t, t)]dt + 2\eta_t B(\xi_t, t)d\bar{w}_t,$$

откуда

$$(9) \quad M\{(\eta_t - \eta_s)^2 | \tilde{\mathcal{F}}^s\} = \int_s^t M\{B^2(\xi_u, u) | \tilde{\mathcal{F}}^s\} du.$$

Из (8), (9) и непрерывности процесса η_t согласно теореме 5.3, гл. IX, [9] существует стандартный винеровский процесс $\bar{w} = \{\bar{w}_t, \tilde{\mathcal{F}}^t, 0 \leq t \leq T\}$ такой, что $d\xi_t = A(t, \omega)dt + B(\xi_t, t)d\bar{w}_t$, $\xi_0 = 0$. Лемма 2 доказана.

Поскольку $B(y, t) \sim c > 0$, без ограничения общности можно считать $B(\cdot) \equiv 1$.

Введем некоторые обозначения.

Процесс ξ задает отображение H_ξ пространства $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}})$ в измеримое пространство (C, F) . Обозначим $\tilde{\mathcal{F}}_\xi = H_\xi^{-1}F \subset F$ прообраз σ -алгебры F на $\tilde{\mathcal{F}}$ при отображении H_ξ .

Пусть P — мера, отвечающая процессу $\xi = \{\xi_t, 0 \leq t \leq T\}$ с дифференциалом (3); очевидно, P является сужением меры $\bar{P}$ от $\tilde{\mathcal{F}}$ на $\tilde{\mathcal{F}}_\xi$.

Обозначим $\Omega' = \{\omega' \in \Omega : \theta_t(\omega') \in U\}$, $U \in \mathcal{X}$ и пусть $P_{\omega'}$ — мера, отвечающая процессу с дифференциалом

$$d\xi_t(\omega, \omega') = A(\theta_t(\omega'), \xi_t(\omega, \omega'), t)dt + d\bar{w}_t(\omega), \quad \xi_0 = 0;$$

ясно, что она также определена на σ -алгебре $\tilde{\mathcal{F}}_\xi$. Вместо $P_{\omega'}$ иногда будем писать $P(\cdot; \omega')$. В силу того, что процесс ξ действительный, условная вероятность $P(A; \omega')$, $A \in \tilde{\mathcal{F}}_\xi$ будет регулярной ([9], стр. 35).

Пусть $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{X}})$ — измеримое пространство, порожденное реализациями процесса θ_s на интервале $[0, t]$.

$P_{\tilde{\theta}_0^t}$ — мера, отвечающая процессу ξ_s , $0 \leq s \leq t$, с дифференциалом

$$(10) \quad d\xi_s = A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s)ds + d\bar{w}_s, \quad \xi_0 = 0,$$

где фиксирована реализация $\tilde{\theta}_0^t$ ($\tilde{\theta}_s$, $0 \leq s \leq t$) ненаблюдаемого процесса $\tilde{\theta}$ до момента t . Эта условная мера, которую будем еще обозначать $P(\cdot; \tilde{\theta}_0^t)$, определена на σ -алгебре $\tilde{\mathcal{F}}_\xi$ и также является регулярной.

На σ -алгебре $\tilde{\mathcal{X}}$ введем условную меру $\tilde{Q}(\cdot | \tilde{\mathcal{F}}')$, где $\tilde{\mathcal{F}}' = \sigma\{\omega' : \tilde{\theta}(\omega')\}$ — σ -алгебра, порожденная случайной величиной $\tilde{\theta}_t$ и событиями $\omega' \in \Omega'$ и условие $\tilde{\mathcal{F}}'$ означает, что „фиксированы“ концы реализаций процесса $\tilde{\theta}$, точнее $\tilde{\theta}_t \in U$. Мера $\tilde{Q}$ будет регулярной уже в силу действительности процесса $\tilde{\theta}$.

Теперь мы докажем одну лемму, касающуюся абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессу ξ в разных случаях.

Определение 2. Пусть μ и ν — меры, определенные на одной и той же σ -алгебре $\mathcal{B}$ некоторого множества E . Мера μ называется абсолютно непрерывной относительно меры ν ($\mu \ll \nu$), если $\mu(A) = 0$ для всех $A \in \mathcal{B}$, для которых $\nu(A) = 0$. В этом случае по теореме Радона — Никодима [8] существует $\mathcal{B}$ -измеримая функция $f(x)$, $x \in E$, называемая плотностью (или производной) меры μ по мере ν такая, что

$\mu(A) = \int_A f(x) \nu(dx)$, причем верно и обратное утверждение.

Л е м м а 3. а) $P_{\tilde{\theta}_0^t} \ll P$, т. е. $P(\cdot; \tilde{\theta}_0^t) \ll P(\cdot)$ при почти всех $\tilde{\theta}_0^t \in \tilde{X}$.

б) $P_{\omega'} \ll P$, т. е. $P(\cdot; \omega') \ll P(\cdot)$ при почти всех $\omega \in \Omega'$.

Обозначим $\lambda_t(\omega, \omega') = \frac{dP_{\omega'}(\tilde{\gamma}^t)(\omega)}{dP(\tilde{\gamma}^t)(\omega)}$, $\tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t) = \frac{dP_{\tilde{\theta}_0^t}(\tilde{\gamma}^t)(\omega)}{dP(\tilde{\gamma}^t)(\omega)}$.

