

ВЪРХУ ВРЪЗКАТА МЕЖДУ СВЪРЗАНОСТТА В ДВУМЕРНОТО РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО И ВЪТРЕШНАТА СВЪРЗАНОСТ НА ЕДНА ТРИТЪКАН

Стефан Г Стефанов

Тритъкан в многообразието X_2 наричаме съвкупността от три различни еднопараметрични семейства линии, зададени с уравнението

$$(1) \quad a_{ijk} du^i du^j du^k = 0.$$

Ще разглеждаме само регулярни тритъкани, т. е. такива, за които:

- 1) през всяка точка от X_2 минават 3 криви от различни семейства;
- 2) във всяка точка от X_2 кривите имат различни направления;
- 3) всяка линия от едно семейство пресича всяка линия от друго само веднъж.

От уравнение (1) е ясно, че всяка тритъкан може да се зададе еднозначно чрез задаването на един симетричен псевдотензор

$$(2) \quad a_{ijk} = 6\lambda v_{(i} v_j v_{k)},$$

където v_a са фиксирани вектори, а λ — произволен скаларен множител.

Обратно, на всяка регулярна тритъкан съответствува точно един псевдотензор от вида (2).

Тритъканта наричаме ориентирана, ако нейните семейства са наредени. Ако с x_i означим направляващите псевдовектори на тритъканта, то псевдотензорът на тритъканта a_{ijk} се определя от равенството

$$a_{ijk} = 6x_{(i} x_j x_{k)}.$$

Нека е зададено двумерното Риманово пространство V_2 с метричен тензор g_{ij} . Нека на всяка точка M от V_2 съпоставим вектори v^i ($i=1, 2, 3$), удовлетворяващи условията

$$g_{ji} v^i v^j = 1,$$

$$\epsilon_{ij} v^i v^j = \langle v v \rangle \neq 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Тук и по-нататък свалянето и вдигането на индексите става по следното правило:

$$v_i = \varepsilon_{si} v^s, \quad v^i = \varepsilon^{is} v_s,$$

където ε_{ij} и ε^{ij} са взаимни дискриминантни бивектори ($\varepsilon_{12} = \sqrt{g} = \sqrt{g_{12}^2 - g_{11} g_{22}}$, $\varepsilon_{is} \varepsilon^{js} = \delta_i^j$).

Да означим

$$a_{ijk} = v_i v_j v_k + v_j v_k v_i + v_k v_i v_j$$

или

$$a_{ijk} = v_i v_j v_k + v_j v_k v_i + v_k v_i v_j.$$

В сила е равенството

$$a_{ijk} v^i v^j v^k = 0,$$

което означава, че a_{ijk} е представител на псевдотензора, съответстващ на тритъкан с направляващи вектори v^i ($\alpha = 1, 2, 3$). Номерирането на направляващите вектори означава, че тритъканта е ориентирана, а ориентираните ъгли между тях означаваме с

$$(v, v) = \psi,$$

т. е.

$$\langle v, v \rangle = v_i v^i = \sin \psi.$$

Имайки пред вид симетричността на тензора

$$a^{ijk} = \varepsilon^{ip} \varepsilon^{jq} \varepsilon^{kr} a_{pqr}$$

по всичките му индекси, можем да напишем

$$\varepsilon_{jk} a^{ijk} = \sin \psi v_i + \sin \psi v^i + \sin \psi v^i = 0.$$

Очевидно всяка нормировка на векторите v^i от вида

$$(3) \quad \tilde{x}^i = \varrho \sin \psi v^i$$

притежава свойството

$$(4) \quad \tilde{x}^i + \tilde{x}^i + \tilde{x}^i = 0.$$

Като следствие от (4) получаваме

$$\varepsilon^{ij} = 2 \tilde{x}^{[i} \tilde{x}^{j]} = 2 \tilde{x}^{[i} \tilde{x}^{j]} = 2 \tilde{x}^{[i} \tilde{x}^{j]}.$$

* Навсякъде в изразите наредбата (α, β, γ) може да се фиксира в едно от следните 3 състояния: $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ или $(3, 1, 2)$.

