КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ'77
София . 1980, с. 65—72

CONSTRUCTIVE FUNCTION THEORY'77
Sofia . 1980, p. 65—72

СПЛАЙН-ФУНКЦИИ И НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

А. А. Женсыкбаев

Резюме. В работе рассматриваются наилучшие квадратурные и кубатурные формулы для различных классов периодических и непериодических дифференцируемых функций.

1. Введение. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс определенных и интегрируемых на $[0, 1]$ функций. Для $f\in\mathfrak{M}$ рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)+R(f), \tag{1}$$

где веса a_i и узлы $0\leqq x_1<x_2<\ldots<x_n\leqq 1$ произвольны.

Задача о наилучшей для класса $\mathfrak{M}$ квадратурной формуле, поставленная А. Н. Колмогоровым, состоит в нахождении величины

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M})=\inf\{\sup\{|R(f)|:f\in\mathfrak{M}\}:a_i,\ x_i\}$$

и вектора весов и узлов $\{\bar{a}_i,\ \bar{x}_i\}$, для которого реализуется точная нижняя грань. Формула (1) с весами $\bar{a}_i$ и узлами $\bar{x}_i$ называется наилучшей для класса $\mathfrak{M}$.

В предлагаемом сообщении квадратурные формулы рассматриваются для классов W_p^r и $\widetilde{W}_p^r$ $(r=1, 2, \ldots;\ 1\leqq p\leqq\infty)$.

Здесь W_p^r — класс функций f, имеющих на $[0, 1]$ $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную, у которых $\|f^{(r)}\|_p\leqq 1$, где $\|g\|_p=\{\int_0^1|g(x)|^p\,dx\}^{1/p}$ $(1\leqq p<\infty)$, $\|g\|_\infty=\sup vrai\{|g(x)|:0\leqq x\leqq 1\}$, $\widetilde{W}_p^r$ — аналогичный класс 1-периодических функций.

Формула (1) для этих классов изучалась многими математиками. Так для W_p^r и $\widetilde{W}_p^r$ наилучшие квадратурные формулы получены при $r=1, 2$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ в [1—3], а при $r=3$ $(p=1)$ — в [4]. В периодическом случае, то есть для классов $\widetilde{W}_p^r$, задача решена также при $r=3, 4$ $(p=2)$ в [5, 6], а при $r=3$ $(p=\infty)$ — в [7]. Отметим, наконец, недавние результаты В. П. Моторного [8, 9], получившего оптимальные квадратуры для классов $\widetilde{W}_p^r$ при всех r в случае $p=\infty$ и при четных r в случае $p=1$; при нечетных r $(p=1)$ они получены в [10].

2. Периодический случай. Рассмотрим задачу о наилучшей квадратурной формуле сначала для классов $\widetilde{W}_p^r$. Как видно из обзора, для всех r она решена лишь в крайних случаях $p=1$ и $p=\infty$, а для произвольных r ее решение не было известно даже при $p=2$.

Основываясь на некоторых свойствах сплайнов, автору удалось получить оптимальную для классов $\widetilde{W}_2^r(r=1, 2, \dots)$ квадратурную формулу, о чем сообщалось на предыдущей конференции в г. Калуге (см. [11, 12]).

После этого был получен общий результат для всех классов $\widetilde{W}_p^r$ $(r=1, 2, \dots;\ 1 \leqq p \leqq \infty)$ [13, 14]. Именно, справедлива

Теорема 1. *Среди всевозможных квадратурных формул вида* (1) *наилучшей для классов* $\widetilde{W}_p^r$ $(r=1, 2, \dots;\ 1 \leqq p \leqq \infty)$ *является единственная (с точностью до жесткого сдвига) формула прямоугольников*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = n^{-1}\sum_{i=1}^n f(i/n) + R_0(f). \tag{2}$$