в)

$$(11) \quad \lambda_t(\omega, \omega') = \int_{\tilde{X}} \tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t) d\tilde{Q}(\tilde{\theta}_0^t | \tilde{\gamma}^t).$$

Доказательство. Во-первых, согласно лемме 2 [5], $\lambda_t(\omega, \omega')$ измерима относительно σ -алгебры $\tilde{\gamma}^t \times \tilde{\gamma}^t$, а $\tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t)$ — относительно $\tilde{\gamma}^t \times \tilde{X}$.

В (10) $\tilde{\theta}_s$ — неслучайный (детерминированный) процесс, а ξ с дифференциалом (3) допускает представление (6) (с $B \equiv 1$), т. е. это процессы с одинаковыми коэффициентами диффузии. Тогда [11], [2] $P_{\tilde{\theta}_0^t} \ll P$ и плотность $\tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t)$ имеет вид

$$\tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t) = \exp \left\{ \int_0^t [A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] d\xi_s - \frac{1}{2} \int_0^t [A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)]^2 ds \right\},$$

а по формуле Ито

$$(12) \quad \tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t) = 1 + \int_0^t \tilde{\lambda}_s(\omega, \tilde{\theta}_0^s) [A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] d\xi_s - \bar{A}(s) ds,$$

где $d\xi_s - \bar{A}(s)ds$ — дифференциал винеровского процесса.

Для любого множества $A \in \tilde{\gamma}_t$

$$(13) \quad P(A; \tilde{\theta}_0^t) = \int_1 \tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t) P(d\omega).$$

Кроме того,

$$P(A; \omega') = \int_{\tilde{X}} P(A; \tilde{\theta}_0^t) d\tilde{Q}(\tilde{\theta}_0^t | \tilde{\gamma}^t),$$

откуда, в силу $\tilde{\gamma}^t \times \tilde{X}$ измеримости функции $\tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t)$, равенства (13) и теоремы Фубини

$$P(A; \omega') = \int_{\tilde{X}} \left[\int_A \tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t) P(d\omega) \right] d\tilde{Q}(\tilde{\theta}_0^t | \tilde{\gamma}^t)$$

$$= \int_A \left[\int_{\tilde{X}} \tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t) d\tilde{Q}(\tilde{\theta}_0^t | \tilde{Y}') \right] P(d\omega),$$

где $\int_{\tilde{X}} \tilde{\lambda}_t(\omega, \tilde{\theta}_0^t) d\tilde{Q}(\tilde{\theta}_0^t | \tilde{Y}')$ по теореме Фубини $\tilde{Y}' \times \tilde{Y}'$ измеримо.

Следовательно, $P_{\omega'} \ll P$ и $\lambda_t(\omega, \omega')$ удовлетворяет (11), ч. т. д.

Из определений условного математического ожидания и производной одной меры по другой получаем

$$(14) \quad \pi_t(U) = M\{I_U(\theta_t(\omega) | \tilde{Y}^t)\} = \int_{\Omega} I_U(\theta_t(\omega')) \lambda_t(\omega, \omega') P(d\omega')$$

и следующий шаг должен состоять в нахождении $\lambda_t(\omega, \omega')$.

Из (12) и (11)

$$\lambda_t(\omega, \omega') = 1 + \int_{\tilde{X}} \left[\int_0^t \tilde{\lambda}_s(\omega, \tilde{\theta}_0^s) [A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] d\tilde{w}_s \right] d\tilde{Q}(\tilde{\theta}_0^t | \tilde{Y}').$$

Следовательно, у нас есть повторный интеграл, один из которых является стохастическим интегралом по винеровскому процессу [1]. Непосредственно проверяется условие (см. лемму 3.3 [7]), позволяющее менять порядок интегрирования. Тогда

$$\lambda_t(\omega, \omega') = 1 + \int_0^t \left[\int_{\tilde{X}} \tilde{\lambda}_s(\omega, \tilde{\theta}_0^s) [A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] d\tilde{Q}(\tilde{\theta}_0^s | \tilde{Y}') \right] d\tilde{w}_s,$$

или

$$(15) \quad \lambda_t(\omega, \omega') = 1 + \int_0^t \tilde{M}\{\tilde{\lambda}_s(\omega, \tilde{\theta}_0^s) [A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] | \tilde{Y}'\} d\tilde{w}_s,$$

где $\tilde{M}\{\cdot | \tilde{Y}'\}$ усреднение по мере $\tilde{Q}(\cdot | \tilde{Y}')$. Но процессы θ_t и (θ_t, ξ_t) — марковские и согласно лемме 2 [5] это условное математическое ожидание можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \tilde{M}\{\tilde{\lambda}_s(\omega, \tilde{\theta}_0^s) [A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] | \tilde{Y}'\} \\ &= \tilde{M}\{[A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] \tilde{M}[\tilde{\lambda}_s(\omega, \tilde{\theta}_0^s) | \tilde{\theta}_s, \tilde{Y}'] | \tilde{Y}'\} \\ &= \tilde{M}\left\{[A(\tilde{\theta}_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] \frac{dP_{\tilde{\theta}_s}}{dP}(\tilde{Y}^s) | \tilde{Y}'\right\} \\ &= M\left\{[A(\theta_s, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] \frac{P(s, \theta_s; t, U)}{P_t(U)} | F^s\right\} \\ &= \int_X [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] \frac{P(s, x; t, U)}{P_t(U)} \pi_s(dx) \end{aligned}$$

($P_{\theta_s}^{\sim}$ — мера, отвечающая процессу ξ , при условии, что фиксировано состояние θ_s ненаблюдаемого процесса).

