

ПРИЗНАКИ ДЛЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ

В. Х. Христов

Резюме. В статье ограничения на порядок убывания к нулю модуля немонотонности $\mu(f; \delta)$ функции f получены новые признаки для равномерной сходимости ряда Фурье $S[f]$ функции f , для равномерной суммируемости ряда $S[f]$ методами Чезаро (C, α) , $-1 < \alpha < 0$ и для равномерной сходимости последовательности тригонометрических интерполяционных полиномов функции f . Исследуется и взаимосвязь полученных и известных достаточных условий.

Введение. Пусть $C_{2\pi}$ пространство непрерывных 2π -периодических функций с нормой $\|f\|_C = \sup\{|f(x)| : x\}$. Как уже общепринято, через $S[f]$ будем обозначать ряд Фурье функции f по тригонометрической системе функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}_1^\infty$, а через $\tilde{S}[f]$ — сопряженный ряд ряду $S[f]$. Как обычно, n -тую частичную сумму ряда $S[f]$ в точке x будем обозначать через $S_n(f; x)$. Хорошо известно [1, с. 103], что

$$(1) \quad S_n(f; x) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

где $D_n(u) = (\sin(n+1/2)u)/\sin(u/2)$ — n -тое ядро Дирихле.

Известно, что одно лишь условие о непрерывности функции f не обеспечивает равномерную сходимость ряда $S[f]$ [1, с. 128—137]. Поэтому, естественно, стоит вопрос о нахождении таких условий на функцию f , которые бы обеспечили равномерную сходимость ряда $S[f]$. Необходимых и достаточных условий для равномерной сходимости ряда $S[f]$ пока неизвестно — известны лишь достаточные условия, которые часто называют признаками для равномерной сходимости ряда $S[f]$. Ограничениями на различные характеристики функции $f \in C_{2\pi}$ разными авторами (см. [1, с. 275—306], [2, 3, 4, 5, 6]) получены ряд признаков для равномерной сходимости ряда Фурье $S[f]$.

Отметим, что о признаке для равномерной сходимости ряда Фурье важно, чтобы условие, которое ставится на функцию, было сравнительно простое (проще чем сам ряд Фурье), и если это условие выражается через какую-то характеристику функции f , то, чтобы эта характеристика была простая и обозримая. Важно еще, чтобы класс функций f , для ко-

торых признак обеспечивает равномерную сходимость ряда Фурье $S[f]$, был возможно шире. Кроме этого, важно, чтобы признак был точен, т. е. если признак для равномерной сходимости ряда Фурье $S[f]$ задается условием на порядок роста или убывания некоторой характеристики функции $f \in C_{2\pi}$, то чтобы этот порядок был неухудшаем.

Следующие признаки для равномерной сходимости ряда Фурье считаются уже классическими.

Признак Дини — Липшица [1, с. 280]. Если $f \in C_{2\pi}$ и

$$(2) \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f; \delta) \ln(1/\delta) = 0,$$

то $S[f]$ равномерно сходится (к f). Здесь $\omega(f; \delta) = \sup \{ \|f(x+h) - f(x)\|_C : |h| \leq \delta \}$ — модуль непрерывности функции f .

Признак Дирихле — Жордана [7, т. I, с. 98]. Если $f \in C_{2\pi}$ и имеет ограниченное изменение на интервале $[0, 2\pi]$, то $S[f]$ равномерно сходится.

Оба эти признака точны в вышеуказанном смысле. На примере признака Дини — Липшица это означает, что порядок убывания к нулю модуля непрерывности $\omega(f; \delta)$ при $\delta \rightarrow +0$, который задается условием (2) неухудшаем, т. е. [7, т. I, с. 477] существуют функции f и g с модулем непрерывности порядка $O\{(\ln(1/\delta))^{-1}\}$ при $\delta \rightarrow +0$ и такие, что ряд $S[f]$ расходится в некоторой точке, а ряд $S[g]$ сходится в каждой точке, но неравномерно.

Г. Неван [3] ослабил условие Дини — Липшица (2), ставя лишь одностороннее условие на порядок убывания $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$. Точнее он доказал: Если $f \in C_{2\pi}$, $\varepsilon(h) > 0$, $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$ и

$$(3) \quad \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \geq -\varepsilon(h)/\ln(1/h), \quad h > 0,$$

равномерно по x , то ряд $S[f]$ равномерно сходится (см. также [2]).

