БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ • ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ
BULLETIN DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Том (Tome) XV

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ФИКСИРОВАННЫМИ КОНЦАМИ

Митко М. Цветанов

1. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — вещественные линейные пространства, находящиеся в двойственности относительно (канонической) билинейной формы $\langle x, y\rangle$* (это мы будем обозначать $\mathfrak{X} \xleftarrow{\langle x,\, y\rangle} \rightarrow \mathfrak{Y}$). Пусть в пространстве $\mathfrak{X}$ задана функция $f(x)$, принимающая значения в расширенной области вещественных чисел, т. е.

$$f(x)\in[-\infty, +\infty].$$

С функцией $f(x)$ мы связываем два множества

$$\operatorname{dom} f = \{x\in\mathfrak{X} : f(x)<\infty\},$$

$$\operatorname{det} f = \{(x, \lambda) : f(x)\leqq\lambda,\ x\in\operatorname{dom} f,\ \lambda\in R^1\}\subset\mathfrak{X}\times R^1,$$

называемые соответственно эффективной областью определения и надграфиком (или эпиграфом) функции f.

Мы назовем функцию f выпуклой, если $\operatorname{det} f$ выпукло, и замкнутой (полунепрерывной снизу), если $\operatorname{det} f$ замкнуто в $\mathfrak{X}\times R^1$.

Функцию f называют собственной (или нетривиальной), если $f(x) > -\infty$ для всех $x\in\mathfrak{X}$ и $f(x)<\infty$ по крайней мере для одного $x\in\mathfrak{X}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только нетривиальные функции.

Двойственной по Юнгу, или преобразованием Юнга функции f, называют функцию f^*, определяемую формулой

$$f^*(y) = \sup_x [\langle x, y\rangle - f(x)]. \tag{1}$$

Для любой функции f функция f^* выпукла и замкнута.

Из (1) следует важное неравенство

$$f(x)+f^*(y)\geqq\langle x, y\rangle, \tag{2}$$

называемое неравенством Юнга.

Если

* Подробно об этом см. [1].

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2,\quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2,\quad \mathfrak{X}_1 \xleftrightarrow{\langle x_1,\, y_1\rangle} \mathfrak{Y}_1,\quad \mathfrak{X}_2 \xleftrightarrow{\langle\langle x_2,\, y_2\rangle\rangle} \mathfrak{Y}_2,$$

то (1) и (2) принимают, соответственно, вид

$$(1') \qquad f^*(y_1, y_2) = \sup_{x_1,\, x_2} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle - f(x_1, x_2)],$$

$$(2') \qquad f(x_1, x_2) + f^*(y_1, y_2) \geqq \langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle$$

для всех $x_i \in \mathfrak{X}_i$, $y_i \in \mathfrak{Y}_i$, $i = 1, 2$.

При условии, что $x_2 = Ax_1$, где $A : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$ — линейный оператор и $A^* : \mathfrak{Y}_2 \to \mathfrak{Y}_1$ — его сопряженный, т. е. $\langle\langle Ax_1, y_2\rangle\rangle = \langle x_1, A^*y_2\rangle$, то

$$f(x_1, Ax_1) + f^*(-A^*y_2, y_2) \geqq \langle x_1, -A^*y_2\rangle + \langle\langle Ax_1, y_2\rangle\rangle = 0$$

для всех $x_1 \in \mathfrak{X}_1$, $y_2 \in \mathfrak{Y}_2$, откуда следует, что

$$(3) \qquad \inf_{x \in \mathfrak{X}_1} f(x, Ax) + \inf_{y \in \mathfrak{Y}_2} f^*(-A^*y, y) \geqq 0.$$

При некоторых условиях (они рассматриваются подробно в [3]) доказывается, что в (3) имеет место равенство.

В [3], между прочим, доказано, что если рассматривается задача о нижней грани выпуклой замкнутой функции $f(x_1, x_2)$ при условиях, что $x_2 = Ax_1$, $x_1 \in X$, где $X \subset \mathfrak{X}_1$ — некоторое выпуклое замкнутое множество, и существует точка $(x_0, Ax_0) \in \operatorname{dom} \tilde{f}$, $x_0 \in X$, в которой функция f непрерывна, а

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \delta_{X \times \mathfrak{X}_2}(x_1, x_2)$$

(называемая при этих ограничениях на f N-функцией), то справедливо следующее соотношение:

$$\inf_x \tilde{f}(x, Ax) + \min_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) = 0.$$

Основные понятия теории двойственности выпуклых функций изложены в обзорной статье [1], где имеется и подробная библиография.