Подставляем в (15) и ввиду (14)

$$(16) \quad \pi_t(U) = p_t(U) \cdot \int_0^t \left\{ \int_X |A(x, \xi_s, s) - A(s)| p(s, x; t, U) \pi_s(dx) \right\} d\omega_s.$$

Далее нам понадобится одна лемма о дифференцировании по параметру под знаком стохастического интеграла [6].

Лемма 4. Пусть

$$(17) \quad I_t = \int_0^t f(t, s, \omega) d\omega_s(\omega), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где функция f измерима по совокупности аргументов, дифференцируема по t (с вероятностью 1) и существуют функции $g(s, \omega)$ и $g_1(s, \omega)$ такие, что а) $|f(t, s, \omega)| \leq g(s, \omega)$, б) $\left| \frac{\partial f(t, s, \omega)}{\partial t} \right| \leq g_1(s, \omega)$, причем g и $g_1 \in H_2$. Тогда I_t допускает стохастический дифференциал

$$(18) \quad dI_t = f(t, t, \omega) d\omega_t + \left(\int_0^t \frac{\partial f(t, s, \omega)}{\partial t} d\omega_s \right) dt.$$

В нашем случае (см. (16))

$$(19) \quad f(t, s, \omega) = \int_X [A(x, \xi_s, s) - A(s)] p(s, x; t, U) \pi_s(dx)$$

и непосредственно применить лемму 4 нельзя.

Лемма 5. Пусть на измеримом пространстве $(E, \mathfrak{B})$ задана неотрицательная конечная счетно-аддитивная мера μ . На E определена функция $\Phi_t(x)$, зависящая еще от параметра t , $t \in [0, T]$, и такая, что существует интеграл (Лебега)

$$J_t = \int_E \Phi_t(x) \mu(dx).$$

Пусть для каждого t существует $\partial \Phi_t(x) / \partial t$ и она непрерывна по t , и, кроме того, $\partial \Phi_t(x) / \partial t \leq \Psi(x)$, где $\Psi(x)$ некоторая μ -интегрируемая функция. Тогда утверждаем, что J_t дифференцируема по t и

$$(20) \quad \frac{d}{dt} \int_E \Phi_t(x) \mu(dx) = \int_E \frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t} \mu(dx).$$

$$H_2 = \left\{ g(s, \omega), \text{ определенных на } [0, T] \times \Omega, \text{ измеримых по } (s, \omega) \text{ и } \int_0^T M g^2(s, \omega) ds < \infty \right\}.$$

Доказательство. Для каждой пары (t, t') , $t < t'$, по теореме Лагранжа существует $\tilde{t}$, $t < \tilde{t} < t'$, такое, что

$$\Phi_{t'} - \Phi_t = (t' - t) \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \right)_{\tilde{t}},$$

откуда

$$(21) \quad \frac{J_{t'} - J_t}{t' - t} = \int_E \left(\frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t} \right)_{\tilde{t}} \mu(dx).$$

Из условия леммы следует, что интеграл в правой части (21) существует. Поскольку при $t' \rightarrow t$

$$\left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \right)_{\tilde{t}} \rightarrow \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} \right)_t = \frac{\partial \Phi_t}{\partial t},$$

то по теореме Лебега о сходимости мажорируемой последовательности существует предел в правой части (21), а, следовательно, существует предел и в левой части, эти пределы соответственно равны $\frac{\partial J_t}{\partial t}$ и $\int_E \frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t} \mu(dx)$ и равны между собой. Тем самым мы доказали (20).

Замечание 2. Рассмотрим функцию $f(t, s, \omega)$, формула (19). Обозначим

$$\Phi_t(x; s, \omega, U) = [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s, \omega)] p(s, x; t, U).$$

Нетрудно видеть, что если в лемме 5 подынтегральная функция $\Phi_t(x)$ зависит еще и от других параметров (в нашем случае — (s, ω, U) и если все условия выполняются равномерно по U при фиксированных s и ω , то лемма сохраняет силу.

Известно [1], что переходные функции $p(s, x; t, U)$ дифференцируемы по t и удовлетворяют прямому уравнению Колмогорова (уравнение вперед)

$$(22) \quad \frac{\partial p(s, x; t, U)}{\partial t} = L^* p(s, x; t, U),$$

где

$$(23) \quad L^* p(s, x; t, U) = \int_X q(t, z, U) p(s, x; t, dz).$$

Из условий (4), того, что $M\{\sup_t \xi_t^2\} < \infty$, непрерывности $q(t, x, U)$ по t и ее ограниченности $q(t, x, U) \leq Q$ следует выполнимость всех условий лемм 4 и 5.

