

АВТОНОМНЫЕ ЗАДАЧИ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Митко М. Цветанов

В [4] рассматривалась, среди других, задача о нижней грани функционала

$$(1) \quad F(x_1, x_2) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t)) dt$$

на совокупности пар (x_1, x_2) , для которых $x_j = (x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^n)$, $j=1, 2$, $x_1^i \in C^1[t_0, t_1]$, $x_2^i \in C[t_0, t_1]$, $i=1, 2, \dots, n$, при условиях

$$(2) \quad x_1(t_0) = x_0, \quad x_1(t_1) = x_1, \quad x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t)$$

и функция f предположена выпуклой по совокупности переменных (x_1, x_2) для всех $t \in [t_0, t_1]$ и непрерывной по совокупности (t, x_1, x_2) на $[t_0, t_1] \times R^n \times R^n$.

Там же доказано, что двойственный к функционалу (1), задаваемый формулой

$$F^*(\alpha, \mu_1, \mu_2) = \sup_{x_1, x_2} \left[\langle \alpha, x_1(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \bar{x}_1(t), d\mu_1(t) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle x_2(t), d\mu_2(t) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t)) dt \right],$$

имеет эффективную область определения* $\text{dom } F^* = \left\{ (\alpha, \mu_1, \mu_2) : \dot{\mu}_1 \text{ и } \mu_2 \text{ — абсолютно непрерывны, } \dot{\mu}_1(t_0) = \alpha, \dot{\mu}_1(t_1) = 0 \text{ и } \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, -\mu_1(t), \dot{\mu}_2(t)) dt < \infty \right\}$.

Далее, при условиях, что $x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t)$, $x_1(t_0) = x_0$, $x_1(t_1) = x_1$, $-\dot{\mu}_2 = \dot{\mu}_1$ и при обозначениях $x_1 = x$, $\mu_2 = y$ получено соотношение

* Под эффективной областью определения выпуклой функции $f(x)$ мы понимаем множество тех x , для которых $f(x) < \infty$, и обозначаем его через $\text{dom } f$.

$$\inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = \max_y \left[\langle x_1, y(t_1) \rangle - \langle x_0, y(t_0) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y(t), y(t)) dt \right],$$

где максимум справа берется по абсолютно непрерывным на отрезке $[t_0, t_1]$ функциям $y(t)$. (Здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в R^n).

От частных случаев задачи о нижней грани функционала (1) при условиях (2) наибольший интерес представляют следующие два:

а. Подынтегральная функция не зависит от x , т. е.

$$(3) \quad F(x) = \int_0^{t_1} f(t, \dot{x}(t)) dt, \quad x(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1,$$

где функционал рассматривается над множеством тех суммируемых функций u , для которых $\int_0^{t_1} u(t) dt \leq x_1$ при некоторых естественных ограничениях на f .

Этот случай, отмеченный тоже в [4], рассмотрен довольно исчерпательно в цикле работ Июффе и Тихомирова [1—3].

Применяя двойственность, получено следующее соотношение:

$$(4) \quad \inf_x \int_{(0,0)}^{(t_1,x_1)} f(t, \dot{x}(t)) dt = \max_y \left[\langle x_1, y \rangle - \int_0^{t_1} H(t, y) dt \right],$$

где $H(t, y) = \sup_u [\langle u, y \rangle - f(t, u)]$.

Итак, двойственная задача состоит в отыскании максимума рациональной функции (y не зависит от t).

В дальнейшем мы будем рассматривать случай

б) Подынтегральная функция не зависит явно от t , т. е.

$$(5) \quad F(x) = \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

при условиях, что

$$(6) \quad x \in C^1[0, T], \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1.$$

Функция f предполагается выпуклой, непрерывной и дважды непрерывно дифференцируемой по $(x, \dot{x})$, растущей на бесконечности по $\dot{x}$ быстрее линейной, и $f''_{\dot{x}\dot{x}} > 0$.

Задачу об отыскании нижней грани функционала F мы вложим в класс задач вида (5), где T меняется в интервале $(0, \infty)$.

Функцию

$$(7) \quad H(x, y) = \max_{\dot{x}} [\dot{x}y - f(x, \dot{x})]$$

называют функцией Гамильтона функции f .