2. В [4] рассматривалась, среди других, задача классического вариационного исчисления, состоящая в отыскании нижней грани функционала

$$(4) \qquad F(x_1, x_2) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t))dt$$

при условиях, что

$$(5) \qquad \begin{gathered} x_j = (x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n), \quad j = 1, 2, \quad x_1^i \in C^1[t_0, t_1], \quad x_2^i \in C[t_0, t_1], \\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad x_1(t_0) = x^0, \quad x_1(t_1) = x^1, \quad x_2(t) = \frac{d}{dt} x_1(t) \end{gathered}$$

и функция f предполагалась выпуклой по совокупности переменных (x_1, x_2) для всех $t \in [t_0, t_1]$ и непрерывной по совокупности (t, x_1, x_2) на

$[t_0, t_1] \times R^n \times R^n$. Там же доказано, что двойственный к (4) функционал, задаваемый формулой

$$F^*(a, \mu_1, \mu_2) \quad \sup_{x_1,\, x_2} \left[\langle a, x_1(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle x_1(t),\ d\mu_1(t) \rangle \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} x_2(t),\ d\mu_2(t) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} f(t,\ x_1(t),\ x_2(t) dt \right],$$

имеет эффективную область определения

$$\operatorname{dom} F^* \quad \{(a, \mu_1, \mu_2):\ \mu_1 \text{ и } \mu_2 \text{ — абсолютно непрерывны},$$

(6) $$\mu_1(t_0) \quad a,\ \mu_1(t_1) \quad 0 \text{ и } \int_{t_0}^{t_1} f^*(t,\ -\mu_1(t),\ \mu_2(t)) dt < \quad \}.$$

(Здесь функция f^* — двойственна к функции f, т. е.

$$f^*(t, y_1, y_2) \quad \sup_{x_1,\, x_2} [\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle - f(t, x_1, x_2)],$$

где $\ ,\ $ есть обыкновенное скалярное произведение в R^n.) Далее, при условиях (5) и при обозначениях — $\mu_1(t) \quad \mu_2(t) \quad y(t)$, $x_1(t) \quad x(t)$ получено соотношение

(7) $$\inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad \max_y \left[\langle x^1, y(t_1) \rangle - \langle x^0, y(t_0) \rangle - \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y(t), y(t)) dt \right],$$

где максимум справа берется по всем абсолютно непрерывным на отрезке $[t_0, t_1]$ функциям $y(t)$.

Одна из важнейших лемм, на которых опирается доказательство соотношения (6), следующая:

Лемма 1. Пусть в пространстве $C^1[t_0, t_1]$ задан функционал

(8) $$F(x) \quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t)) dt,$$

где подынтегральная функция f предположена выпуклой по x для всех $t \in [t_0, t_1]$ и непрерывной по (t, x) на $[t_0, t_1] \times R^1$. Тогда двойственный к (8) функционал, задаваемый формулой

(9) $$F^*(\mu) \quad F^*(a, \mu) \quad \sup_x \left[a x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t) d\mu(t) - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t)) dt \right],$$

удовлетворяет условию: если $F^*(\mu) < \infty$, то μ — абсолютно непрерывная функция (мера).

Теперь мы докажем одну лемму, которая является обобщением леммы 1 и понадобится нам в дальнейшем.

Введем сначала необходимые обозначения.

Пусть в пространстве $C^k[t_0, t_1]$ k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ функций $x(t)$ задан функционал

$$F(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt,$$

где функция f выпукла по x для всех $t\in[t_0, t_1]$ и непрерывна по совокупности (t, x) на $[t_0, t_1]\times R^1$.

Двойственный к F функционал задается формулой

$$(10)\qquad F^*(\mu) = F^*(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, \mu) = \sup_x \left[\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)d\mu(t) - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt \right],$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ — постоянные, а μ — регулярная мера (которую мы, для определенности, будем считать непрерывной справа).