Сейчас мы будем дифференцировать стохастически равенство (16). Имеем

$$d\pi_t(U) = d p_t(U) + \left(\int_X [A(x, \xi_t, t) - \bar{A}(t)] p(t, x; t, U) \pi_t(dx) \right) d\bar{\omega}_t$$

$$+ \left[\int_0^t \left(\int_X [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] L^* p(s, x; t, U) \pi_s(dx) \right) d\bar{w}_s \right] dt \\ = L^* \pi_t(U) dt + \left(\int_U [A(x, \xi_t, t) - \bar{A}(t)] \pi_t(dx) \right) d\bar{w}_t + \Delta,$$

где

$$\Delta = \left\{ L^* p_t(U) + \int_0^t \left(\int_X [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] L^* p(s, x; t, U) \pi_s(dx) \right) d\bar{w}_s - L^* \pi_t(U) \right\} dt.$$

Выше мы воспользовались равенством (2), откуда $dp_t(U) = L^* p_t(U) dt$, и тем, что $p(t, x; t, U) = I_U(x)$, $I_U(x)$ — индикатор множества U .

Рассмотрим подробнее Δ .

К равенству (16) применим оператор L^* , т. е.

$$L^* \pi_t(U) = L^* p_t(U) + L^* \left\{ \int_0^t \left(\int_X [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] p(s, x; t, U) \pi_s(dx) \right) d\bar{w}_s \right\}.$$

Теперь хотелось бы: 1) поменять местами оператор L^* и стохастический интеграл по винеровскому процессу; 2) поменять местами L^* и интеграл по мере $\pi_s(dx)$.

Действительно, первый шаг можно сделать на основании леммы 3.3 [7] (которой мы уже один раз воспользовались); второй шаг следует просто из теоремы Фубини, а тогда $\Delta = 0$.

Следовательно,

$$d\pi_t(U) = L^* \pi_t(U) dt + \int_U [A(x, \xi_t, t) - \bar{A}(t)] \pi_t(dx) [d\xi_t - \bar{A}(t) dt],$$

где мы заменили $d\bar{w}_t$ на $d\xi_t - \bar{A}(t) dt$, возвращаясь к старому обозначению а это совпадает в точности с формулой (7).

Теорема 1 доказана.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть теперь требуется оценить не сам процесс θ , а некоторую функцию $\varphi(\theta)$. Предположим, что она удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(\cdot)$ определена на множестве X , измерима относительно σ -алгебры $\mathfrak{X}$ и $M\{\varphi^2(\theta_t)\} < \infty$ для всех $t \in [0, T]$.

2) $\varphi(\cdot)$ интегрируема по мере $q(s, x; \cdot)$ на множестве X . Обозначим

$$L_s \varphi(x) = \int_X \varphi(y) q(s, x, dy).$$

3) $L_s \varphi(x)$ измерима по (s, x) ($s \in [0, T]$, $x \in X$) относительно σ -алгебры $\mathfrak{B}_{[0, T]} \times \mathfrak{X}$.

4) для случайной функции $L_s \varphi(\theta_s)$ существует $M\{L_s \varphi(\theta_s)\}$.

5) если $\nu_s(\cdot)$ — мера в $(X, \mathfrak{X})$, индуцируемая θ_s , то

$$(24) \quad P \left\{ \int_0^T \int_X \varphi^2(x) A^2(x, \xi_s, s) \nu_s(dx) ds < \infty \right\} = 1.$$

Тогда согласно лемме 1 (ввиду условия 1)) оптимальная оценка (фильтр) $\tilde{\delta}$ существует и $\tilde{\delta} = M\{\varphi(\theta_t) | \tilde{\mathfrak{F}}^t\}$.

Обозначим $\psi_t = M\{\varphi(\theta_t) | \tilde{\mathfrak{F}}^t\}$. Для простоты записи будем считать $B(\cdot) = 1$.

Теорема 2. При сделанных выше предположениях ψ_t , $0 \leq t \leq T$, допускает [Р-п. н.] стохастический дифференциал Ито

$$(25) \quad d\psi_t = \alpha(t, \omega) dt + \beta(t, \omega)(d\xi_t - \bar{A}(t)dt), \quad \psi_0 = M\{\varphi(\theta_0)\},$$

где $\alpha(t, \omega) = M\{L_t \varphi(\theta_t) | \tilde{\mathfrak{F}}^t\}$.

$$\beta(t, \omega) = M\{\varphi(\theta_t) A(\theta_t, \xi_t, t) | \tilde{\mathfrak{F}}^t\} - M\{\varphi(\theta_t) | \tilde{\mathfrak{F}}^t\} M\{A(\theta_t, \xi_t, t) | \tilde{\mathfrak{F}}^t\}.$$

Для доказательства исходим из уравнения фильтрации (7), записанного в интегральном виде

$$\pi_t(U) = p_0(U) + \int_0^t L^* \pi_s(U) ds + \int_0^t \int_U [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] \pi_s(dx) d\bar{w}_s.$$

Но $\psi_t = \int_X \varphi(x) \pi_t(dx)$, а вероятность того, что процесс θ в момент t

