БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XIV

УСПОРЕДНО ПРОЕКТИРАНЕ В ДВУОСНОТО ХИПЕРБОЛИЧНО ПРОСТРАНСТВО

А. Лангов и Хр. Пачев

§ 1. УВОД

Под двуосно хиперболично пространство B_3 разбираме клайновото пространство, получено от проективното триизмеримо пространство P_3, в което за абсолют са избрани две реални кръстосани прави f и g. Движения в B_3 са всички B-колинеации, т. е. колинеации в P_3, спрямо които правите f и g са инвариантни. Правите, пресичащи едновременно f и g, образуват хиперболична конгруенция, която се нарича абсолютна конгруенция. Правите на тази конгруенция се наричат безкрайни. Линейните комплекси прави, от които съдържат абсолютната конгруенция прави, образуват сноп линейни комплекси G, който наричаме абсолютен сноп линейни комплекси.[1] Правите, пресичащи само f или само g, се наричат изотропни.

1. Ъглова метрика в B_3

Нека a и b са две прави, които принадлежат съответно на комплексите $G(a)$ и $G(b)$ от абсолютния сноп комплекси G, а α е произволна равнина, пресичаща абсолютните прави f и g съответно в безкрайните точки F и G. Полюсите на равнината α относно комплексите $G(a)$ и $G(b)$, които са точки от правата FG (защото тази права принадлежи и на двата комплекса), нека означим с A и B. Като се използват F и G като абсолютни точки върху безкрайната права FG, определя се хиперболично разстояние между точките A и B, което се приема за мярка на ъгъла между правите a и b [1]. Съгласно казаното две прави сключват ъгъл с мярка 0 тогава и само тогава, когато принадлежат на един и същи линеен комплекс от абсолютния сноп линейни комплекси.

Нека l е произволна права от B_3, непринадлежаща на абсолютната конгруенция прави, а $G(l)$ — онзи комплекс прави от абсолютния сноп линейни комплекси, който съдържа l. Отделяме от комплекса $G(l)$ правите, които пресичат l. Така получаваме конгруенция прави $F(l)$; тези прави пресичат l и сключват ъгъл с мярка 0 с нея. Конгруенцията $F(l)$ ще бъде използвана в настоящата статия за построяване на успоредно проектиране в B_3.

[1] Абсолютната конгруенция и абсолютният сноп линейни комплекси са фигури, които са инвариантни относно групата на двуосните движения.

Теорема 1. Конгруенцията $F(l)$ съвпада със съвкупността T от допирателните прави към праволинейната квадрика (fgl) с образуващи f, g и l, които пресичат правата l.

Доказателство. Нека $a \in F(l)$, т. е. $a \in G(l)$ и $a \cap l = M$. Разглеждаме равнината $\alpha = al$. Нека m е трансверзалата на f и g, лежаща в α. Тъй като m принадлежи на абсолютната конгруенция прави, то $m \in G(l)$. Но правите, лежащи в α и принадлежащи на $G(l)$, образуват сноп, на който очевидно ще принадлежат a, l и m. Следователно $m Z M$. Равнината α, минаваща през l и m, обаче е допирателната равнина в точката M към квадриката (fgl), т. е. $a \in T$.

Нека $a \in T$, т. е. a лежи в допирателната равнина α в точката M на квадриката (fgl). Както е известно, α минава през образуващите l и m на тази квадрика. Но m е трансверзала на f и g, т. е. m е от абсолютната конгруенция и следователно принадлежи на комплекса $G(l)$. Тъй като $l \in G(l)$, следва, че и правата a, принадлежаща на снопа (l, m), ще бъде от $G(l)$. Вземайки пред вид, че a пресича l, следва, че $a \in F(l)$.