Как известно, когда f не зависит от t явно, то вдоль каждой (непрерывной) экстремали $x_0(t)$ функционала (5) функция H сохраняет постоянное значение:

$$H(x_0(t), y_0(t)) = \text{const, где } y_0(t) = \dot{f}_x(x_0(t), \dot{x}_0(t)).$$

Функции $f(x, \dot{x})$ и $H(x, y)$ связаны соотношением (7). Поскольку f выпукла и непрерывна по x , то справедливо

$$(7') \quad f(x, \dot{x}) = \max_y [\dot{x}y - H(x, y)].$$

Используя (7'), мы можем придать задаче о нижней грани функционала (5), при условиях (6) следующий вид:

$$\inf_x \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt = \inf_x \int_0^T \max_y [\dot{x}(t)y - H(x(t), y)] dt \\ = \inf_x \int_0^T [\dot{x}(t)y(x(t), \dot{x}(t)) - H(x(t), \bar{y}(x(t), \dot{x}(t)))] dt.$$

Мы будем в дальнейшем обозначать для краткости $y(x(t), \dot{x}(t))$ через $y(t)$.

$$\text{Итак, } \inf_x \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt = \inf_x \int_0^T [\dot{x}(t)\bar{y}(t) - H(x(t), \bar{y}(t))] dt.$$

Для тех $x(t)$ и $\bar{y}(t)$, для которых $H(x, \bar{y}) = \text{const}$ (такие $x(t)$ существуют для каждого $T \in (0, \infty)$, например, пара $x_0(t), y_0(t)$ (на самом деле, только она)), мы можем выразить, вообще говоря, неоднозначно y как функция от x и H , т. е. $\bar{y} = \varphi(x, H)$. Так мы получаем, что

$$(8) \quad \int_0^T [\dot{x}(t)y(t) - H(x(t), y(t))] dt = \int_0^T [\dot{x}(t)\varphi(x(t), H) - H] dt \\ = \int_0^T \dot{x}(t)\varphi(x(t), H) dt - HT.$$

[Произведем замену переменной в (8):

$$(9) \quad \int_0^T \dot{x}(t)\varphi(x(t), H) dt - HT = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, H) dx - HT$$

(здесь мы рассматриваем φ как функция независимых переменных x и H). Обозначим

$$(10) \quad S(H) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, H) dx$$

(на самом деле $S = S(x_0, x_1, H)$).

Соотношение (9) справедливо и для кривой $x_0(t)$, на которой функционал (5) достигает минимума (поскольку тогда, как было отмечено выше, $H(x_0(t)), y_0(t) = \text{const}$).

Формула (4) дает возможность находить нижнюю грань функционала (3) с помощью рациональной функции

$$H(y) = \langle x_1, y \rangle - \int_0^{t_1} H(t, y) dt.$$

Оказывается, что в рассматриваемом нами случае замена задачи об $\inf_x \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt$ на задачу об отыскании экстремума рациональной функции тоже возможна. Здесь в качестве независимой выступает переменная H . Точнее, справедлива следующая теорема:

Теорема.

$$(11) \quad I(T) = \inf_{x \in (0, x_0)}^{(T, x_1)} \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt = S(H(T)) - H(T) \cdot T,$$

где $H(T)$ находится из соотношения

$$(12) \quad S'(H) = T.$$

Доказательство. Левую сторону (11) можем записать так:

$$(13) \quad \inf_{x \in (0, x_0)}^{(T, x_1)} \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt = \inf_x \int_0^T [\dot{x}(t) \bar{y}(t) - H(x, y(t))] dt.$$

Уравнение Эйлера для правой стороны (13) имеет вид

$$(14) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{dy}{dt} = 0.$$

Соотношение (12) можно преобразовать следующим образом:

$$(15) \quad 0 = S'(H) - T = \int_0^T \left[\frac{\partial \varphi(x(t), H)}{\partial H} \dot{x}(t) - 1 \right] dt.$$

Здесь x удовлетворяет соотношению $H(x, \bar{y}) = \text{const}$, следовательно, для этого x справедливо $\frac{\partial \varphi}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial y} = 1$ (напомним, что $\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{x}$). Но для этого H выполнено и соотношение (14), т. е. H из (14) и H из (15) одно и то же, что и дает справедливость равенства (11). Теорема доказана.