Выражение

$$(11)\qquad x, \mu = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)d\mu(t),$$

как известно, есть общий вид непрерывного линейного функционала, заданного на $C^k[t_0, t_1]$. (В дальнейшем мы, для простоты, будем писать вместо $C^k[t_0, t_1]$ и $C[t_0, t_1]$ просто C^k и C соответственно).

Мы уже готовы приступить к формулировке и доказательству леммы.

Лемма 2. Если $F^*(\mu)<\infty$, то $\mu^{(k)}$ — абсолютно непрерывная функция (мера).

Доказательство. Пусть, для определенности, $F^*(\mu)>0$. Докажем сначала, что μ — абсолютно непрерывна.

По неравенству Юнга

$$(12)\qquad \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)d\mu(t) \leq F(x) + F^*(\mu).$$

Рассмотрим линейный функционал (11). Допустим, что мера μ не абсолютно непрерывна. Тогда она состоит из двух составляющих: μ_1 и μ_2, где μ_1 — абсолютно непрерывная часть, а $\mu_2 = \mu - \mu_1$ — сингулярная часть и функция скачков. Притом по допущению $\mu_2 \not\equiv 0$ (μ_2 сосредоточена на множестве A меры нуль) и, следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)d\mu(t) = \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)d\mu_1(t) + \int_A x^{(k)}(t)d\mu_2(t).$$

Для любого $\varepsilon>0$ множество A можно покрыть системой интервалов Δ общей длиной $\nu(\Delta)<\varepsilon$.

Обозначим $M = \max_{\substack{|x|\le N \\ t_0\le t\le t_1}} |f(t, x)|$, где $N>0$ — произвольное фиксированное число. Обозначим через X множество

$$X = \{x\in C^k:\ |x^{(k)}(t)| \leq N \quad \text{при} \quad t\in A,$$

$$x^{(i)}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin A, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k\}$$

(очевидно, что для любого $x\in X$ $|x(t)| \leq N$). Пусть $f(t, 0) = 0$ для всех $t\in[t_0, t_1]$.

Поскольку мера μ непрерывна справа и регулярна, то можно считать, что $t_0 \notin A$ и, следовательно, $x^{(i)}(t_0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда

$$\langle x, \mu\rangle = \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)d\mu_1(t) + \int_A x^{(k)}(t)d\mu_2(t)$$

$$\leq F(x) + F^*(\mu) \leq M\varepsilon + F^*(\mu)$$

и

(13)
$$\langle x, \mu\rangle \geq -\sup_{x\in X}\int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)d\mu_1(t) + \sup_{x\in X}\int_A x^{(k)}(t)d\mu_2(t) \geq$$

$$\geq -\varepsilon N(\mu_1(t_1) - \mu_1(t_0)) + N \operatorname{Var} \mu_2|_A \leq F^*(\mu) + M\varepsilon.$$

Отсюда, сделав предельный переход $\varepsilon \to 0$, получаем

(13′)
$$N \operatorname{Var} \mu_2|_A \leq F^*(\mu).$$

Но, ввиду произвольности N, если предположить $\operatorname{Var} \mu_2|_A \neq 0$, то левую сторону (13) можно сделать произвольно большой, в то время как правая остается фиксированным числом.

Итак, допущение, что $\mu_2 \neq 0$, привело нас к противоречию, следовательно, μ — абсолютно непрерывная мера, что дает нам возможность написать

(14)
$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)d\mu(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)\dot{\mu}(t)dt$$

и согласно (12)

(15)
$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)\mu(t)dt \leq F(x) + F^*(\mu).$$

Неравенство (15) с учетом ограничений, наложенных на f, дает, что функционал (14) ограничен в топологии пространства C на множестве A^k функций с непрерывными производными k-го порядка, плотном в C, поэтому он однозначно продолжается до непрерывного линейного функционала на C, т. е. существует такой непрерывный линейный функционал

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} x(t)dz(t),$$

заданный на пространстве C, что для всех $x \in A^k$ справедливо

$$(16) \qquad \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)\dot{\mu}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)dz(t).$$

Используя неравенство (12), можно доказать, что мера z абсолютно непрерывна. Доказательство мало отличается от доказательства абсолютной непрерывности меры μ, и мы его приводить не будем.