§ 2. ПРОЕКТИРАНЕ НА ПРОСТРАНСТВО B_3, УСПОРЕДНО НА ПРАВАТА l

1. Дефиниция на успоредно проектиране в B_3

Нека е дадена правата l, крайна и неизотропна. Избираме проекционна равнина π, която не е допирателна към квадриката (fgl), минаваща през l и абсолютните прави f и g. Следвайки Норден, неизродена квадрика, съдържаща абсолютните прави f и g, ще наричаме сфероид. Сфероидът, съдържащ правата l, ще наричаме основен сфероид. Нека равнината π пресича основния сфероид в кривата k^2 от втора степен, а правата l — в точка L. Допирателната равнина към същия сфероид в точката L нека пресича π в права t.

Дефиниция 1. Нека $A \in B_3$ и $A \overline{\in} l, t$. Разглеждаме равнината, минаваща през точката A и правата l. Тя очевидно е допирателна към основния сфероид. Означаваме с A_l допирната ѝ точка с него (очевидно $A_l \in l$). На точката A съпоставяме точката A', в която правата AA_l пресича π. Точката A' ще наричаме успоредна проекция на точката A върху равнината π с направляваща на проектирането правата l.

От изложеното в теорема 1 следва, че проектирането, определено с дефиниция 1, е двуосно параболично проектиране на P_3 върху равнина, определено с помощта на параболичната конгруенция $F(l)$. Някои задачи на това проектиране в един специален случай, когато пространството е разширено евклидово и правата l е безкрайна, са разгледани в [3].

Образуващата на основния сфероид от системата образуващи, несъдържаща правата l и минаваща през точката A_l, пресича кривата k^2, в която основният сфероид пресича π в точка A_1, инцидентна с правата $A'L$. Точката A_1 ще наричаме вторична проекция на A. Както е лесно да се види, всички точки от правата AA_l имат също успоредна проекция точката A' и вторична проекция точката A_1.

2. Проекция на права

Нека a е права от B_3 и да проектираме точките ѝ с помощта на описаното проектиране. Нека A е произволна точка от a. Тъй като съответствието $\varphi(A \xrightarrow{\varphi} A_l)$ е проективност на реда a върху реда l, проектиращите прави на точките от a принадлежат на една праволинейна квадрика F_a^2, която пресича проекционната равнина π в точките на крива a^2 от втора степен. Кривата a^2 ще наричаме проекция на правата a.

Разглежданата квадрика F_a^2 съдържа правата l и следователно равнината (A, l) е нейна допирателна равнина в точката A_l. Следвателно основният сфероид и квадриката F_a^2 имат във всяка точка на правата l обща допирателна равнина. Прилагайки този резултат за точката L, получаваме, че кривата a^2 се допира до правата t в точката L. Това показва, че кривите в равнината π, които са проекции на правите от B_3, са хомоложни на k^2 с център L.

Лесно се вижда, че всички образуващи на квадриката F_a^2 от роя прави върху него, съдържащ правата a, и само те имат за образ в π кривата a^2. От това следва, че, фиксирайки точка от кривата a^2, напълно е определена образуващата a на квадриката F_a^2 от този рой, на която тази точка е стъпката ѝ в π. Крива от втора степен с избрана точка от нея наричаме пунктирана крива. И така можем да изкажем следната

Теорема 2. Между пунктираните криви от втора степен, допиращи се до правата t в точката L, и правите от пространството B_3 проектирането, определено с дефиниция 1, поражда еднозначно обратимо съответствие.

В съответствие с това, че пунктирът на кривата a^2 е стъпката на правата a в π, този пунктир ще означаваме с M^a, а правата a с образ a^2 и стъпка M^a — с $a\,(a^2, M^a)$.

Проектиращата квадрика F_a^2 може да пресича π в разпадащо се конично сечение. Това ще се случи, ако правата a пресича правата t. Последното веднага се забелязва, като вземем пред вид, че на точката $t \cap a$ при φ съответствува точката L и следователно правата t принадлежи на квадриката F_a^2.

Също така квадриката F_a^2 може да се изроди в сноп прави. Това ще се случи, когато правата a пресича правата l. Тогава кривата a^2 се разпада в двойка сливащи се прави, минаващи през точката L. Последната права е дирята на равнината (a, l) в π.