При этом справедливо равенство $\mathscr{E}_n(\widetilde{W}_p^r) = H_{p'}^{(r)}\, n^{-r}\,(1/p+1/p'=1)$, *где*

$$H_\nu^{(\mu)} = \inf\{\|D_\mu(\cdot)-c\|_\nu : c\}, \tag{3}$$

$$D_\mu(x) = 2^{1-\mu}\pi^{-\mu}\sum_{m=1}^\infty m^{-\mu}\cos(2\pi mx - \pi\mu/2).$$

В частности, при $p=1$, 2 и ∞ *имеем*

$$\mathscr{E}_n(\widetilde{W}_1^r) = n^{-r}\|D_r\|_\infty \ (r\text{ — нечетное}),\quad \mathscr{E}_n(\widetilde{W}_1^r) = \pi K_{r-1}/2\,(2\pi n)^r \ (r\text{ — четное}),$$

$$\mathscr{E}_n(\widetilde{W}_2^r) = (2\pi n)^{-r}\sqrt{2}\Big(\sum_{m=1}^\infty m^{-2r}\Big)^{1/2}\ (r=1, 2, \dots),\quad \mathscr{E}_n(\widetilde{W}_\infty^r) = (2\pi n)^{-r} K_r \quad (r=1, 2, \dots),$$

где

$$K_r = 4\pi^{-1}\sum_{m=0}^\infty (-1)^{m(r+1)}(2m+1)^{-r-1}.$$

Как уже отмечалось, при $p=\infty$ $(r=1, 2, \dots)$ и $p=1$ (r — четное) эта теорема получена В. П. Моторным [8, 9], а при нечетных $r\,(p=1)$ — А. А. Лигуном [10].

Центральным местом в доказательстве теоремы 1 является теорема о единственности оптимального моносплайна, то есть сплайн-функции вида

$$s(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i D_\mu(x-x_i),\quad \sum_{i=1}^n a_i = 1, \tag{4}$$

порядка μ, дефекта 2, с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля на $[0, 1]$ в метрике L_ν $(1 \leqq \nu \leqq \infty)$.

Теорема 2. *Сплайн-функция, наименее уклоняющаяся от нуля на* $[0, 1]$ *в метрике* L_ν *среди всех сплайнов вида* (4), *единственна. Именно такой является сплайн по равномерному разбиению* $x_i = i/n$ *и с равны-*

ми коэффициентами $a_i=1/n$ $(i=1,\ldots,n)$, $a_0=-c_{\mu\nu}^-/n^{-r}$, *где* $c_{\mu\nu}^-$ — *константа, реализующая точную нижнюю грань в* (3).

Таким образом, задача о наилучшей квадратурной формуле вида (1) для периодических классов $\widetilde{W}_p^r$ полностью решена.

3. Непериодический случай. Теперь об оптимальных квадратурах для непериодических классов функций W_p^r. Здесь эта задача значительно усложняется. Если в периодическом случае наилучшая квадратурная формула легко угадывалась, и задача в общем-то состояла в доказательстве того, что оптимальной будет формула прямоугольников (2), то для непериодического случая наилучшую формулу предугадать трудно. И результаты Ю. Я. Доронина [1], Т. А. Шайдаевой [2] и особенно Н. П. Корнейчука и Н. Е. Лушпая [4] (см. также [15], § Д. 1) показали, что наилучшие квадратурные формулы имеют довольно сложный вид и, по-видимому, с увеличением r они будут усложняться. В связи с этим возникает следующий принципиально важный вопрос: является ли оптимальная формула для каждого класса W_p^r единственной?

На этот вопрос автору удалось ответить. И ответ положительный. Имеет место следующая

Теорема 3. *Для каждого класса* W_p^r $(r=1, 2,\ldots; 1<p\leqq\infty)$ *наилучшая квадратурная формула вида* (1) *единственна.*