Абсолютная непрерывность меры z дает нам возможность записать (16) следующим образом:

$$(16') \qquad \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^{(i)}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)\dot{\mu}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)\dot{z}(t)dt.$$

Обозначим $z(t) = \varphi^{(k)}(t)$. Тогда

$$(17) \qquad \int_{t_0}^{t_1} x(t)\varphi^{(k+1)}(t)dt = x(t)\varphi^{(k)}(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\varphi^{(k)}(t)dt = x(t)\varphi^{(k)}(t)$$

$$- \dot{x}(t)\varphi^{(k-1)}(t) + \ldots + (-1)^{k-1}x^{(k-1)}(t)\dot{x}(t)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$+ (-1)^k \int_{t_0}^{t_1} x^{(k)}(t)\varphi(t)dt.$$

Поскольку (16) и (17) выполнены для всех $x \in A^k$, то отсюда следует, что

$$(18) \qquad \begin{aligned} &\varphi^{(k)}(t_0) = -a_0, \quad \varphi^{(k-1)}(t_0) = a_1, \ldots, \quad \varphi(t_0) = (-1)^k a_{k-1}, \\ &\varphi^{(i)}(t_1) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad \varphi(t) = (-1)^k \dot{\mu}(t). \end{aligned}$$

Но, поскольку φ k раз дифференцируема (непрерывно), то и μ будет k раз непрерывно дифференцируема и $\mu^{(k)}$ — абсолютно непрерывна (это мы коротко будем обозначать $\mu \in B^k$), и функционал $\langle x, \mu \rangle$ принимает вид

$$\langle x, \mu \rangle = \int_{t_0}^{t_1} x(t)[(-1)^k \mu^{(k+1)}(t)]dt.$$

Только что доказанная лемма дает нам возможность записать равенство (10) следующим образом:

$$F^*(\mu) = \sup_x \int_{t_0}^{t_1} \{x(t)[(-1)^k \mu^{(k+1)}(t)] - f(t, x(t))\}dt.$$

Нам надо еще установить, что имеет место равенство

$$\sup_x \int_{t_0}^{t_1} (\qquad) dt \quad \int_{t_0}^{t_1} \sup_x (\qquad) dt. \tag{19}$$

Но справедливость этого равенства установлена в [4] в случае, когда $x \in C$, т. е. при меньших ограничениях, откуда и следует, что (19) имеет место. Следовательно,

$$F^*(\mu) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sup_x \{x[(-1)^k \mu^{(k+1)}(t)] - f(t, x)]\} dt \quad \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^k \mu^{(k+1)}(t)) dt.$$

Замечание. Лемму 2 можно, очевидным образом, обобщить на случай, когда $x \in C_n^k$, т. е. $x \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

3. Рассмотрим теперь задачу о нижней грани функционала

$$F(x_1, x_2, x_3) \quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) dt, \tag{20}$$

где подынтегральная функция f предполагается выпуклой по совокуп ности переменных (x_1, x_2, x_3) для всех $t \in [t_0, t_1]$ и непрерывной по совокупности (t, x_1, x_2, x_3) на $[t_0, t_1] \times R^1 \times R^1 \times R^1$ при условиях, что $x_1 \in C^2$, $x_2 \in C^1$, $x_3 \in C$,

$$x_i(t_0) \quad x_i^0, \; x_i(t_1) \quad x_i^1, \; i \quad 1, 2, \quad x_j(t) \quad \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} x_1(t), \; j \quad 2, 3. \tag{21}$$

Двойственный к (20) функционал имеет следующий вид:

$$F^*[(\alpha, \beta, \mu_1), (\gamma, \mu_2), \mu_3] \quad \sup_{x_1, x_2, x_3} \left[\alpha x_1(t_0) + \beta \dot{x}_1(t_0) - \int_{t_0}^{t_1} x_1(t) d\mu_1(t) - \gamma x_2(t_0) \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t_1} x_2(t) d\mu_2(t) + \int_{t_0}^{t_1} x_3(t) d\mu_3(t) - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) dt \right].$$

Используя лемму 2, мы получаем, что

$$\operatorname{dom} F^* \quad \{(\alpha, \beta, \gamma, \mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ — абсолютно непрерывны и}$$
$$\mu_1(t_0) \quad \beta, \; \mu_1(t_0) \quad -\alpha, \; \mu_2(t_0) \quad \gamma, \; \mu_1(t_1) \quad \mu_1(t_0) \quad \mu_2(t_1) \quad 0 \text{ и}$$
$$\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \; \mu_1(t), -\mu_2(t), \mu_3(t)) dt < \quad \}.$$