3. Изобразяване на равнина

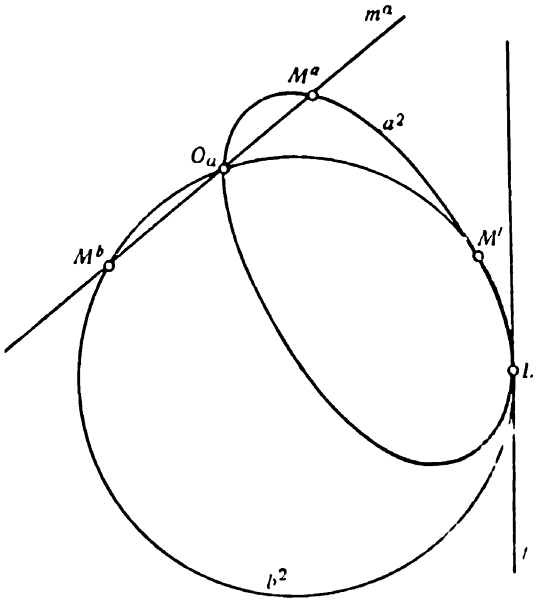
Дирята m^α и единствената права t^α от проектиращата конгруенция $F(l)$, лежаща в α, еднозначно определят равнината α (в общо положение). Правата m^α, лежейки в π, пресича правата t и следователно се изобразява с разпадащо се в двойка прави конично сечение; едната от тях е t, а другата очевидно съвпада със самата m^α. Лъчът t^α се изобразява в точка O_α, която лежи на m^α. Така една равнина еднозначно се изобразява в π чрез правата m^α — диря на α в π, и точката O_α от нея — стъпка на лъча от конгруенцията $F(l)$, лежащ в α.

4. Изобразяване на прави от една равнина

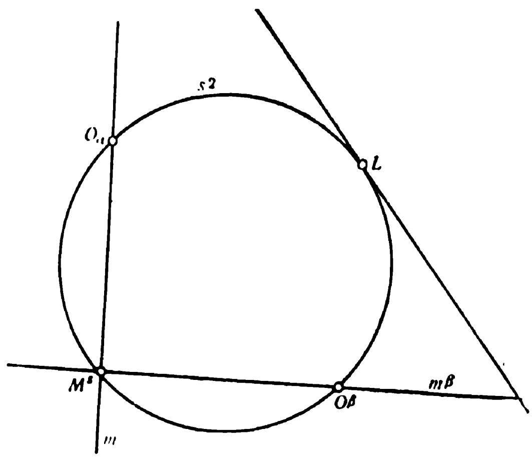
Ако права a лежи в равнината α, тя пресича правите t^{α} и m^{α} и следователно се изобразява в пунктирано конично сечение, минаващо през точката O_{α}, с пунктир M^{a}, лежащ на m^{α}. Снопът прави с център точката $T_{\alpha}=a\cap t$ се изобразява в сноп разпадащи се конични сечения, всяко от които съдържа правата t и една права, минаваща през точката O_{α}.

5. Условие за пресичане на две прави

Нека са дадени пресичащите се прави a и b. Като вземем пред вид даденото в (4), двете конични сечения a^2 и b^2, изобразяващи правите a и b, ще се пресичат в една точка O_{α}, която е проекция на лъча на конгруенцията $F(l)$, лежащ в равнината α, минаваща през правите a и b; през O_{α} ще минава и дирята m^{α}, свързваща стъпките M^{a} и M^{b} на дадените прави (фиг. 1). Така получаваме критерия: пунктираните конични сечения (a^2, M^{a}) и (b^2, M^{b}) изобразяват две пресичащи се прави, ако правата, съединяваща пунктирите им M^{a} и M^{b}, минава през една от двете пресечни точки (освен L) на кривите a^2 и b^2. Очевидно другата пресечна точка M' на a^2 и b^2 е проекцията на точката $M=a\cap b$.