Далее были получены некоторые характеристики для весов и узлов оптимальной формулы. В частности, оптимальная формула должна быть симметричной $\bar{a}_i=\bar{a}_{n-i+1}$, $\bar{x}_i=1-\bar{x}_{n-i+1}$ $(i=1,\ldots,n)$ для всех классов W_p^r $(r=1, 2,\ldots; 1\leqq p\leqq\infty)$, и узлы $\bar{x}_i$ и веса $\bar{a}_i$ ее удовлетворяют следующим соотношениям: $2\bar{x}_1<\bar{a}_1<\bar{x}_2$, $2(1-\bar{x}_n)<\bar{a}_n<1-\bar{x}_{n-1}$, $0<\bar{a}_i<\bar{x}_{i+1}-\bar{x}_{i-1}$ $(i=2,\ldots, n-1)$,

$$\sum_{i=1}^{[n/2]}\bar{a}_i(1-2\bar{x}_i)^{2k}=1/(4k+2)\ (k=1,\ldots,[(r-1)/2]),$$

$$(-1)^{k+r+n}\Big\{\sum_{i=1}^{[n/2]}\bar{a}_i(1-2\bar{x}_i)^{2k-1}-1/4k\Big\}\leqq 0\ (k=1,\ldots, [r/2]).$$

Теорема 4. *Набор чисел* $\{a_i, x_i\}$ *определяет оптимальную для* W_p^r $(r=1, 2,\ldots; 1<p\leqq\infty)$ *квадратурную формулу* (1) *тогда и только тогда, когда он является решением системы уравнений*

$$\int_0^1|G(t)|^{p'-1}(x_j-t)_+^{r-1}\operatorname{sgn}G(t)\,dt+\sum_{\mu=0}^{r-1}\lambda_\mu x_j^\mu=0,$$

$$\int_0^1|G(t)|^{p'-1}(x_j-t)_+^{r-2}\operatorname{sgn}G(t)\,dt+\sum_{\mu=1}^{r-1}\mu(r-1)^{-1}\lambda_\mu x_j^{\mu-1}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i x_i^m=1/(m+1)\ (j=1,\ldots,n;\ m=0,\ldots,r-1), \tag{5}$$

где $1/p+1/p'=1$,

$$G(x)=(1-x)^r-r\sum_{i=1}^{n}a_i\,(x_i-x)_+^{r-1}, \tag{6}$$

$u_+^m=[\max(0, u)]^m$, λ_m — множители Лагранжа, имеющим среди всех ее решений наименьший первый коэффициент $\bar{a}_1$ или, что то же самое, наименьший первый узел $\bar{x}_1$. При этом

$$\mathcal{E}_n(W_p^r)=(rp'\,\bar{\lambda}_0/(1+rp'))^{1/p'}/r!,$$

где $\bar{\lambda}_0$ — нулевой множитель Лагранжа, соответствующий решению $\{\bar{a}_i, \bar{x}_i\}$. Величина $\mathcal{E}_n(W_p^r)$ при всех $1\leqq p\leqq\infty$ имеет порядок $O(n^{-r})$.

Как и в периодическом случае центральным местом в доказательстве теорем 3 и 4 является теорема о единственности оптимального моносплайна. Через M_r обозначим множество сплайнов вида (6), удовлетворяющих условиям (5).

Теорема 5. *Моносплайн множества M_r, наименее уклоняющийся от нуля на $[0, 1]$ в метрике L_q $(r=1, 2, \ldots; 1\leqq q<\infty)$ единствен.*

Замечание. В случае $q=2$ при определенных ограничениях на концах промежутка $[0, 1]$ эта теорема приведена С. Карлиным [16], однако, насколько нам известно, доказательство ее до сих пор не опубликовано.

Оптимальные квадратуры в непериодическом случае значительно упрощаются, если наложить некоторые ограничения на значения функций и их пройзводных на концах отрезка $[0, 1]$, а также, если в самой квадратурной формуле зафиксировать крайние узлы.

Пусть $W_{p,*}^r$ класс функций $f\in W_p^r$, у которых

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)\quad (k=1, 3, \ldots, 2[r/2]-1).$$

Теорема 6. *Среди всевозможных формул вида (1) наилучшей для классов $W_{p,*}^r$ $(r=1, 2, \ldots; 1\leqq p\leqq\infty)$ является следующая:*

$$\int_0^1 f(x)\,dx=n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f((2i-1)/2n)+R_1(f). \tag{7}$$

При этом имеет место равенство $\mathcal{E}_n(W_{p,*}^r)=n^{-r}H_{p'}^{(r)}(1/p+1/p'=1)$, где величина $H_\nu^{(\mu)}$ определена равенством (3).