При дальнейшем изложении нам потребуется еще следующий признак Чантурии [6, 8]. Если $f \in C_{2\pi}$ и

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq m \leq n} \left\{ \omega(f; 1/n) \ln m + \sum_{k=m}^n v(f; k)/k^2 \right\} = 0,$$

то ряд $S[f]$ равномерно сходится. Здесь [6] $v(f; k) = \sup \{ \sum_{i=0}^{k-1} |f(x_{2i}) - f(x_{2i+1})| : 0 \leq x_0 < x_1 \leq x_2 < \dots \leq x_{2k-2} < x_{2k-1} \leq 2\pi \}$ — модуль изменения функции f .

Признак Чантурии содержит в себя признаки Дини — Липшица и Дирихле — Жордана, усиляет их и точен в вышеуказанном смысле [8].

Отметим [6], что если для функции $f \in C_{2\pi}$ имеем

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(f; k)/k^2 < \infty,$$

то для f условие (4) выполняется. Последнее условие (5) более сильное ограничение на функцию $f \in C_{2\pi}$, чем условие (4), но зато оно более простое, нагляднее и выражается только через одну характеристику функции f .

После этих вводных замечаний приступим к изложению наших результатов. Дальнейшее изложение разделили на четыре части. Большая

часть из результатов частей 1 и 2 анонсирована в [9], а результаты из части 4 в [10]. Результаты из части 3 еще не опубликованы. Почти все результаты настоящей работы с полными доказательствами вошли в первой главе диссертации [11].

1. В этой части дадим формулировку и наметим идею доказательства одного нового признака для равномерной сходимости ряда Фурье.

Для того чтобы можно было сформулировать наши результаты, припомним сначала определение модуля немонотонности $\mu(f; \delta)$ 2π -периодической функции f , введенный Бл. Сендовым [12]:

$$\mu(f; \delta) = \frac{1}{2} \sup \left\{ \sup_{x_1 \leq x \leq x_2} \{ |f(x_1) - f(x)| + |f(x_2) - f(x)| - |f(x_1) - f(x_2)| \} : |x_1 - x_2| \leq \delta, x_1, x_2 \in (-\infty, \infty) \right\}.$$

Если нужно будет указать, что в первом $\sup$ точки x_1 и x_2 могут изменяться только в заданном интервале $[a, b]$, то для модуля немонотонности в этом случае будем пользоваться обозначением $\mu(f; [a, b], \delta)$.

Очевидно, если $f \in C_{2\pi}$, то

$$(6) \quad \mu(f; \delta) = \sup \{ \sup \{ |f(x_1) - f(x)| : x_1 \leq x \leq x_2 \} : |x_1 - x_2| \leq \delta, f(x_1) = f(x_2) \}.$$

Отметим, что модуль непрерывности $\omega(f; \delta)$ функции $f \in C_{2\pi}$ характеризует насколько значение функции f может максимально измениться на интервале длиной δ , а модуль немонотонности $\mu(f; \delta)$ — насколько значение функции $f \in C_{2\pi}$ может максимально измениться на интервале $[x_1, x_2]$, где точки x_1 и x_2 любые, $0 \leq x_2 - x_1 \leq \delta$ и значения функции f в них совпадают, т. е. $f(x_1) = f(x_2)$ (см. (6)). Эти характеристики разные: например, если функция $f \in C_{2\pi}$ монотонна на интервале $[a, b]$, то $\mu(f, [a, b], \delta) = 0$ для любого $\delta \geq 0$, а в то же время модуль непрерывности $\omega(f; [a, b], \delta)$ функции f может иметь сколь угодно плохой порядок убывания к нулю при $\delta \rightarrow +0$. Модули непрерывности и немонотонности функции f всегда связаны неравенством [12]:

$$(7) \quad \mu(f; \delta) \leq \omega(f; \delta), \quad \delta \geq 0.$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Если $f \in C_{2\pi}$ и

$$(8) \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \mu(f; \delta) \ln(1/\delta) = 0,$$

то ряд $S[f]$ равномерно сходится.