Ако към нормировката (3) предявим изискването

$$(5) \quad \check{\varepsilon} = \check{\varepsilon}^{12} = \varepsilon^{12} = \varepsilon = \sqrt{\check{g}},$$

то за множителя ϱ ще получим

$$\check{\varepsilon}^{ij} = 2\check{x}^{[i} \check{x}^{j]} = 2\varrho^2 \sin \psi \sin \psi \check{v}^{[i} \check{v}^{j]} = \frac{2v^{[i} v^{j]}}{\sin \psi} = \varepsilon^{ij},$$

т. е.

$$\varrho_0 = \frac{1}{\sqrt{s}}, \quad s = \prod_{a=1}^3 \sin \psi_a.$$

Оттук нататък за $\check{x}^i$ ще фиксираме нормировката

$$(6) \quad x^i = \frac{1}{\sqrt{s}} \sin \psi_a v_a^i,$$

за която е в сила равенството (4).

Да отбележим още, че

$$(7) \quad x_i = \varepsilon_{si} x^s = \frac{1}{\sqrt{s}} \sin \psi_a v_{ai}$$

и

$$x_s x^s = 1.$$

Сега вече сме в състояние да изберем нов, подходящо избран фиксиран представител на псевдотензора на тритъканта — тензора

$$(8) \quad a_{ijk} = x_i x_j x_k + x_j x_k x_i + x_k x_i x_j,$$

който удовлетворява равенството

$$a_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{s}} \check{a}_{ijk}.$$

За пълнота ще споменем, че може да се подбере подходяща нормировка $\check{\varrho}$ в (3), такава, че съответният $\check{a}_{ijk}$, получен по (8), да има свойството

$$\text{Dis } \check{a}_{ijk} = \frac{1}{g^3}$$

Тъй като $\varrho_0 \neq \check{\varrho}$ (вж. [4]), тази нормировка би нарушила връзката (5) и затова ще предпочетем да работим по-нататък с нормировката (6), а тензорът (8) ще считаме за основен тензор на тритъканта.

Връзка между свързаностите Γ и $\check{\Gamma}$. Ако векторите x_a^i удовлетворяват условието (4), то уравненията

$$x_{i;j} = \partial_j x_i - \Gamma_{ij}^s x_s = \omega_j x_i$$

еднозначно определят вътрешната свързаност на тритъканта a_{ijk} (вж. [2]).
От тези уравнения получаваме

$$\omega_j = x_i \partial^s_{\beta} x_s - x_j \partial^s_{\alpha} x_s \quad (\partial^s_{\alpha} x_s = \varepsilon^{sd} \partial_d x_s),$$

$$\Gamma_{ij}^* = x^k \partial_j x_i - x^k \partial_i x_j - \omega_j \delta_i^k \quad (\Gamma_{ij}^* = \tilde{\Gamma}_{ji}^*).$$

От друга страна, ковариантната производна на x_i в римановата геометрия $V_2(g_{ij})$ е

$$x_{i|j} = \partial_j x_i - \Gamma_{ij}^s x_s.$$

Тогава

$$x_{i|j} - x_{i|j} = x_{i|j} - \omega_j x_i = (\tilde{\Gamma}_{ij}^s - \Gamma_{ij}^s) x_s = T_{ij}^s x_s$$

където

$$T_{ij}^s = \tilde{\Gamma}_{ij}^s - \Gamma_{ij}^s$$

е тензорът на афинната деформация, ориентиран от $V_2(g_{ij})$ към a_{ijk} в указания смисъл.

В системата уравнения

$$x_{i|j} = x_i \omega_j + T_{ij}^s x_s \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

само две са линейно независими (по отношение на α).