Фиг. 1



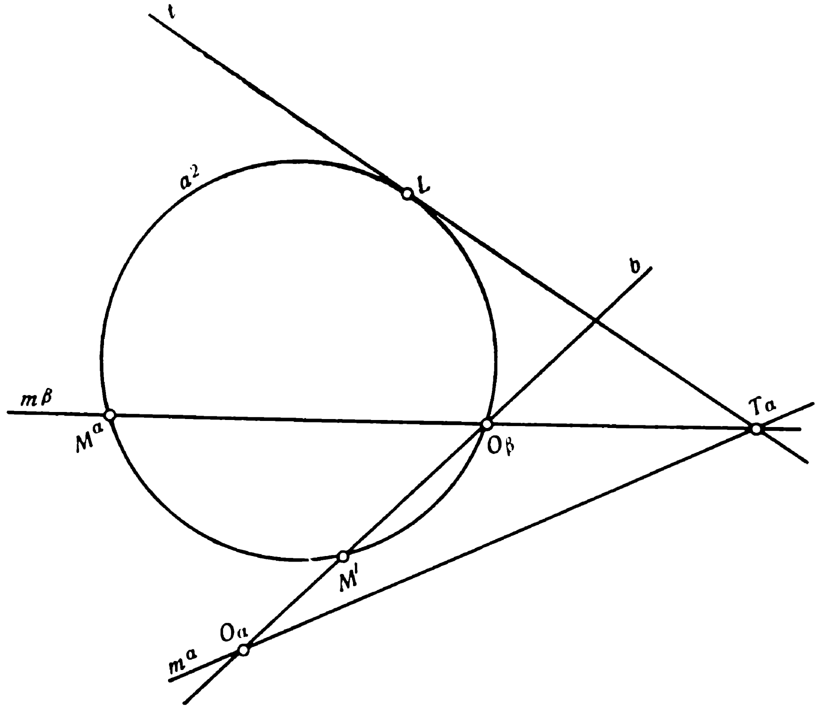
Фиг. 2

6. Пресечница на две равнини

Кривата s^2 (фиг. 2), изобразяваща пресечницата s на равнините $\alpha(m^{\alpha}, O_{\alpha})$ и $\beta(m^{\beta}, O_{\beta})$, минава през точките O_{α}, O_{β} и $M^{s}=m^{\alpha}\cap m^{\beta}$ и се допира до правата t в точката L.

7. Пробод на права с равнина

Нека са дадени равнина $\alpha(m^\alpha, O_\alpha)$ и права $a(a^2, M^a)$ (фиг. 3). Разглеждаме равнината $\beta Z a$, T_α $(T_\alpha = a \cap t)$. Нейната диря е $m^\beta = M^a T_\alpha$, а точката



Фиг. 3

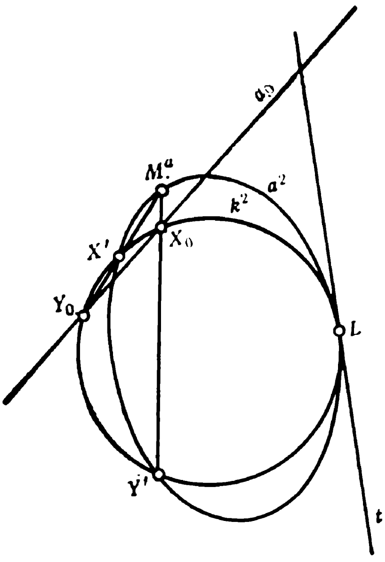
$O_\beta = m^\beta \cap a^2$. Правата $s = \alpha \cap \beta$, пресичайки в точката $T_\alpha = T_\beta$ правата t, се изобразява в двойка прави (b, t), където $b = O_\alpha O_\beta$. Точката $M' = b \cap a^2$ е проекция на пробода M на правата a с равнината α.