Теорема 2. Условие (8), как достаточное условие для равномерной сходимости ряда Фурье функций из $C_{2\pi}$ точно, т. е. существуют функции f и $g \in C_{2\pi}$, имеющие модули немонотонности с порядком $O\{(\ln(1/\delta))^{-1}\}$ при $\delta \rightarrow +0$ и такие, что ряд $S[f]$ расходится в некоторой точке, а ряд $S[g]$ сходится в каждой точке $x \in (-\infty, \infty)$, но неравномерно.

Доказательство теоремы 2 базируется на точности признака Дини — Липшица и на неравенстве (7).

Утверждение теоремы 1 можно усилить незначительно следующим образом.

Теорема 3. Пусть $f \in C_{2\pi}$. Если для некоторого действительного a интервал $[a, a+2\pi]$ можно разбить на конечное число непересекающихся подынтервалов точками $a=a_1 < a_2 < \dots < a_m = a+2\pi$ так, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(f; [a_i, a_{i+1}], \delta) \ln(1/\delta) = 0$ ($i=1, 2, \dots, m-1$), то ряд $S[f]$ равномерно сходится.

Теорема 1 легко следует из следующего утверждения.

Теорема 4. Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ выполнено

$$\|S_n(f) - f\|_C \leq C \ln(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{[\ln n]} k^{-2} \mu(f; k\pi/n) + \varepsilon_n(f) \quad (n=1, 2, \dots),$$

где C абсолютная константа и $\varepsilon_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, легко увидеть, что если для функции f выполнено (8), то все члены с правой стороны последней оценки стремятся к нулю.

Доказательство теоремы 4 существенно использует следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $f \in C_{2\pi}$ и $0 = \delta_0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_m$ — действительные числа. Тогда существуют функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ и r_m , принадлежащие $C_{2\pi}$ и такие, что

$$\text{а) } f = \sum_{k=1}^m f_k + r_m;$$

$$\text{б) } \|f_k\|_C \leq \mu(f; \delta_k) - \mu(f; \delta_{k-1}), \quad \mu(f_k; \delta_{k-1}) = 0;$$

$$\omega(f_k; \delta) \leq \omega(f; \delta), \quad \delta \geq 0, \quad k=1, 2, \dots, m;$$

$$\text{в) } \mu(r_m; \delta_m) = 0, \quad \omega(r_m; \delta) \leq \omega(f; \delta), \quad \delta \geq 0;$$

г) пусть $M = \max\{f(x): x\}$ и $m = \min\{f(x): x\}$. Тогда, если $M - m \leq 2\mu(f; \delta_m)$, то $r_m(x) \equiv (M+m)/2$, а если $M - m > 2\mu(f; \delta_m)$, то $m + \mu(f; \delta_m) \leq r_m(x) \leq M - \mu(f; \delta_m)$.

Утверждение последней леммы довольно ясно из геометрических соображений и станет прозрачным, если сделать надлежащий чертеж и учесть (6).

Наметим идею доказательства теоремы 4. Пусть $n > 1$ — фиксированное натуральное число. Используя лемму 1 с $m = [\ln n]$ и $\delta_k = k\pi/n$ ($k=0, 1, \dots, m$), и то, что $S_n(f+g; x) = S_n(f; x) + S_n(g; x)$ для любых f и g (т. е. линейность оператора S_n), оценку уклонения $S_n(f; x)$ от $f(x)$ можно свести к оценке уклонений n -тых частичных сумм рядов Фурье функций $f_1, f_2, \dots, f_m$ и r_m соответственно от функций $f_1, f_2, \dots, f_m$ и r_m . Но для функции f_k ($k=1, 2, \dots, m$) известно, что $\|f_k\|_C \leq \mu(f; k\pi/n) - \mu(f; (k-1)\pi/n)$ и $\mu(f_k; (k-1)\pi/n) = 0$. Последнее равенство означает, что функция f_k монотонна на каждом интервале длиной $(k-1)\pi/n$. Но так как n -тая частичная сумма $S_n(f; x)$ ряда Фурье $S[f]$ функции f чувствительна к монотонности функции f , то легко получить (см. (1)), что $|\int_{\pi/n}^{\pi} [f_k(x+t) - f_k(x)] t^{-1} \sin ntdt| \leq Ck^{-1} \ln(n+1) \|f_k\|_C$ ($k=1, 2, \dots, m$).