Теорема 7. *Среди всевозможных квадратурных формул вида*

$$\int_0^1 f(x)\,dx=a_0 f(0)+\sum_{i=1}^{n-1} a_i f(x_i)+a_n f(1)+r(f) \tag{8}$$

наилучшей для классов $W_{p,*}^r$ $(r=1, 2, \ldots; 1\leqq p\leqq\infty)$ является формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2n}f(0)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)+\frac{1}{2n}f(1)+r_0(f). \tag{9}$$

При этом

$$\inf_{a_i, x_i}\ \sup_{f\in W_{p,*}^r} |r(f)|=n^{-r}H_{p'}^{(r)}(1/p+1/p'=1).$$

При $p=2$ для четных r теорема 7 получена в [17]*.

Простым следствием из теорем 1, 6 и 7 является

* Основные результаты этой работы опираются на теорему о единственности оптимального моносплайна С. Карлина [16] (см. замечание к теореме 5).

С л е д с т в и е 1. Формула (7) (соответственно (9)) является наилучшей среди формул (1) (соответственно (8)) для любого класса $\mathfrak{M}_{rp}$ такого, что $\widetilde{W}_p^r \subset \mathfrak{M}_{rp} \subset W_{p,*}^r$ $(r=1, 2, \ldots;\ 1 \leqq p \leqq \infty)$.

В частности, следствие 1 верно для классов $W_p^r(M_k)$ функций $f \in W_{p,*}^r$ таких, что $f^{(m_i)}(0)=f^{(m_i)}(1)$ $(i=1, \ldots, k)$, где $M_k=(m_1, \ldots, m_k)$ — произвольный набор целых чисел $0 \leqq m_i \leqq r-1$.

4. О наилучших квадратурных формулах С. М. Никольского. Рассмотрим теперь квадратурные формулы с производными С. М. Н и к о л ь с к о г о [15, с. 99]

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\varrho} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} f^{(k)}(x_i) + R(f) \quad (0 \leqq \varrho \leqq r-1). \tag{10}$$

Погрешность оптимальной формулы вида (10) обозначим через

$$\mathcal{E}_n^{(\varrho)}(\mathfrak{M}) = \inf\ \{\sup\ \{|R(f)| : f \in \mathfrak{M}\} : a_{ik},\ x_i\}.$$

Не останавливаясь подробно на обзоре результатов для формул такого вида (подробнее см. [15]), отметим, что оптимальные для классов W_p^r и $\widetilde{W}_p^r$ квадратурные формулы вида (10) получены при $1 \leqq p \leqq \infty$ в случае $\varrho=r-1$ $(r=1, 2, \ldots)$ и $\varrho=r-2$ $(r=2, 4, 6, \ldots)$, а при $p=1$ — в случае $\varrho=r-2$ и $\varrho=r-3$ $(r=3, 5, 7, \ldots)$ (см. [3—5]). Заметим еще, что для классов $\widetilde{W}_2^r$ наилучшие формулы найдены Н. Е. Л у ш п а е м [6] при $\varrho=r-2$, $r-3$ $(r=3, 5, 7, \ldots)$ и при $\varrho=r-4$ $(r=4, 6, 8, \ldots)$.

При изучении наилучших для W_p^r и $\widetilde{W}_p^r$ квадратурных формул вида (10) было замечено [18] следующее характерное для всех r и p свойство.