§ 3. РЕШЕНИЕ НА НЯКОИ АФИННИ ЗАДАЧИ

1. Основа на една права в π

Нека правата a пробожда основния сфероид в точки X и Y. Проекциите X' и Y' на тези точки са общите точки на кривите a^2 — проекция на правата a и k^2 — пресечната крива на равнината π с основния сфероид; в общия случай тези точки са отлични от точката L. Точките X' и Y' се получават от пресичането с π на образуващите на основния сфероид, които минават през точките X и Y и принадлежат на оня рой R^* от образуващи на сфероида, който не съдържа правата l. През точките X и Y минават и две прави от роя R, спрегнат на R^*, които пресичат k^2 в точки X_0 и Y_0. Точките X_0 и Y_0 ще наричаме основи на точките X и Y. Правата $a_0 = X_0 Y_0$ ще наричаме основа на правата a.

Построяването на точките X_0 и Y_0 при дадени кривата a^2 и пунктира й M^a (фиг. 4) ще стане въз основа на следните съображения. Равнината, определена от правите a и XX', пресича основния сфероид в правата XX' от роя R^* и следователно ще го пресича в още една права от роя R. Но тази равнина минава през точката Y, тъй като правата a минава през Y. Следователно тази права е YY_0, т. е. правите XX', a, YY_0 лежат в една равнина и техните стъпки X', M^a, Y^0 в π са колинеарни. Следователно



Фиг. 4

$$Y_0 \quad M^aX' \cap k^2,\ X_0 = M^aY' \cap k^2,\ a_0 \quad X_0^0Y_0.$$

2. Истинска големина на ъгъла между две прави

Под намиране на истинската големина на ъгъла между две прави разбираме намирането на две прави, лежащи в проекционната равнина, които сключват ъгъл, равен на ъгъла между дадените прави.

Теорема 3. Ъгълът между две прави a и b е равен на ъгъла между техните основи a_0 и b_0.

Доказателство. Съгласно с [2], ако са дадени прави p, p', q и q' от един рой R и φ е инволюцията в този рой с двойки съответни прави p, p' и q, q', то съществува точно един линеен комплекс, правите на който са трансверзалите на двойките съответни при φ прави. Прилагайки този резултат, като заменим правите p и q' с абсолютните прави f и g, а двойката прави q и q' — с правите XX_0 и YY_0 (означенията, взети от предната задача), получаваме, че комплексът $G(a)$ от абсолютния сноп линейни комплекси G съдържа и правата $X_0Y_0 = a_0$. По аналогичен начин получаваме, че линейният комплекс от прави $G(b)$ съдържа основата b_0 на правата b. Тогава съгласно определението за мярка на ъгъл между две прави от B_3 правите a_0 и b_0 сключват ъгъл, равен на ъгъла между правите a и b

3. Полюс на равнината π относно комплекса $G(a)$

Нека е дадена правата a. Основна задача се явява намирането на правите, успоредни на a и лежащи в дадена равнина. Ако a принадлежи на абсолютната конгруенция, тя е успоредна на произволна права от B_3, затова ще разгледаме по-интересния случай, когато a не принадлежи на нея.

Както видяхме по-рано, правата a определя точно един линеен комплекс $G(a)$ от абсолютния сноп комплекси G, на който тя принадлежи. Произволна равнина пресича комплекса $G(a)$ в един сноп прави. Центърът на този сноп се нарича полюс на тази равнина относно комплекса $G(a)$. Поставяме си задачата да намерим полюса на проекционната равнина π относно комплекса $G(a)$. Както е известно от предната задача, основата a_0 на правата a също принадлежи на комплекса $G(a)$. Тогава в π от комплекса $G(a)$ лежат правите a_0 и FG (с F и G са означени стъпките в π на абсолютните прави f и g). Тогава $P_\pi^a = a_0 \cap FG$. Произволна права в π, инцидентна с точката $P_{п}^{a}$, е успоредна на правата a.