Здесь

$$f^*(t, y_1, y_2, y_3) \quad \sup_{x_1, x_2, x_3} [x_1 v_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - f(t, x_1, x_2, x_3)]. \tag{22}$$

Из равенства (22) получаем

$$f(t, x_1, x_2, x_3)+f^*(t, y_1, y_2, y_3)\geqq x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

для всех $x_i, y_i \in R^1$, $i=1, 2, 3$ (неравенство Юнга). Проинтегрируем это неравенство на отрезке $t_0 \leqq t \leqq t_1$:

$$(23)\qquad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t))dt+\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y_1(t), y_2(t), y_3(t))dt \geqq$$

$$\geqq \int_{t_0}^{t_1} [x_1(t)y_1(t)+x_2(t)y_2(t)+x_3(t)y_3(t)]dt.$$

На самом деле это и есть

$$(24)\qquad F(x_1, x_2, x_3)+F^*(y_1, y_2, y_3) \geqq \int_{t_0}^{t_1} [x_1(t)y_1(t)+x_2(t)y_2(t)+x_3(t)y_3(t)]dt,$$

где $y_1=\mu_1$, $y_2=-\mu_2$, $y_3=\mu_3$.

Положив $x_2(t)=\dot{x}_1(t)$, $x_3(t)=\ddot{x}_1(t)$, $x_1(t)=x(t)$, получаем из (23)

$$(25)\qquad \int_{t_0}^{t_1} [x(t)y_1(t)+\dot{x}(t)y_2(t)+\ddot{x}(t)y_3(t)]dt.$$

Предположив, что y_1, y_2 и y_3 достаточное число раз дифференцируемые функции (не имея ввиду (24)), мы можем проинтегрировать (25) по частям:

$$(26)\qquad \int_{t_0}^{t_1} [x(t)y_1(t)+\dot{x}(t)y_2(t)+\ddot{x}(t)y_3(t)]dt = | x(t)y_2(t)+\dot{x}(t)y_3(t)$$

$$-x(t)\dot{y}_3(t)\,|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1} x(t)[y_1(t)-\dot{y}_2(t)+\ddot{y}_3(t)]dt.$$

Положим в (26) $y_3(t)=y(t)$, $y_2(t)=2\dot{y}(t)$, $y_1(t)=\ddot{y}(t)$ (если используем (24), это означает, что $2\dot{\mu}_3=-\mu_2=2\mu_3$). Это дает (вместе с (23))

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))dt+\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \ddot{y}(t), 2\dot{y}(t), y(t))dt \geqq | x(t)\dot{y}(t)+\dot{x}(t)y(t)|_{t_0}^{t_1}$$

для всех $x \in C^2$ и $y \in B^1$ (т. е. таких, что $\dot{y}$ — абсолютно непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$ функция), откуда

$$(27)\qquad \inf_{x\in C^2}\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))dt \geq \sup_{y\in B^1} [\, x(t)\dot{y}(t)+\dot{x}(t)y(t)|_{t_0}^{t_1}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, \ddot{y}(t), 2\dot{y}(t), y(t))dt].$$

Как и в [4], доказывается, что при верхних ограничениях на f в (27) супремум можно заменить максимумом.

4. Рассмотрим теперь задачу о нижней грани функционала

$$(28)\qquad F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))dt,$$

где функция f выпукла по совокупности переменных $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ для всех $t\in[t_0, t_1]$ и непрерывна по совокупности $(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ на $[t_0, t_1]\times R^1\times R^1\times \ldots \times R^1$, при условиях, что $x_i\in C^{n-i}$,

$$i = 0, 1, \ldots, n-1,\ x_n\in C,\ x_i(t_0) = x_i^0,\ x_i(t_1) = x_i^1\ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Для нахождения двойственного к (28) функционала мы будем исходить из двойственной функции, как это сделали выше ((23)—(25)), и использовать лемму 2. Имеем

$$f(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)+f^*(t, y_0, y_1, \ldots, y_n) \geq x_0y_0+x_1y_1+\ldots+x_ny_n).$$