Имайки пред вид (17), можем да напишем

$$x_{i|j} = \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \sin \psi v_i \right)_j = (\cotg \psi \cdot \psi_j - \partial_j \ln \sqrt{s}) x_i + t_j \tilde{x}_i,$$

където (вж. [1]) t_j е трансверзалният вектор, определящ се от равенството

$$v_{i|j} = \tilde{v}_i t_j, \quad \tilde{v}_i = g_i^s v_s.$$

Тогава

$$T_{ij}^s x_s = (\cotg \psi \cdot \psi_j - \partial_j \ln \sqrt{s} - \omega_j) x_i + t_j \tilde{x}_i.$$

За вектора ω_j имаме

$$\begin{aligned} \omega_j &= x_j \partial^s_{\beta} x_s - x_j \partial^s_{\alpha} x_s = \frac{1}{3} [(x_j - x_j) \partial^s_{\beta} x_s + (x_j - x_j) \partial^s_{\alpha} x_s + (x_j - x_j) \partial^s_{\gamma} x_s] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 x_j \partial^s_{\alpha} x_s - \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 x_j x_s^{\alpha}, \end{aligned}$$

където $\bar{x}_s = x_s - x_s$ са векторите на присъединената тритъкан (вж. [1]) на тритъканта a_{ijk} .

Нека y^k е произволен контравектор. Тогава

$$a_{ijk} y^k = c_{ij}$$

е тензор със свойството

$$c_{ij}b^{ij} = 0,$$

където b^{ij} е тензор на Хес за тритъканта a_{ijk} (вж. [1]).

Да фиксираме вектора y^k и заедно с него

$$a_{ijk}y^k = c_{ij},$$

а y^k да изберем така (това винаги е възможно), че за

$$c_{ij} = a_{ijk}y^k$$

да бъде удовлетворено равенството

$$c_{ij}c^{ij} = 0.$$

Тогави c_{ij} , c_{ij} , b_{ij} са тензори на тройка аполярни мрежи.

Тъй като всеки двувалентно ковариантен тензор P_{ij} може да се разложи еднозначно като сума

$$P_{ij} = Ac_{ij} + Bc_{ij} + Db_{ij}$$

то е в сила равенството

$$\begin{aligned} (9) \quad T_{ij}z_s &= Ac_{ij} + Bc_{ij} + Db_{ij} \\ &= (Ay^k + By^k)a_{ijk} + Db_{ij} = A^ka_{ijk} + Db_{ij}. \end{aligned}$$

Оттук

$$T_{ij}\tilde{b}^{ij}z_s = A^ka_{ijk}\tilde{b}^{ij} + 2D,$$

а следователно

$$D = \lambda^s z_s = (\lambda^s + T_{ij}\tilde{b}^{ij}).$$

Аналогично от (9) имаме

$$T_{ij}^s z_s a^{ijp} = A^k a_{ijk} a^{ijp},$$

откъдето получаваме

$$A^k = p^{ks} z_s;$$

Тук p^{ks} не зависи от вектора z_s .

Тогави (9) може да се напише във вида

$$T_{ij}^s z_s = p^{ks} z_s a_{ijk} + \lambda^s z_s b_{ij},$$

т. е.

$$(T_{ij}^s - p^{ks} a_{ijk} - \lambda^s b_{ij}) z_s = 0$$

за всяко z_s . Последното означава, че

$$T_{ij}^s = p^{ks} a_{ijk} + \lambda^s b_{ij}.$$

т. е. тензорът на афинната деформация T_{ij}^s допуска винаги разложение по a_{ijk} и b_{ij} .

По-нататък нашата цел ще бъде определянето на коефициентите λ^s и p^{rs} в разложението

$$(10) \quad T_{ij}^s = \lambda^s b_{ij} + p^{rs} a_{ijr}.$$

Непосредствено оттук следва, че

$$(11) \quad \lambda^s = \frac{1}{2} T_{ij}^s \tilde{b}^{ij} = \frac{1}{6} T_{ij}^s b^{ij},$$

$$(12) \quad p^{rs} = \frac{1}{9} T_{ij}^s \bar{a}^{ijr},$$

където $\bar{a}_{ijk}$ е тензор, взаимен на a_{ijk} (вж. [1]), удовлетворяващ условието

$$a_{ijr} \bar{a}^{ijs} = 9\delta_r^s.$$

Да насочим вниманието си към производните

$$a_{ijk|s} = \partial_s a_{ijk} - \Gamma_{si}^p a_{pjk} - \Gamma_{sj}^p a_{ipk} - \Gamma_{sk}^p a_{ijp},$$

$$a_{ijk||s} = 3\omega_s a_{ijk} = \partial_s a_{ijk} - \hat{\Gamma}_{si}^p a_{pjk} - \hat{\Gamma}_{sj}^p a_{ipk} - \hat{\Gamma}_{sk}^p a_{ijp},$$