Используя последние оценки, легко получается утверждение теоремы 4.

Заметим, что последняя оценка, примерно, выражает тот факт, что если для ограниченной функции g известно, что

$$(9) \quad \mu(g; k\pi/n) = 0$$

(т.е. функция g монотонна на каждом интервале длиной $k\pi/n$), то $\|S_n(g; x)\|_C \leq Ck^{-1} \ln(n+1) \|g\|_C$, а без условия (9), как хорошо известно [7, т. I, с. 114], $\|S_n(g; x)\|_C \leq C \ln(n+1) \cdot \|g\|_C$.

Наконец отметим, что доказательства известных признаков для равномерной сходимости ряда Фурье и доказательство теоремы 4 (а из нее легко следует теорема 1) основываются на различных идеях. При доказательствах большинства известных признаков перерабатывается ядро Дирихле, заменяя его более простым выражением, а при доказательстве теоремы 4 функция f надлежащим образом разлагается на сумму непрерывных функций (см. лемму 1), имеющих хороших для n -той частичной суммы ряда Фурье $S[f]$ свойства.

2. В этой части сравним полученное достаточное условие (8) для равномерной сходимости ряда Фурье $S[f]$ функции $f \in C_{2\pi}$ с некоторыми известными признаками для равномерной сходимости ряда $S[f]$.

Будем пользоваться следующей терминологией из [1, с. 246]:

Определение 1. Признак A сильнее признака B , если: а) всегда, когда можно заключить равномерную сходимость ряда Фурье $S[f]$ функции f из признака B , эту сходимость можно заключить и из признака A , но; б) существуют случаи, когда признак A позволяет заключить равномерную сходимость ряда Фурье, а признак B неприменим.

Определение 2. Признаки A и B несравнимы, если можно указать случаи, когда A применим, а B нет, точно так же, как и обратно.

Доказаны:

Теорема 5. Условие (8) более слабое требование к функции $f \in C_{2\pi}$, чем условие Дини — Липшица (2), и, следовательно, признак из теоремы 1 сильнее признака Дини — Липшица.

Доказательство этой теоремы базируется на неравенстве (7) и на различие характеристик $\mu(f; \delta)$ и $\omega(f; \delta)$.

Теорема 6. Признак для равномерной сходимости ряда $S[f]$ из теоремы 1 сильнее признака для равномерной сходимости ряда $S[f]$, выражающийся через одностороннее условия Дини — Липшица (3).

Доказательство последней теоремы использует следующую связь между модулем немонотонности $\mu(f; \delta)$ функции $f \in C_{2\pi}$ и односторонним условием Дини — Липшица (3).

Лемма 2. Если для функции $f \in C_{2\pi}$ выполнено одностороннее условие Дини — Липшица (3), то $\mu(f; h) \leq \varepsilon_1(h) / \ln(1/h)$, где $\varepsilon_1(h) = \sup\{\varepsilon(t) : 0 \leq t \leq h\}$.

Теорема 7. Признак Чантурии для равномерной сходимости ряда Фурье и признак из теоремы 1 несравнимы.

Отчитывая эквивалентность условия Чантурии (5) с известными условиями Салема, К. Осколкова и Е. Севастьянова [4, 8, 13], то ясно, что признак из теоремы 1 несравним и с ними.

Отметим, что, как хорошо известно [1, с. 246], признаки Дини — Липшица и Дирихле — Жордана несравнимы. Тем не менее справедлива

Теорема 8. Признак для равномерной сходимости ряда Фурье из теоремы 1 сильнее признака Дирихле — Жордана.

При доказательстве последней теоремы используется следующая

Лемма 3. Если $f \in C_{2\pi}$ и f имеет ограниченное изменение на интервале $[0, 2\pi]$, то существует $\delta_0 > 0$ и функции $f_1, f_2, f_3, f_4 \in C_{2\pi}$ такие, что $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ и $\mu(f_i; \delta_0) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

3. В этой части покажем, как результаты из части 1 переносятся для случая равномерной суммируемости ряда Фурье методами Чезаро (C, α) для $-1 < \alpha < 0$.