будет находиться в „интервале“ $U = [x, x + dx)$ (пространства X) есть $\pi_t(dx)$ и из верхней формулы

$$\pi_t(dx) = p_0(dx) + \int_0^t L^* \pi_s(dx) ds + \int_0^t [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] \pi_s(dx) d\bar{w}_s.$$

Теперь умножим обе стороны этого равенства на $\varphi(x)$ и интегрируем по всему пространству X . Рассмотрим подробнее второй и третий члены с правой стороны. Обозначим

$$I_1 = \int_X \varphi(x) \left(\int_0^t \int_X q(s, y, dx) \pi_s(dy) ds \right),$$

$$I_2 = \int_X \varphi(x) \left(\int_0^t [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] \pi_s(dx) d\bar{w}_s \right).$$

Условия 2), 3) и 4) дают нам право применить в I_1 теорему Фубини. Тогда

$$I_1 = \int_0^t \left(\int_X \left(\int_X \varphi(x) q(s, y, dx) \right) \pi_s(dy) \right) ds = \int_0^t \left(\int_X L_s \varphi(y) \pi_s(dy) \right) ds - \int_0^t M\{L_s \varphi(\theta_s) | \mathcal{F}^s\} ds.$$

А условие (24) достаточно, чтобы поменять в I_2 местами стохастический интеграл по винеровскому процессу и интеграл по мере $\pi_s(dx)$. Тогда

$$I_2 = \int_0^t \left(\int_X \varphi(x) [A(x, \xi_s, s) - \bar{A}(s)] \pi_s(dx) \right) d\bar{w}_s = \int_0^t (M\{\varphi(\theta_s) A(\theta_s, \xi_s, s) | \mathcal{F}^s\} - M\{\varphi(\theta_s) | \mathcal{F}^s\} M\{A(\theta_s, \xi_s, s) | \mathcal{F}^s\}) d\bar{w}_s.$$

Если учесть, что $\int_X q(x) p_0(dx) = \psi_0$, после подстановки I_1 , I_2 и ψ_0 мы приходим к интегральной записи равенства (25).

Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Легко проверить, что функция $q(x) = x$ удовлетворяет условиям 1)–5). Тогда по теореме 2 $m_t = M\{\theta_t | \mathcal{F}^t\}$ допускает стохастический дифференциал (25) с $q(x) = x$ и начальным условием $m_0 = M\{\theta_0\}$. Эта теорема и иллюстрирует тот факт, что $\pi_t(U)$ являются достаточными статистиками в задаче оптимальной фильтрации.

§ 4 ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

До этого места ненаблюдаемый процесс θ и наблюдаемый процесс ξ считались одномерными. Перейдем теперь к случаю, когда (θ_t, ξ_t) , $0 \leq t \leq T$ двумерный марковский процесс, причем θ и ξ сами являются многомерными процессами.

Прежде всего мы выясним, что такое многомерный скачкообразный марковский процесс. Возможны два пути его построения.

1) Пусть $\theta = \{\theta_t(\omega), 0 \leq t \leq T\}$ общий скачкообразный марковский процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, принимающий значения в фазовом пространстве $(X, \mathcal{X})$, где X — хаусдорфово пространство со счетным базисом, а $\mathcal{X}$ состоит из его борелевских множеств. Заданы начальное распределение $p_0(U)$ и переходные функции $p(s, x; t, U)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, $x \in X$, $U \in \mathcal{X}$, которые удовлетворяют условиям I и II § 1.

Предположим теперь, что $(X, \mathcal{X})$ является произведением измеримых пространств $(X_1, \mathcal{X}_1), \dots, (X_k, \mathcal{X}_k)$, $1 \leq k \leq n$, где каждое из пространств X_i является хаусдорфовым со счетным базисом, а $\mathcal{X}_i$ состоит из его борелевских множеств. При этом $X = X_1 \times \dots \times X_k$, а $\mathcal{X}$ является наименьшей σ -алгеброй, порожденной классом всех конечных сумм борелевских

цилиндров вида* $\prod_{i \in K_m} U_i \times \prod_{i \in K \setminus K_m} X_i$, где $U_i \in \mathfrak{X}_i$, $K = \{1, 2, \dots, k\}$, K_m — его подмножество, содержащее m индексов, $m = 0, 1, \dots, k$.

Обозначим

$$q_i(s, x_i, U_i) = \int_{X \setminus X_i} q(s, x, dx_1, \dots, dx_{i-1}, U_i, dx_{i+1}, \dots, dx_k),$$

$$p_0^{(i)}(U_i) = \int_{X \setminus X_i} p_0(dx_1, \dots, dx_{i-1}, U_i, dx_{i+1}, \dots, dx_k).$$

Тогда легко проверить, что для каждого индекса $i = 1, \dots, k$ функции $q_i(s, x_i, U_i)$, $0 \leq s \leq T$, $x_i \in X_i$, $U_i \in \mathfrak{X}_i$, также удовлетворяют условиям I и II § 1. Следовательно [1], они определяют единственным образом функции $p^{(i)}(s, x_i; t, U_i)$, которые являются переходными функциями некоторого одномерного скачкообразного марковского процесса с начальным распределением $p_0^{(i)}(U_i)$. Обозначим этот процесс через $\theta^{(i)}$, $\theta^{(i)} = \{\theta_t^{(i)}(\omega), 0 \leq t \leq T\}$. Очевидно, $\theta^{(i)}$ принимает значения в фазовом пространстве $(X_i, \mathfrak{X}_i)$. Тогда ясно, что данный процесс θ можно рассматривать как многомерный общий скачкообразный марковский процесс $\theta = \{\theta_t(\omega) = (\theta_t^{(1)}(\omega), \dots, \theta_t^{(k)}(\omega)), 0 \leq t \leq T\}$, каждая компонента которого является процессом того же типа и эти компоненты независимы между собой.