Т е о р е м а 8. *Для каждого класса W_p^r $(r=1, 2, \ldots;\ 1 \leqq p \leqq \infty)$ наилучшая квадратурная формула при $\varrho=2m+1$ совпадает с соответствующей оптимальной формулой при $\varrho=2m$ $(0 \leqq m \leqq [(r-2)/2])$. Этот же факт имеет место и для всех классов $\widetilde{W}_p^r$.*

В [18] получены также некоторые характеристики для весов и узлов наилучшей квадратурной формулы. Именно, справедлива

Т е о р е м а 9. *Веса $\overline{a}_{ik}$ и узлы $\overline{x}_i$ наилучших для классов W_p^r и $\widetilde{W}_p^r$ $(r=1, 2, \ldots;\ 1 \leqq p \leqq \infty)$ квадратурных формул удовлетворяют следующим соотношениям*

$$\overline{a}_{i\varrho}=0,\ i=1, \ldots, n,\ \varrho \text{ — нечетное}, \tag{11}$$

$$\overline{a}_{i\,2k} \geqq 0\ (i=1, \ldots, n;\ k=0, \ldots, [\varrho/2]), \tag{12}$$

$$|\overline{a}_{ik}| \leqq (3-(-1)^k)/2\,(k+1)!\ (i=1, \ldots, n;\ k=0, \ldots, \varrho), \tag{13}$$

$$\overline{a}_{i0} \leqq \overline{x}_{i+1}-\overline{x}_{i-1}\ (i=1, \ldots, n). \tag{14}$$

При $p>1$ в (12) — (14) имеют место строгие неравенства.

При $p=\infty$ соотношения (11) и (12) для $k=(\varrho-1)/2$ (ϱ—нечетно) в непериодическом случае получены Б. Д. Б о я н о в ы м [19].

Замечание. На конференции автору стало известно, что для классов W_p^r ($r=1, 2, \ldots$; $1<p\leqq\infty$) теорема 8 и соотношения (11) и (12) для более общих квадратурных формул получены независимо Б. Д. Бояновым [20].

Из теорем 8, 1, 6, 7 и результатов работы [6] вытекают следующие следствия.

Следствие 2. Среди всех формул вида (10) при $\varrho=1$ наилучшей для классов $\widetilde{W}_p^r$ ($r=2, 3, \ldots$; $1\leqq p\leqq\infty$) является формула прямоугольников (2).

Следствие 3. Формула (7) является наилучшей для классов $W_{p,*}^r$ ($r=2, 3, \ldots$; $1\leqq p\leqq\infty$) среди всевозможных формул (10) при $\varrho=1$.

Следствие 4. Среди всевозможных формул вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx=a_0 f(0)+b_0 f'(0)+\sum_{i=1}^{n-1}[a_i f(x_i)+b_i f'(x_i)]+a_n f(1)+b_n f'(1)+r(f)$$

наилучшей для классов $W_{p,*}^r$ ($r=2, 3, \ldots$; $1\leqq p\leqq\infty$) является формула (9).

Следствие 5. Среди всевозможных формул вида (10) при $\varrho=r-3$ ($r=4, 6, 8, \ldots$) наилучшей для классов $\widetilde{W}_2^r$ является формула с равномерным расположением узлов $\bar{x}_i=i/n$ и весами $\bar{a}_{i\,2j+1}=0$, $\bar{a}_{i\,2j}=2a_j/r!$ ($j=0,\ldots,(r-4)/2$, $i=1,\ldots,n$), где

$$a_j=(2n)^{-2j-1}\{X_r^{(r-2j-1)}(1)-\lambda(r^2-3r+4j)X_{r-1}^{(r-2j)}(1)+4\lambda X_{r-1}^{(r-2j-1)}(1)\},$$

$$\lambda=6r[(r-1)(r-2)(2r-1)(r^2-r-3)]^{-1},$$

$X_m(t)$ — многочлен Лежандра степени m. При этом

$$\mathscr{E}_n^{(r-3)}(\widetilde{W}_2^r)=\frac{r!}{(2r)!\,n^r}\left\{\frac{(r+2)(r+3)(r^2+3r-1)}{(r-2)(r-1)(2r+1)(r^2-r-1)}\right\}^{1/2}.$$

5. О наилучших кубатурных формулах. Результаты § 2 нетрудно распространить на функции многих переменных. Для простоты будем рассматривать кубатурные формулы на множествах функций двух переменных

$$\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f(x_i, y_j)+R(f), \tag{15}$$