откъдето

$$(13) \quad a_{ijk|s} = 3\omega_s a_{ijk} + T_{si}^p a_{pjk} + T_{sj}^p a_{ipk} + T_{sk}^p a_{ijp}.$$

Оттук, отчитайки, че

$$a_{ijk} a^{ijs} = 3b_k^s, \text{ а } a_{ijk} a^{ijk} = 0,$$

имаме

$$a_{ijk|s} a^{ijk} = -3T_{is}^p b_p^i.$$

Ако означим

$$3z_s = a_{ijk|s} a^{ijk},$$

ще получим

$$(14) \quad z_s = -T_{is}^p b_r^i = -T_{ip}^p b_s^i + \varepsilon_{ps} T_{ir}^p b^{ir},$$

и поради (11)

$$z_s = -T_{ip}^p b_s^i + 6\lambda_s.$$

За да определим T_{ip}^p , аналогично на (13) ще имаме

$$(15) \quad b_{ij|s} = 2\omega_s b_{ij} + T_{si}^m b_{mj} + T_{sj}^m b_{im}.$$

От (15) и поради това, че

$$b_{ij|s} b^{ij} = 0,$$

получаваме

$$T_{sm}^m = -2\omega_s.$$

Тогава (14) може да се запише във вида

$$z_s = 2\omega_i b_s^i + 6\lambda_s,$$

откъдето

$$(16) \quad \lambda^s = \frac{1}{6} (z^s + 2b_i^s \omega^i).$$

От друга страна, от (15) ще получим

$$b_{ij,i}^j = -2b_{ij} b^j = 2b_{ij} \omega^j - T_{ij}^m b_m^j - 2b_{ij} \omega^j + z_i,$$

където b_i е чебишовският вектор на мрежата на Хес (вж. [1]). Тогава

$$z^s + 2\omega^j b_j^s = -2b_i^s b^i.$$

Изразът (16) ще се запише във вида

$$(17) \quad \lambda^s = -\frac{1}{3} b_i^s b^i.$$

За определянето на коефициента p^{rs} ще използваме (12). И така

$$3p^{rs} - \frac{1}{3} T_{mn}^s a^{mnr} = \frac{1}{81} (a_{klm} a^{klm}) a^{jrs} - \frac{2}{3} \omega_j \bar{a}^{jrs} - \frac{1}{2} a^{ijr} b_{ij}^s.$$

Лесно може да се докаже, че

$$a_{klm} \bar{a}^{klm} = 0.$$

Следователно дотук за p^{rs} имаме

$$p^{rs} = \frac{2}{9} \omega_j a^{jrs} - \frac{1}{6} a^{ijr} b_{ij}^s = -\frac{1}{6} (4\omega_j b_i^s + b_{ij}^s) a^{ijr}.$$

За да елиминираме производната b_{ij}^s от получения израз, ще подходим по следния начин. Считаме, че мрежата b_{ij} (елиптична)* е елемент на нормална тройка взаимно аполярни мрежи a_{ij} , c_{ij} , d_{ij} (вж. [1]). Тъй като d_{ij} е елиптическата от тях, ще положим $d_{ij} = b_{ij}$ (чрез m_{ij} означаваме метрически нормиран тензор на мрежа, т. е. $m_{11} m_{22} - m_{12}^2 = g$).

Като използваме релацията

$$A_{\alpha}^i{}_{\beta} = -A_{\beta}^i{}_{\alpha} (a_{\alpha}^p + a_p) + A_{\beta}^i{}_{\alpha} (a_p - a_p),$$

за приведените афинори (вж. [3]) на тройката мрежи

$$A_1^s = i a_0^s, \quad A_2^s = i c_0^s, \quad A_3^s = b_0^s$$

ще имаме

$$b_{ij,s} = a_{ij} c_s^k (b_k + \beta_k) - c_{ij} a_s^k (b_k - \beta_k),$$

където β_k е геодезичен вектор на мрежата на Хес за тритъканта.