2) Теперь мы будем исходить из процессов $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(k)}$ и по ним построим многомерный скачкообразный марковский процесс $\theta = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(k)})$.

Пусть процесс $\theta^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$, определен на вероятностном пространстве $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, P_i)$, является действительным общим скачкообразным марковским процессом с непрерывным временем t , $0 \leq t \leq T$, принимающим значения в фазовом пространстве $(X_i, \mathfrak{X}_i)$, где X_i — хаусдорфово пространство со счетным базисом, а $\mathfrak{X}_i$ состоит из его борелевских множеств. Процессы $\theta^{(i)}$ предполагаются независимыми между собой.

Заданы начальное распределение $p_0^{(i)}(U_i)$ и переходные функции $p^{(i)}(s, x_i; t, U_i)$ процесса $\theta^{(i)}$, причем соответствующая функция $q_i(s, x_i, U_i)$ удовлетворяет условиям I и II § 1.

Строим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, являющееся произведением вероятностных пространств $(\Omega_i, \mathfrak{F}_i, P_i)$, $i = 1, \dots, k$. Во-первых, $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_k$ в том смысле, что $\omega \in \Omega$ означает $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k)$, $\omega_i \in \Omega_i$. Во-вторых, $\mathfrak{F}$ является σ -алгеброй, порожденной классом Σ всех конечных сумм множеств из L , где L — класс измеримых цилиндров вида

$\prod_{i \in K_m} A_i \times \prod_{i \in K \setminus K_m} \Omega_i$, $A_i \in \mathfrak{F}_i$. Эта σ -алгебра $\mathfrak{F}$ по определению является произведением σ -алгебр $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_k$. Остается определить меру P на σ -алгебре $\mathfrak{F}$. Для любого измеримого цилиндра $A = \prod_{i \in K_m} A_i \times \prod_{i \in K \setminus K_m} \Omega_i$ из L положим

$$P(A) = \prod_{i \in K_m} P_i(A_i) \times \prod_{i \in K \setminus K_m} P_i(\Omega_i) = \prod_{i \in K_m} P_i(A_i).$$

* $\prod$ — символ умножения.

Это произведение P вероятностных мер $P_1, \dots, P_k$ является конечно-аддитивным на классе L . Согласно одной теореме в [8] P является счетно-аддитивной вероятностной мерой на Σ и может быть продолжено однозначно на σ -алгебре $\mathfrak{F}$. Следовательно, тройка $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ является вероятностным пространством.

Пусть $(X, \mathfrak{X})$ является произведением измеримых пространств $(X_i, \mathfrak{X}_i)$ $i=1, \dots, k$, где $X=X_1 \times \dots \times X_k$ является снова хаусдорфовым пространством со счетным базисом, а $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1 \times \dots \times \mathfrak{X}_k$ является произведением σ -алгебр $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_k$, которое можно построить так, чтобы $\mathfrak{X}$ состояло из борелевских множеств X .

Итак, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ определен многомерный случайный процесс $\theta_t = (\theta_t^{(1)}, \dots, \theta_t^{(k)})$ с непрерывным временем $t, 0 \leq t \leq T$, принимающий значения в фазовом пространстве $(X, \mathfrak{X})$. Легко найти его начальное распределение $p_0(U)$ и переходные функции $p(s, x; t, U)$, $s \leq t, x \in X, U \in \mathfrak{X}$. Согласно определению меры P

$$p_0(U) = P\{\omega: \theta_0(\omega) \in U\} = P_1\{\omega_1: \theta_0^{(1)}(\omega_1) \in U_1\} \dots P_k\{\omega_k: \theta_0^{(k)}(\omega_k) \in U_k\} \\ p_0^{(1)}(U_1) \dots p_0^{(k)}(U_k).$$

и аналогично

$$p(s, x; t, U) = p^{(1)}(s, x_1; t, U_1) \dots p^{(k)}(s, x_k; t, U_k).$$

Но для каждого $i=1, \dots, k$ из условий I и II § 1 получаем

$$p^{(i)}(s, x_i; t, U_i) = I_{U_i}(x_i) + q_i(s, x_i, U_i)(t-s) + r_i(s, x_i, t, U_i)(t-s),$$

где $r_i(s, x_i, t, U_i)$ — некоторая мера по U_i на σ -алгебре $\mathfrak{X}_i$, абсолютная вариация которой стремится к нулю при $t \downarrow s$ равномерно по (s, x_i) .