Для $\alpha \in (-1, 1)$ чезаровские средние (C, α) в точке x ряда Фурье $S[f]$ определяются следующим образом [7, т. I, с. 130]: $S_n^\alpha(f; x) = A_n^{-\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, где $A_n^\alpha = (n+1)(n+2) \dots (n+\alpha)/n!$. Ряд $S[f]$ суммируем (C, α) в точке x , если $S_n^\alpha(f; x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что для $\alpha=0$ чезаровские средние $S_n^0(f; x)$ совпадают с n -той частичной суммой $S_n(f; x)$ ряда Фурье $S[f]$. Если $\alpha > 0$ и $f \in C_{2\pi}$, то $S_n^\alpha(f; x)$ равномерно сходятся к функции f ([1], с. 482). Если же $\alpha \leq 0$, то для того чтобы обеспечить равномерную суммируемость ряда $S[f]$, $f \in C_{2\pi}$ методом (C, α) , необходимо наложить на функцию f еще некоторые ограничения. А. Зигмунд [2] показал: Если $f \in \text{Lip } \alpha$, то $\|S_n^{-\alpha'}(f; x) - f(x)\|_C \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\alpha' < \alpha$. Л. Жижиашвили в [2] усилил этот результат следующим образом: Если $f \in C_{2\pi}$, $\varepsilon(h) > 0$, $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$ и $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \geq -\varepsilon(h)h^\alpha$ равномерно по x , то ряд $S[f]$ равномерно $(C, -\alpha)$ суммируем к f . Нами доказана

Теорема 9. Если $f \in C_{2\pi}$ и

$$(10) \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \mu(f; \delta)/\delta^\alpha = 0,$$

то ряд $S[f]$ равномерно $(C, -\alpha)$ суммируем к f .

Условие (10), как достаточное условие для равномерной $(C, -\alpha)$ суммируемости ряда $S[f]$, точно в вышеуказанном смысле.

Используя лемму 3, из теоремы 9 сразу получается

Следствие 1. Если $f \in C_{2\pi}$ и имеет ограниченное изменение на интервале $[0, 2\pi]$, то ряд $S[f]$ равномерно (C, α) суммируем к f для любого $\alpha > -1$.

Легко получается, используя лемму 2 и неравенство (7), что признак для равномерной $(C, -\alpha)$ суммируемости ряда $S[f]$ из теоремы 9 сильнее упомянутых выше признаков Зигмунда и Жижиашвили.

Для случая равномерной $(C, -\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ суммируемости сопряженного ряда $\tilde{S}[f]$ справедлива

Теорема 10. Если $f \in C_{2\pi}$ и $\lim_{\delta \rightarrow +0} \mu(f; \delta)/\delta^\alpha = 0$, то $\|\tilde{S}_n^{-\alpha}(f; x) - \tilde{f}_n(x)\|_C \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $\tilde{S}_n^{-\alpha}(f; x) - (C, -\alpha)$ средние ряда $\tilde{S}[f]$ и

$$\tilde{f}_n(x) = -(1/2\pi) \int_{\pi/n}^{\pi} (f(x+t) - f(x-t)) \cotg(t/2) dt.$$

Отметим, что утверждения теоремы 9 и теоремы 10 можно незначительно усилить, формулируя их в форме аналогичной теоремы 3.

4. В этой части содержатся результаты, аналогичные результатам из части 1, но для случая равномерной сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов $I_n(f; x)$ функции $f \in C_{2\pi}$, построенных по нечетному числу равноотстоящих интерполяционных узлов.

Точнее, пусть [7, т. II, с. 5—86] $x_k^{(n)} = x_0^{(n)} + 2k\pi/(2n+1)$; $k=0, 1, 2, \dots, 2n$ и

$$I_n(f; x) = (2/(2n+1)) \sum_{k=0}^{2n} f(x_k^{(n)}) D_n(x - x_k^{(n)}); \quad n=1, 2, \dots,$$

где $D_n(u)$ — n -тое ядро Дирихле.