От равенството (вж. [1])

* $b_{ij} \neq \lambda g_{ij}$.

$$g_{ij} = \tilde{c}_{ij} \cos \omega + b_{ij} \sin \omega,$$

като държим сметка за връзката

$$b_{ij} = \frac{1}{\sqrt{3}} b_{ij},$$

получаваме

$$c_{js} = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sqrt{3}} g_{(s}^{i} b_{j)i}.$$

Като означим

$$p_r = a_{ijr} c_{ij}^r,$$

ще имаме

$$p_r = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sqrt{3s}} (\cos \psi_{\alpha\alpha} v_j + \cos \psi_{\beta\beta} v_j + \cos \psi_{\gamma\gamma} v_j) b_r^j.$$

От друга страна, нека

$$q_r = a_{ijr} a_{ij}^r$$

и следователно

$$q_r = a_{ijr} c_{ij}^{lk} b_k^j,$$

т. е.

$$q_r = -\frac{\operatorname{tg} \omega}{\sqrt{s}} (\cos \psi_{\alpha\alpha} v_r + \cos \psi_{\beta\beta} v_r + \cos \psi_{\gamma\gamma} v_r).$$

Очевидно

$$q_r = \frac{\sqrt{s}}{3} b_r^i p_i.$$

Оттук, като въведем вектора l_k , можем да запишем

$$l_k = a_{ik}^r q_r = -c_{ik}^i p_i,$$

т. е.

$$p_s = -c_{os}^k l_k, \quad q_s = a_s^k l_k.$$

Тогава

$$\begin{aligned} (18) \quad p^{rs} &= -\frac{2}{3} (\omega_j b_i^j) a^{isr} + \frac{1}{6} [p^r a^{ks} (b_k - \beta_k) - q^r c^{ks} (b_k + \beta_k)] \\ &= -\frac{2}{3} (\omega_j b_i^j) a^{isr} + \frac{1}{6} [\beta_k (c_{00}^{rp} a_{00}^{ks} - c_{00}^{ks} a_{00}^{rp}) - b_k (c_{00}^{rp} a_{00}^{ks} + c_{00}^{ks} a_{00}^{rp})] l_p. \end{aligned}$$

И така тензорът на афинната деформация в най-общия случай ще има представянето (10) с коефициенти λ^s и p^{rs} съответно от (17) и (18).

В следваща работа ще посочим основните приложения на този резултат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шуликовский, В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., 1963.
2. Шуликовский, В. И. О внутренних связностях n -тканей. — Н. тр. Висш Пед. инст., 4, № 1, 1966, 13—22.
3. Шуликовский, В. И. Проективная теория сетей. Казань, 1964.
4. Дадаян, А. А. Тензорная теория тканей на поверхности. Уч. зап. Моск. Гос. Пединст., 1965, 82—98.

Постыпила на 26. XII. 1972 г.

О СВЯЗИ МЕЖДУ СВЯЗНОСТЬЮ ДВУМЕРНОГО РИМАНОГО ПРОСТРАНСТВА И ВНУТРЕННЕЙ СВЯЗНОСТЬЮ ОДНОЙ ТРИТКАНИ

Стефан Стефанов

(Резюме)

В настоящей работе рассматривается вопрос о тензоре аффинной деформации, который устанавливает связь между связностью в данной Римановой геометрии $V_2(g_{ij})$ и внутренней связностью одной ориентированной триткани a_{ijk} . Доказывается, что тензор аффинной деформации (T_{ij}^s) позволяет однозначное разложение по тензору триткани a_{ijk} и тензору Гесса для этой же триткани. Найдена удобная форма о применении T_{ij}^s .

ON A RELATION BETWEEN CONNECTION IN TWODIMENSIONAL RIEMANNIAN SPACE AND THE INNER CONNECTION OF A TRITISSUE

Stefan Stefanov

(Summary)

The article treats the problem of affine deformation tensor which establishes a connection between connection in Riemannian geometry $V_2(g_{ij})$ and the inner connection of an oriented regular tritissue a_{ijk} .

It is proved that the affine deformation tensor (T_{ij}^s) admits simple expression by the tensor of tritissue a_{ijk} and Hess tensor for the same tritissue.

A convenient form for application of T_{ij}^s is found.