где $0\leqq x_1<x_2<\ldots<x_m\leqq 1$, $0\leqq y_1<y_2<\ldots<y_n\leqq 1$. Как обычно, для заданного класса $\mathfrak{M}$ введем определение погрешности оптимальной формулы вида (15)

$$\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M})=\inf\{\sup|R(f)|:f\in\mathfrak{M}\}:a_{ij},\ x_i,\ y_j\}.$$

Пусть $\widetilde{W}_{p,q}^{r,s}$ — класс 1-периодических функций $f(x, y)$ таких, что при каждом фиксированном y $f\in\widetilde{W}_p^r$ как функция от x и $f\in\widetilde{W}_q^s$ как функция от y при x фиксированном. Через $\widetilde{W}_{p,q,k}^{r+s}$ обозначим класс 1-периодических функций $f(x, y)$, имеющих на плоскости кусочно-непрерывную производную $f^{(r+s)}_{xy}$, у которых $f^{(r-1)}_x$ и $f^{(s-1)}_y$ локально абсолютно непрерывны как функции от x и y соответственно, и

$$\Big\| \int_0^1 f^{(r)}_x(.,y)\,dy \Big\|_p \le 1, \quad \Big\| \int_0^1 f^{(s)}_y(x,.)\,dx \Big\|_q \le 1, \quad \| f^{(r+s)}_{xy}(.,.)\|_{L_k(0,1;\,0,1)} \le 1.$$

Теорема 10. *Среди всевозможных кубатурных формул вида* (15) *наилучшей для классов* $\widetilde{W}^{r,s}_{p,q}$ $(r,\ s=1,2,\ldots;\ 1\le p,\ q\le\infty)$ *является*

$$(16)\qquad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n f\Big(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\Big)+R_0(f).$$

При этом

$$\mathcal{E}_{m,n}(\widetilde{W}^{r,s}_{p,q}) = m^{-r}H^{(r)}_{p'} + n^{-s}H^{(s)}_{q'} \quad (1/p+1/p'=1/q+1/q'=1),$$

где величина $H^{(\mu)}_\nu$ *определена равенством* (3).

Теорема 11. *Формула* (16) *является наилучшей для классов* $\widetilde{W}^{r+s}_{p,q,2}$ $(r,\ s=1,2,\ldots;\ 1\le p,\ q\le\infty)$ *среди всех формул вида* (15) *и*

$$\mathcal{E}_{m,n}(\widetilde{W}^{r+s}_{p,q,2}) = m^{-r}H^{(r)}_{p'} + n^{-s}H^{(s)}_{q'} + m^{-r}n^{-s}H^{(r)}_2H^{(s)}_2 \quad (1/p+1/p'=1/q+1/q'=1)$$

Теорема 12. *Формула* (16) *является наилучшей для классов* $\widetilde{W}^{r+s}_{p,q,k}$ $(r,\ s=1,2,\ldots,\ 1\le p,\ q,\ k\le\infty)$ *среди всех формул* (15), *у которых* $a_{ij}=a_i b_j$ (a_i и b_j — *произвольны*). *При этом погрешность ее* $\mathcal{E}'_{m,n}(\widetilde{W}^{r+s}_{p,q,k})$ *равна*

$$\mathcal{E}'_{m,n}(\widetilde{W}^{r+s}_{p,q,k}) = m^{-r}H^{(r)}_{p'} + n^{-s}H^{(s)}_{q'} + m^{-r}n^{-s}H^{(r)}_{k'}H^{(s)}_{k'}$$

$$(1/p+1/p'=1/q+1/q'=1/k+1/k'=1).$$

Для многомерного случая имеет место также аналог теоремы 2 Пусть M_{rs} — множество моносплайнов вида

$$s(x,y)=c+\sum_{i=1}^m a_iD_r(x-x_i)+\sum_{j=1}^n b_jD_s(y-y_j)+\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}D_r(x-x_i)D_s(y-y_j)$$