Проинтегрируем это неравенство на отрезке $t_0\leq t\leq t_1$:

$$(29)\qquad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)dt + \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t))dt$$

$$\geq \int_{t_0}^{t_1} [x_0(t)y_0(t)+x_1(t)y_1(t)+\ldots+x_n(t)y_n(t)]dt.$$

Положим $x_i(t) = \frac{d^i}{dt^i}x_0(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_0(t) = x(t)$. В предположении, что функции $y_i(t)$ достаточное число раз дифференцируемы, проинтегрируем правую часть (29) несколько раз по частям:

$$\int_{t_0}^{t_1} [x(t)y_0(t)+\dot{x}(t)y_1(t)+\ldots+x^{n}(t)y_n(t)]dt$$

$$= |\, x(t)y_1(t)+x(t)y_2(t)+\ldots+x^{(n-1)}(t)y_n(t)|_{t_0}^{t_1}$$

$$-|\, x(t)\dot{y}_2(t)+\dot{x}(t)\dot{y}_3(t)+\ldots+x^{(n-2)}(t)\dot{y}_n(t)\,|_{t_0}^{t_1}$$

$$+|\, x(t)\ddot{y}_3(t)+\dot{x}(t)\ddot{y}_4(t)+\ldots+x^{(n-3)}(t)\ddot{y}_n(t)\,|_{t_0}^{t_1}$$

$$+(-1)^{n-1}\,|\,x(t)y^{(n-1)}(t)\,|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}x(t)[\,y_0(t)-\dot{y}_1(t)+ \qquad +(-1)^n y_n^{(n)}(t)]dt$$

$$|\,x(t)[y_1(t)-\dot{y}_2(t)+y_3(t)- \qquad +(-1)^{n-1}y_n^{(n-1)}(t)]+\dot{x}(t)[\,y_2(t)$$

$$-\dot{y}_3(t)+ \qquad +(-1)^{n-2}y_n^{(n-2)}(t)]+ \qquad +x^{(n-1)}(t)y_n(t)\,|_{t_0}^{t}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}x(t)[y_0(t)-y_1(t)+y_2(t)- \qquad +(-1)^n y_n^{(n)}(t)]dt.$$

Далее, в зависимости от n, имеем:

а) n — нечетное число. Тогда под знаком интеграла мы имеем четное число $(n+1)$ слагаемые:

$$(30) \qquad \int_{t_0}^{t_1}x(t)[\,y_0(t)-y_1(t)+y_2(t)- \qquad -y_n^{(n)}(t)]dt.$$

Положив $y_n(t)=y(t)$, $y_{n-1}(t) \quad y(t),\ldots,y_0(t) \quad y^{(n)}(t)$, получаем, что интеграл (30) равен нулю. Внеинтегральное выражение упрощается и принимает вид

$$(31) \qquad x(t)y^{(n-1)}(t)+\ddot{x}(t)y^{(n-3)}(t)+ \qquad +y(t)x^{(n-1)}(t)\,|_{t_0}^{t_1}.$$

Из этих результатов описанным выше путем получаем

$$(32) \qquad \inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \quad \max_y \Bigg[\, x(t)y^{(n-1)}(t)+$$

$$+x^{(n-1)}(t)y(t)\,|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \ldots, y(t))dt\Bigg]$$

и максимум справа берется по всем функциям $y \in B^{n-1}$.

б) n — четное число. В этом случае в подынтегральном выражении имеем нечетное число слагаемых. Для того, чтобы оно равнялось нулю, положим

$$y_n(t)=y(t),\ y_{n-1}(t) \quad \dot{y}(t),\ldots,\ y_1(t) \quad 2y^{(n-1)}(t),\ y_0(t) \quad y^{(n)}(t).$$

Внеинтегральное выражение в этом случае принимает вид

$$|\,x(t)y^{(n-1)}(t)+\dot{x}(t)y^{(n-2)}(t)+\dot{x}(t)y^{(n-4)}(t)+ \qquad +x^{(n-1)}(t)y(t)\,|_{t_0}^{t_1}.$$

Связь между исходной и двойственной задачами получается следующей:

$$(33) \qquad \inf I(x)=\inf_x \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt \quad \max_{y\in B^{n-1}} [\,|\,x(t)y^{(n-1)}(t)$$

$$+\dot{x}(t)y^{(n-2)}(t)+\ddot{x}(t)y^{(n-4)}(t)+\ldots+x^{(n-1)}(t)y(t)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t),\ 2y^{(n-1)}(t),\ y^{(n-2)}(t), \ldots,\ y(t))dt].$$