Умножая почленно все эти равенства, получим

$$p(s, x; t, U) = I_U(x) + q(t, x, U)(t-s) + r(s, x, t, U)(t-s),$$

где $I_U(x)$ — индикатор множества U , $U = \{U_1, \dots, U_k\} \in \mathfrak{X}$; функция $q(t, x, U)$, как это легко проверить, является мерой по U на σ -алгебре $\mathfrak{X}$ и удовлетворяет условиям I и II § 1; $r(s, x, t, U)$ — мера по U на σ -алгебре $\mathfrak{X}$, абсолютная вариация которой стремится к нулю при $t \downarrow s$ равномерно по (s, x) .

Следовательно, так построенный процесс $\theta = \{\theta_t(\omega) = (\theta_t^{(1)}(\omega_1), \theta_t^{(k)}(\omega_k)), 0 \leq t \leq T\}$ является общим скачкообразным марковским процессом. Задачу оценивания таких процессов естественно назвать многомерной задачей фильтрации.

Наблюдается процесс $\xi = \{\xi_t(\omega) = (\xi_t^{(1)}(\omega), \dots, \xi_t^{(l)}(\omega)), 0 \leq t \leq T\}$, $1 < l < \infty$, допускающий многомерный стохастический дифференциал Ито ([1] стр. 505)

$$(26) \quad d\xi_t = A(\theta_t, \xi_t, t)dt + B(\xi_t, t)d\omega_t, \quad \xi_0 = 0.$$

Здесь $A(\theta_t, \xi_t, t) = (A_1(\theta_t, \xi_t, t), \dots, A_l(\theta_t, \xi_t, t))$ — вектор-функция; матрица $B(\xi_t, t) = \|B_{jm}(\xi_t, t)\|$ имеет размерность $l \times l$; $\omega = \{\omega_t(\omega) = (\omega_t^{(1)}(\omega), \dots,$

Все векторы рассматриваются как вектор-столбцы; в (26) $\xi=0$ означает нулевой вектор-столбец

$w_t^{(j)}(\omega)$, $0 \leq t \leq T$ — l -мерный стандартный винеровский процесс, где $w_t^{(j)}$, $j=1, \dots, l$ — независимые между собой одномерные винеровские процессы, не зависящие от процессов $\theta_t^{(i)}$, $i=1, \dots, k$. Аналогично одномерному случаю делаем следующие предположения:

III'. Функция $A_i(\cdot)$, $B_{jm}(\cdot)$, $i=1, \dots, k$, $j, m=1, \dots, l$ — непрерывны по совокупности переменных.

$$(27) \quad \begin{aligned} & \text{IV'. } |A_i(x, y, t) - A_i(x, z, t)| + |B_{jm}(y, t) - B_{jm}(z, t)| \leq C' \|y - z\|, \\ & |A_i(x, y, t)| \leq C'(1 + \|x\| + \|y\|), \quad |B_{jm}(y, t)| \leq C'(1 + \|y\|), \end{aligned}$$

$$\int_0^T M\{\|\theta_t\|^2\} dt < \infty, \quad M\{\sup_t \|\theta_t\|\} < \infty,$$

где $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2$, $\|y\|^2 = y_1^2 + \dots + y_l^2$, $C' = \text{const}$.

V'. Матрица BB^* — равномерно невырождена, $\det BB^* \cdot c > 0$, B^* матрица, транспонированная к матрице B .

В предположениях (27) система стохастических дифференциальных уравнений (26) имеет, и притом единственное (с точностью до стохастической эквивалентности), решение ξ_t , $0 \leq t \leq T$, непрерывное с вероятностью 1, такое, что $M\{\sup_t \|\xi_t\|^2\} < \infty$ и $\xi_t(\omega)$ измеримо относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{\theta \times \omega}^t = \sigma\{\omega : \theta_s(\omega), \omega_s(\omega), 0 \leq s \leq t\}$.

Задача фильтрации ненаблюдаемого процесса θ_t , $0 \leq t \leq T$, ставится точно так же, как в § 1. Мы будем использовать те же самые обозначения и в многомерном случае, причем

$$\pi_t(U) = P\{\omega : \theta_t(\omega) \in U \mid \mathcal{F}^t\}$$

означает следующее:

$$U = (U_1, \dots, U_k) \in \mathcal{X}, \quad \pi_t(U) = P\{\omega : \theta_t^{(1)}(\omega) \in U_1, \dots, \theta_t^{(k)}(\omega) \in U_k \mid \mathcal{F}^t\}.$$

Заметим, что для многомерного процесса ξ_t , $0 \leq t \leq T$, с дифференциалом (26) при условиях III', IV' и V' снова имеет место лемма 2.

Теперь мы сформулируем теорему, обобщающую теорему 1 на многомерный случай.

Теорема 3. При сделанных выше предположениях для любого измеримого множества $U \in \mathcal{X}$, $\pi_t(U)$ допускает [P — п. н.] стохастический дифференциал

$$(28) \quad d\pi_t(U) = L^* \pi_t(U) dt + \left(\int_U [A(x, \xi_t, t) - \bar{A}(t)] \pi_t(dx), (BB^*)^{-1} (d\xi_t - \bar{A}(t) dt) \right)$$

где

$$L^* \pi_t(U) = \int_{\mathcal{X}} q(t, x, U) \pi_t(dx), \quad \bar{A}(t) = M\{A(\theta_t, \xi_t, t) \mid \mathcal{F}^t\}$$

$$= (\bar{A}_1(t), \dots, \bar{A}_l(t)), \quad \bar{A}_j(t) = M\{A_j(\theta_t, \xi_t, t) \mid \mathcal{F}^t\}, \quad j=1, \dots, l,$$

с начальным условием $\pi_0(U) = p_0(U)$.