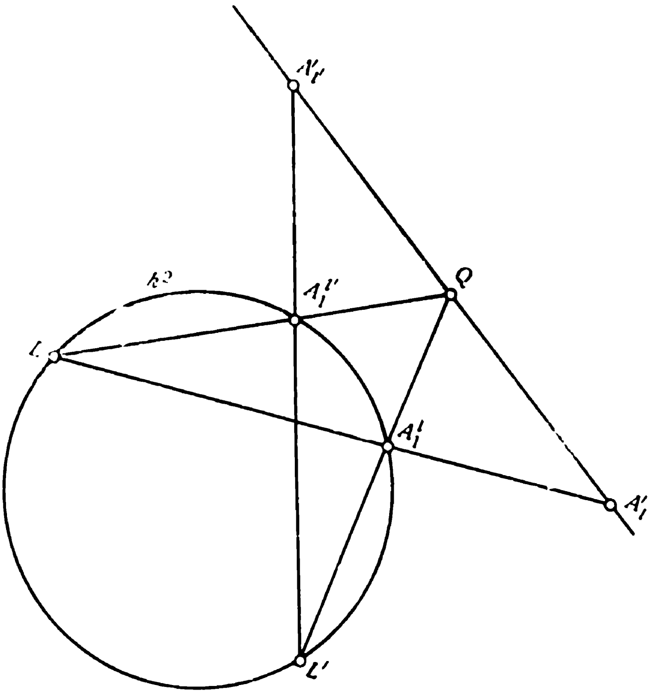
Нека t' е допирателната към основната крива k^2, която минава през точката $P_{п}^{a}$, а L' — допирната ѝ точка с k^2. Образуващите на основния сфероид от системата на роя, съдържащ правите f и g, които минават през точките X_0, Y_0, нека са XX_0, YY_0, а правата от същия рой, минаваща през точката L', нека означим с l'. Комплексът $G(a)$ възбужда в роя R инволюция φ с двойки съответни прави XX_0, YY_0; f, g; в тази инволюция правата l' е двоен елемент. Това следва от факта, че точката L' е двоен елемент в инволюцията φ_0 върху основната крива k^2, възбудена от φ при пресичането на роя R с равнината π. Но тогава съгласно [2] правата l' принадлежи на комплекса $G(a)$. Следователно $P_{п}^{a}=P_{п}^{l'}$.

След като показахме, че можем да намираме по дадена права a правата l' от роя R на основния сфероид, която принадлежи на комплекса $G(a)$, при решаването на поставената задача за намирането на полюса на произволна равнина относно даден комплекс от абсолютния сноп комплекси, правата, която задаваме, за да определим комплекса, винаги можем да избираме от роя R на основния сфероид. Преди да преминем към решаването на общия случай на поставената задача обаче, ще разработим един помощен метод на успоредното проектиране.

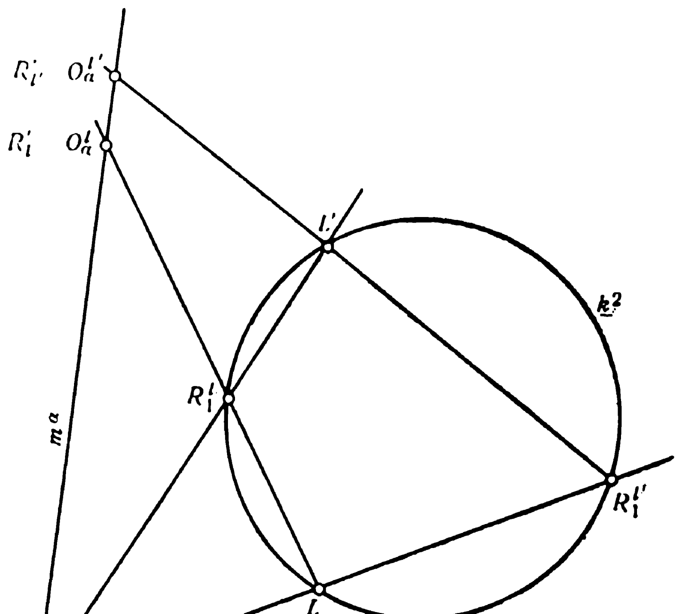
4. Смяна на направляващата на проектирането