Замечание 1. Предложенный здесь метод позволяет решить и задачу об экстремуме функции

$$(11) \quad I(T) = \inf_{x \in (0, x_0)}^{(T, x_1)} \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) dt = S(H(T)) - TH(T)$$

по T , что получается классическими средствами.

Пример 1. $\int_{(0,1)}^{(T,2)} x^2 + \dot{x}^2 dt.$

Решение.

$$H(x, y) = \max_u \left[uy - \frac{u^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right] = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$

Отсюда $y = \pm \sqrt{2H + x^2},$

$$S(H) = \int_1^2 \sqrt{2H + x^2} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2H+4} - \frac{\sqrt{2H+1}}{2} + H \ln \left| \frac{2 + \sqrt{2H+4}}{1 + \sqrt{2H+1}} \right|$$

$T = S'(H) = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2H + x^2}}$ После простых выкладок получаем

$$H = \frac{5 - 4 \operatorname{ch} T}{2 \operatorname{sh}^2 T}$$

Отсюда видно, что $y_0(t) = \pm x_0(t)$ при $H=0$, т. е. при $\operatorname{ch} T = \frac{5}{4}$, и $H \rightarrow 0$ при $T \rightarrow$. Минимальное значение, принимаемое H , равняется $-\frac{1}{2}$ и получается при $\operatorname{ch} T = 2$. Для этого H имеем

$$I(T) = I(\operatorname{arcsch} 2) = \sqrt{3} - \frac{1}{2} [\ln(2 + \sqrt{3}) - \operatorname{arcsch} 2].$$

Замечание 2. Если функция f выпукла по $\dot{x}$ и вогнута по x , то, как правило, возникают сопряженные точки. Доказанная выше теорема справедлива и на этом случае. Наличие сопряженных точек выявляется, т. е. они получаются, в некотором смысле, с точностью до множителя.

Рассмотрим один пример такого типа.

Пример 2.

$$F(x) = \int_{(0,0)}^{(T,0)} (\dot{x}^2 - x^2) dt.$$

Решение.

$$H(x, y) = \sup_u [uy - u^2 + x^2] = \frac{y^2}{4} + x^2.$$

Отсюда $y = 2\sqrt{H - x^2}$. Очевидно $|y| \leq 2\sqrt{H}$, $H \geq 0$,

$$S(H) = 4(1 + 2k) \int_{-\sqrt{H}}^0 \sqrt{H - x^2} dx = (2k + 1)H\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$I(T) = \inf_H [H(2k + 1)\pi - HT] = \begin{cases} 0, & \text{если } T \leq (2k + 1)\pi, \\ -\infty, & \text{если } T > (2k + 1)\pi. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой получаем, что $k=0$, т. е. сопряженной точкой является точка $T=\pi$, откуда следует, что при $T<\pi$ $H=0$, т. е. $\dot{x}_0(t) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе, А. Д., В. М. Тихомиров. О двойственности в задачах вариационного исчисления. — Докл. АН СССР, 180, 1968, № 4, 789—792.
2. Иоффе, А. Д., В. М. Тихомиров. Двойственность выпуклых функций и экстремальных задач. — Успехи матем. наук, 23, 1968, № 6, 51—116.
3. Иоффе, А. Д., В. М. Тихомиров. О минимизации интегральных функционалов. — Функц. анализ и его прилож., 3, 1968, № 3, 61—70.
4. Цветанов, М. Двойственность в задачах вариационного исчисления и оптимального управления. — Изв. Мат. инст. БАН, 13, 1972, 277—317.

Поступила 24. II. 1972 г.

АВТОНОМНИ ЗАДАЧИ И ДВОЙНСТВЕНОСТ

Митко Цветанов

(Резюме)

Разглежда се задачата за намиране долната граница на функционала

$$I(T, x_0, x_1) = \int_{(0, x_0)}^{(T, x_1)} f(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

и се доказва, че тя може да се намери с помощта на рационална функция.

AUTONOMOUS PROBLEMS AND DUALITY

Mitko Cvetanov

(Summary)

The problem of finding the greatest lower bound of the functional

$$I(T, x_0, x_1) = \int_{(0, x_0)}^{(T, x_1)} f(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

is considered and it is proved that it can be found using a rational function.