5. К тем же самым результатам приходим и в случае, когда требуется найти нижнюю грань функционала (4) (соответственно (28)) при условии, что x — абсолютно непрерывна (соответственно $x \in B^{n-1}$). Точнее говоря, лемма 1 и лемма 2 справедливы и для этого случая. Доказательство последнего утверждения мы проводить не будем, поскольку оно совпадает с доказательством леммы 2 (соответственно с первой ее частью). Отметим только следующее: если в (8) $x \in AC$, то в линейном функционале

$$ax(t_0)+\int_{t_0}^{t_1} x(t)y(t)dt,$$

представляющем собой общий вид линейного непрерывного функционала заданного на AC, где $a \in R^1$, $y \in L^\infty$, $y(t)$ при верхних ограничениях на f удовлетворяет условию: если $F^*(y)<\infty$, то $y \in AC$ и $y(t_0) - a$, $y(t_1)$ 0.

Связи между основными и двойственными задачами имеют соответственно вид (7), (32) и (33).

Отметим, что в доказательстве леммы 2 мы получили, что $\dot{\mu}(t_1)$ $\mu(t_1)$ $\mu^{(k)}(t_1)$ 0, не накладывая при этом на x никаких ограничений. Однако для задачи с фиксированными концами мы получили, что двойственная есть задача со свободными концами.

Задачами, подобными (4)—(5), занимался в последнее время американский математик Р. Т. Рокафеллар, в предположениях, что $x \in AC$, $\dot{x} \in L^1$, существование функции $l(x(t_0), x(t_1))$, находящейся вне интеграла, и при использовании введенного им понятия нормального выпуклого функционала [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе, А. Д., В. М. Тихомиров. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. — Успехи матем. наук, **23**, 1968, № 6, 5—116.
2. Rockafellar, R. T. Conjugate convex functions in optimal control and the calculs of variations. — J. Math. Analysis and Applic., **32**, 1970, No. 1, 174—223.
3. Цветанов, М. М. Двойственность в экстремальных задачах.— Укр. матем. ж., **23**, 1971, № 2, 201—218.
4. Цветанов, М. М. Двойственность в задачах вариационного исчисления и оптимального управления. — Изв. Мат. инст. БАН, **13**, 1972, 277—317.

Поступила 24. II. 1972 г.

ДВОЙНСТВЕНОСТ ВЪВ ВАРИАЦИОННИ ЗАДАЧИ С ФИКСИРАНИ КРАИЩА

Митко Цветанов

(Резюме)

Разглежда се задачата за намиране инфимума на интегралния функционал

$$I(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt$$

(с фиксирани краища) при $x \in C^n[t_0, t_1]$ — пространство от функции с непрекъсната n-та производна. Прилага се методът на двойнствеността и се получава, че при някои условия, наложени на f, двойнственият функционал

$$J(y)=\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t), ay^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \ldots, y(t))dt$$

(със свободни краища) достига минимум за някое $y_0 \in B^{n-1}[t_0, t_1]$ — пространство от функции с абсолютно непрекъсната $(n-1)$-ва производна, а $a=\frac{(-1)^n+3}{2}$ и

$$\inf_{x \in C^n} I(x)+\min_{y \in B^{n-1}} J(y)\quad 0.$$

DUALITY IN VARIATION PROBLEMS WITH FIXED ENDPOINTS

Mitko Cvetanov

(Summary)

The problem of finding the greatest lower bound of the integral functional

$$I(x)\quad \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), x(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt$$

(with fixed endpoinds) is considered; x is an element of the space $C^n[t_0, t_1]$ of the functions with continuous derivative of n-th order. The duality method is applied and it is found that under certain conditions imposed on f the dual functional

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t, y^{(n)}(t), \alpha y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \ldots, y(t))dt$$

(with free endpoints) reaches its minimum for some y_0 in the space $B^{n-1}[t_0, t_1]$ of the functions with absolutely continuous derivative of $(n-1)$-th order:

$$\alpha = \frac{(-1)^n + 3}{2}$$

and

$$\inf_{x \in C^n} I(x) + \min_{y \in B^{n-1}} J(y) > 0.$$