Нека l' е права от роя R на основния сфероид, съдържащ правата l. С помощта на правите l и l' определяме по дефиниция 1 две успоредни проектирания. Да намерим връзката между основните и вторичните проекции на една точка A от пространството B_3 спрямо тези две проектирания. Основната и вторичната проекция на точката при успоредното проектиране с направляваща на проектирането l сега ще означим A'_l и A_1^l, а същите елементи на точката A при проектирането с направляваща l' — с $A'_{l'}$ и $A_1^{l'}$. Правата l пресича проекционната равнина π в точката L, а правата l' нека пресича π L'. През точката A прекарваме трансверзалата r на правите l и l', която сече тези прави съответно в точки 1 и 2. Равнините (r, l) и (r, l') са допирателни към основния сфероид и нека допирните им точки с него означим A_l и $A_{l'}$. Тези точки (по дефиниция 1) са центровете на проектиране за точката A в двете успоредни проектирания. Нека тяхната съединителна права пресича проекционната равнина π в точката Q. От това, че правите $A_lA_{l'}$, A_lA, $A_{l'}A$ пресичат π съответно в точките Q, A'_l, $A'_{l'}$, следва колинеарност на тези точки. Правите $A_lA_{l'}$, A_l1, $A_{l'}1$ пресичат π в точките Q, L, $A_1^{l'}$, следователно последните три точки са също колинеарни; накрая правите $A_lA_{l'}$, A_l2, $A_{l'}2$ пресичат π също в колинеарните точки Q, A_1^l, L'. Получените колинеарности ни позволяват (фиг. 5) по дадени например основна и вторична проекции на точката A в първото проектиране и вторичната проекция на A във второто проектиране да намерим основната проекция на същата точка във второто проектиране. Затова намираме точката $Q=A_1^lL'\cap A_1^{l'}L$ и тогава $A'_{l'}=A'_lQ\cap L'A_1^{l'}$.

В 3. от § 2 за основни определящи елементи на равнина избрахме дирята m^α и точката O_α, в която правата t^α, лежаща в α и принадлежаща на проектиращата конгруенция $F(l)$, пресича проекционната равнина. Сега да намерим определящите елементи на равнината α спрямо новия проек-



Фиг. 5



Фиг. 6

тиращ апарат. Необходимо е очевидно да намерим точката O'_a, в която правата t'_a от проектиращата конгруенция $F(l')$, лежаща в a, пресича проекционната равнина. Затова забелязваме, че точките O_a — и O'_a са двете основни проекции R'_l и $R'_{l'}$ на точката $R = t^a \cap t'^a$. Тогава и точката Q, с която са колинеарни точките R'_l и $R'_{l'}$, лежи на правата m^a. Следователно построението на O'_a (фиг. 6) е следното: $O_a L \cap k^2 = R_1^l$, $L'R_1^l \cap m^a = Q$, $QL \cap k^2 = R_1^{l'}$, $R_1^{l'} L' \cap m^a = R'_{l'} = O_a^{l'} = O'_a$.

5. Полюс на равнина относно комплекса $G(a)$

Нека l' е правата от оня рой R на основния сфероид, който съдържа правата l, и принадлежаща на комплекса $G(a)$ от абсолютния сноп линейни комплекси. Полюсът P_a^l на равнината a относно комплекса $G(a)$ или все едно от комплекса $G(l')$ е точката, в която се пресичат правите t'^a и $F_a G_a$ (F_a и G_a са прободите на абсолютните прави f и g с a, а t'^a е правата от проектиращата конгруенция $F(l')$ при успоредното проектиране с направляваща l', лежаща в a).