Уравнение (28) можно назвать многомерным уравнением фильтрации ($\langle \rangle$ — символ скалярного произведения).

Доказательство этой теоремы с незначительными изменениями повторяет доказательство теоремы 1, поэтому мы его не приводим.

Отметим, что решение задачи фильтрации позволяет нам ставить и успешно решать и другие задачи в теории оцениваний частично-наблюдаемых случайных процессов. Таковы, например, задачи интерполяции и экстраполяции общих скачкообразных марковских процессов. А многомерное уравнение фильтрации (28) дает возможность рассмотреть задачу о различении гипотез по неполным данным. Но здесь эти вопросы мы не будем обсуждать.

В заключение автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю, профессору Московского университета А. Н. Ширяеву, за оказанное внимание и помощь при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман, И. И., А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. Москва, 1965.
2. Гихман, И. И., А. В. Скороход. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.
3. Ширяев, А. Н. Стохастические уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных марковских процессов. — Пробл. передачи информ., 2, 1966, 3—22.
4. Ширяев, А. Н. О стохастических уравнениях в теории условных марковских процессов. — Теория вероятностей и ее применения, 11, 1966, 200—206.
5. Липцер, Р. Ш., А. Н. Ширяев. О плотности вероятностных мер процессов диффузионного типа. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 33, 1969, 1120—1131.
6. Липцер, Р. Ш., А. Н. Ширяев. Интерполяция и фильтрация скачкообразной компоненты марковского процесса. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 33, 1969, 901—914.
7. Kallianpur, G., C. Striebel. Stochastic differential equations occurring in the estimation of continuous parameter stochastic processes. — Теория вероятностей и ее применения, 14, 1969, 597—622.
8. Лоев, М. Теория вероятностей. Москва, 1962.
9. Дуб, Дж. Вероятностные процессы. Москва, 1956.
10. Jirina, M. On regular conditional probabilities. — Czechosl. Mathem. J., 9, 1959, 445—450.
11. Скороход, А. В. Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1961.

Поступило 11. XII. 1970 г.

ФИЛТРАЦИЯ НА ОБЩИ СКОКООБРАЗНИ МАРКОВСКИ ПРОЦЕСИ

Йордан Стоянов

(Резюме)

Във вероятностното пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ е даден двумерен марковски процес (θ_t, ξ_t) , $0 \leq t \leq T$, където θ_t е общ скокообразен марковски процес, зададен със своите преходни вероятности, а ξ_t е процес от дифузионен тип със стохастичен диференциал (3). Разглежда се задача за

филтрация на ненаблюдаемия процес θ по резултатите от наблюденията върху процеса ξ .

Ако означим с $\pi_t(U) = P\{\theta_t \in U | \xi_s, s \leq t\}$ апостериорните условни вероятности на процеса θ , то в теорема 1 се доказва, че $\pi_t(U)$ удовлетворяват стохастичното диференциално уравнение (7).

В теорема 2 е изведено стохастично диференциално уравнение за $M\{\varphi(\theta_t) | \xi_s, s \leq t\}$, където φ е произволна функция, удовлетворяваща някои естествени изисквания, от което в частност следва, че апостериорните вероятности $\pi_t(U)$ са достатъчни статистики в задачата за оптимална нелинейна филтрация.

Теорема 3 е аналог на теорема 1 в случая, когато самите процеси θ и ξ са многомерни.

Методите и резултатите на тази работа могат да се използват и в други задачи от теорията на частично-наблюдаемите случайни процеси, например при интерполация и екстраполация, оптимално управление и различаване на хипотези по непълни данни и др.

FILTERING OF GENERAL JUMP-LIKE MARKOV PROCESSES

Jordan Stoyanov

(Summary)

A two-dimensional Markov process (θ_t, ξ_t) , $0 \leq t \leq T$, is given on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ where θ_t is a general jump-like Markov process which is given together with its transition probabilities and ξ_t is a process of a diffusion type with a stochastic differential (3). The Bayes' formulation of the filtering problem of a stochastic process θ based on the results obtained when observing the stochastic process ξ is considered.

If we denote by $\pi_t(U) = P\{\theta_t \in U | \xi_s, s \leq t\}$ the a posteriori conditional probabilities of the process θ , then in the theorem 1 it is proved that $\pi_t(U)$ satisfy the stochastic differential equation (7).

In the theorem 2 the stochastic differential equation for $M\{\varphi(\theta_t) | \xi_s, s \leq t\}$ is derived; there φ is an arbitrary function satisfying some natural assumptions and from the above equation it follows that the a posteriori probabilities $\pi_t(U)$ are sufficient statistics for the optimal non-linear filtering problem.

Theorem 3 is analogous to theorem 1 in case that the processes θ and ξ are multidimensional.

The methods and results applied and obtained in this paper may be used when solving other problems from the theory of partially-observed stochastic processes, for example interpolation and extrapolation, optimal control and testing of hypotheses by incomplete data, etc.