Доказаны:

Теорема 11. Для всякой функции $f \in C_{2\pi}$ выполнено

$$\|I_n(f; x) - f(x)\|_C \leq C \ln(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{[n^2]} k^{-2} \mu(f; 2k\pi/(2n+1)) + \varepsilon_n(f), \quad n=1, 2, \dots,$$

где C — абсолютная константа и $\varepsilon_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 12. Если $f \in C_{2\pi}$ и $\lim_{\delta \rightarrow +0} \mu(f; \delta) \ln(1/\delta) = 0$, то последовательность $I_n(f; x)$, $n=1, 2, \dots$ равномерно по x стремится к f при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 13. Пусть $f \in C_{2\pi}$. Если для некоторого действительного a , интервал $[a, a+2\pi]$ можно разбить на конечное число подынтервалов точками $a = a_1 < a_2 < \dots < a_m = a+2\pi$ так, что $\lim_{\delta \rightarrow +0} \mu(f; [a_i, a_{i+1}], \delta) \ln(1/\delta) = 0$, $i=1, 2, \dots, m-1$, то $I_n(f; x)$ равномерно сходятся к $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 12 усиливает критерий Дини — Липшица для равномерной сходимости последовательности полиномов $I_n(f; x)$ [7, т. II, с. 31] и результат Г. Неваи из [3], где он показал, что и одностороннее условие Дини — Липшица (3) для функции из $C_{2\pi}$ обеспечивает равномерную сходимость последовательности интерполяционных полиномов $I_n(f; x)$. Теорема 13 усиливает аналогичный результат Неваи из [3], сформулированный через одностороннее условие Дини — Липшица (3) на интервалах $[a_i, a_{i+1}]$, $i=1, 2, \dots, m-1$.

Полученный признак из теоремы 12 для равномерной сходимости последовательности интерполяционных полиномов $I_n(f; x)$, $n=1, 2, \dots$, точен в смысле, что порядок убывания модуля немонотонности $\mu(f; \delta)$, задаваемый условием (8), неулучшаем, т. е. существует функция $f \in C_{2\pi}$, такая, что $\mu(f; \delta) = O\{(\ln(1/\delta))^{-1}\}$ при $\delta \rightarrow +0$, и последовательность полиномов $I_n(f; x)$ расходится почти всюду на интервале $[0, 2\pi]$ [14].

Заканчивая изложение, отметим, что, как видно из настоящей работы, модуль немонотонности $\mu(f; \delta)$ функции f в некоторых ситуациях из теории рядов Фурье стоит лучше, чем модуль непрерывности $\omega(f; \delta)$ функции f .

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Барн. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
2. Л. В. Жижиашвили. О тригонометрических рядах Фурье. *Матем. сб.*, 100, 1976, № 4, 580—609.
3. Г. П. Неваи. О признаке Дини — Липшица. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 24, 1973, 3—4, 349—351.
4. К. И. Осколков. Обобщенная вариация, индикатриса Банаха и равномерная сходимость рядов Фурье. *Матем. заметки*, 12, 1972, 313—324.
5. Е. А. Севастьянов. Равномерные приближения кусочно-монотонными функциями и некоторые их приложения к Φ -вариациям и рядам Фурье. *Доклады АН СССР*, 217, 1974, № 1, 27—30.
6. З. А. Чантурия. Модуль изменения функций и его применения в теории рядов Фурье. *Доклады АН СССР*, 214, 1974, № 1, 63—66.
7. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. I и II. Москва, 1965.

8. З. А. Чантурия. О равномерной сходимости рядов Фурье. *Матем. сб.*, 100, 1976' № 4, 534—554.
9. В. Х. Христов, П. П. Петрушев. Одно улучшение критерия Дини—Липшица о равномерной сходимости ряда Фурье. *Доклады БАН*, 29, 1976, № 11, 1579—1582.
10. В. Х. Христов. Критерий типа Дини—Липшица для равномерной сходимости интерполяционных полиномов. *Плиска*, 1, 1977, 128—133.
11. В. Х. Христов. О признаках для сходимости ряда Фурье. Диссертация, София, 1977.
12. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в метрике Хаусдорфа. *Успехи матем. наук*, 24, 1969, № 5, 141—178.
13. Е. А. Севастьянов. Кусочно-монотонная и рациональная аппроксимации и равномерная сходимость рядов Фурье. *Мат. заметки*, 20, 1976, 619—624.
14. А. А. Привалов. О расходимости интерполяционных процессов в фиксированной точке. *Матем. сб.*, 66, 1965, № 2, 272—286.

Центр математики
и механики п. я. 373
1090 София Болгария

Получено 1. 9. 1977