За да намерим проекцията $P_a'^{l'}$ на точката $P_a^{l'}$, ще намерим проекциите на правите $F_a G_a$ p и t'^a, които минават през тази точка. Построението извършваме в следната последователност: а) проекцията F'_a на точката F_a намираме, прилагайки резултатите от 7. на § 2, като $F_a = a \cap f$, и вземайки пред вид това, че абсолютната права f се изобразява в пунктираната крива (k^2, F); б) тъй като точките F и G са основи на точките F_a и G_a (вж. 1. на § 3), то $GF'_a \cap m^a = M^p$, $M^p F \cap k^2 = G'_a$. Кривата p^2, изобразяваща правата $p = F_a G_a$, съдържа точките M^p, O_a, F'_a, G'_a, L и се допира до правата t в точката L; в) намираме стъпката $M^{t'a}$ на правата t'_a в π. Нея построяваме, прилагайки конструкциите от 5. на 2 § (фиг. 1) като вземем пред вид, че $M^{t'a} = O'_a$; г) понеже точката L' е основа на точката L'^a, в която правата l' пробожда a, и точката L'^a лежи на правата t'^a, то точката $M^{t'a} L' \cap k^2 = (L'_a)'$ е проекция на точката L'_a. Следователно кривата $(t'^a)^2$, която е образ на правата t'^a, минава през точките O_a, O'_a, $(L'_a)'$ и се допира до правата t в точката L; д) търсената точка $P_a'^{l'}$ — проекция на полюса на a спрямо комплекса $G(a)$ — е четвъртата пресечна точка на кривите p^2 и $(t'^a)^2$ освен L, L, O_a. Както знаем, последната задача е линейна.

Правите, лежащи в a и минаващи през точката $P_a^{l'}$, са успоредни на правата l' и на всички прави от комплекса $G(l') = G(a)$. Техните образи са кривите от втора степен, принадлежащи на снопа с базисни точки L, O_a, $P_a'^{l'}$ и допиращи се до правата t в точката L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден, А. П. Пространство линейной конгруэнции. — Математический сборник, **24** (66), 1949, № 3.
2. Табаков, Д. Дескриптивна геометрия, част първа. Проективна геометрия. София, 1939.
3. Bereis, R., W. D. Klix. Parabolische Netzprojektion. — Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, **15**, 1966, No. 3, 453—458.

Постъпила на 1. IV. 1971 г.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ В БИАКСИАЛЬНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Лангов, Х. Пачев

(*Резюме*)

В биаксиальном пространстве B_3 выбирается прямая l, находящаяся в общем положении. Рассматривается комплекс $G(l)$ прямых, которые, согласно метрике, введенной Норденом, образуют с l угол мерой 0. Обозначим через $F(l)$ конгруэнцию прямых, принадлежащих $G(l)$ и пересекающихся с l. Конгруэнция $F(l)$ служит для проектирования элементов B_3 на произвольную неизотропную проекционную плоскость π.

Основным элементом при отображении служит прямая. Прямые B_3 отображаются на множество пунктирных (т. е. с выбранной точкой на них) кривых второй степени, имеющих общую точку и в ней общую касательную.

Плоскость α изображается ее следом m^α в π и точкой O_α, в которой плоскость π пересекается единственной прямой конгруэнции $F(l)$, лежащей в α.

Дана связь между старыми и новыми определяющими элементами, когда прямая l, задающая проектирование, заменяется прямой l' однопараметрической совокупности, содержащей l и абсолютные прямые B_3.

В работе решаются основные проективные и афинные задачи введенного параллельного проектирования.

PARALLEL PROJECTION IN A HYPERBOLIC BIAXIAL SPACE

A. Langov, H. Pačev

(*Summary*)

A line l in general position in the diaxial space B_3 is chosen. The complex of lines $G(l)$ is studied which according to the metric introduced by Norden makes with l an angle with a measure 0. The congruence of lines belonging to $G(l)$ and crossing l is denoted by $F(l)$. The congruence $F(l)$ serves for projection of the elements of B_3 on an arbitrary non-isotropic plane π.

The line is the basic element of the mapping. The lines of B_3 are projected on the set of dotted curves of second degree (i. e. curves with a point chosen on them) having a common point and a common tangent at it.

The plane α is mapped by its trace m^{α} in π and by the intersection point O_{α} of the plane π and the unique line of the congruence $F(l)$ lying in α.

The relationship between the old and the new determining elements is given for the case when the line l assigning the projection is replaced by a line l' from the one-parameter family of lines containing the line l and the absolute lines of B_3.

The basic projective and affine problems for the defined parallel projection are solved in the paper.