где $\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}=1$. Справедлива следующая

Теорема 13. *Моносплайн множества* M_{rs}, *наименее уклоняющийся от нуля на* $[0,1;\,0,1]$ *в метрике* L_ν *единствен. Он является сплайном по равномерной сетке* $x_i=i/m$, $y_j=j/n$ с кэффициентами $c=m^{-r}n^{-s}c_{r\nu}c_{s\nu}$, $a_i=-c_{s\nu}/mn^s$, $b_j=-c_{r\nu}/m^rn$, $c_{ij}=1/mn$ $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$, *где* $c_{\mu\nu}$ — *константа реализирующая точную нижнюю грань в* (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Я. Доронин. К вопросу о формулах механических квадратур. Сб. научных трудов Днепропетр. инж.-строит. ин-та, 1955, № 1—2, 210—217.
2. Т. А. Шайдаева. Квадратурные формулы с наименьшей оценкой остатка для некоторых классов функций. *Труды Матем. ин-та АН СССР*, 53, 1959, 313—341.

3. Н. Е. Лушпай. Наилучшие квадратурные формулы на классах дифференцируемых периодических функций. *Матем. заметки*, **6**, 1969, 475—480.
4. Н. П. Корнейчук, Н. Е. Лушпай. Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение. *Известия АН СССР, серия матем.*, **33**, 1969, № 6, 1416—1437.
5. Н. Е. Лушпай. Оптимальные квадратурные формулы для дифференцируемых периодических функций. Иссл. по совр. проблемам суммирования и приближения функций и их приложеяий. Днепропетровск, 1972, 53—55.
6. Н. Е. Лушпай. Об одной оптимальной квадратуре для класса дифференцируемых периодических функций. *Известия ВУЗ*, матем. (131), № 4, 1973, 57—62.
7. Т. Н. Бусарова. Наилучшие квадратурные формулы для одного класса дифференцируемых периодических функций. *Укр. Матем. ж.*, **25**, 1973, № 3, 291—301.
8. В. П. Моторный. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций, *Доклады АН СССР*, **211**, 1973, № 5, 1060—1062.
9. В. П. Моторный. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. *Известия АН СССР, серия матем.*, **38**, 1974, № 3, 583—614.
10. А. А. Лигун. Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций. *Матем. заметки*, **16**, 1976, № 6, 913—926.
11. А. А. Женсыкбаев. О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^r L_2$. Теория приближения функций. Междунар. конф., Тезисы. Калуга, 1975, 49—50.
12. A. A. Žensykbaev. Best quadrature formula for the class W^r L_2. *Analysis Math.*, **3**, 1977, No. 1, 83—93.
13. А. А. Женсыкбаев. О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^r L_p$. *Доклады АН СССР*, **227**, 1976, № 2, 277—279.
14. А. А. Женсыкбаев. Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. *Известия АН СССР, серия матем.*, 41, 1977, № 5, 1110—1124.
15. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. Москва, 1974.
16. S. Karlin. The fundamental theorem of algebra for monosplines satisfying certain boundary conditions and applications to optimal, quadrature formulas. Approximation with special emphasis on spline functions. New York, 1969, p. 467—484.
17. М. Левин, В. Арро, Ю. Гиршович. Наилучшие квадратурные формулы для некоторых множеств функций. *Известия Эстон. АН ССР, физика, матем.*, **25**, 1976, № 2, 112—117.
18. А. А. Женсыкбаев. Об одном свойстве наилучших квадратурных формул. *Матем. заметки*, **23**, 1978, 551—562.
19. Б. Д. Боянов. Характеристика и существование оптимальных квадратурных формул для одного класса дифференцуемых функций. *Доклады АН СССР*, **232**, 1977, № 6, 1233—1236.
20. B. D. Bojanov. Existence of extended monosplines of least deviation. *SERDICA Bulg. math. publ.*, **3**, 1977, 261—272.

Казахский государственный университет
Математический факультет
480 091 Алма-Ата СССР

Получено 12. 7. 1977.